Calcolo Numerico 2 – a.a. 2016/17

foglio n. 3 per il 22.03.2017

3.1. **Principio di Duhamel.** Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ un coefficiente, $T \in \mathbb{R}^+$ un tempo finale, $g :]0,T[\to \mathbb{R}$ una funzione sorgente e u_s, $s \in]0,T[$, una famiglia di funzioni tali che

$$u_s(s) = g(s), \qquad u_s' = \lambda u_s \quad \text{in }]s,T[.$$

Dimostrare formalmente che la funzione

$$u(t) = \int_0^t u_s(t)\, ds, \qquad t \in [0,T[$$

verifica

$$u(0) = 0, \qquad u' = \lambda u + g \quad \text{in }]0,T[.$$

Suggerimento: Usare l'esercizio 2.6.

3.2. **Stabilità con la condizione Lipschitz.** Siano $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tale che

$$\forall (t,z_1),(t,z_2) \in \Omega \qquad |f(t,z_1) - f(t,z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$$

per una costante $L \geq 0$. Mostrare che se u_1 e u_2 sono tali che

$$u_i' = f(u_i) \text{ in }]t_0,T[, \quad u_i(t_0) = v_i \qquad (i = 1,2),$$

allora

$$\forall t \in [t_0,T[\qquad |u_1(t) - u_2(t)| \leq e^{L(t-t_0)}|v_1 - v_2|.$$

3.3. **Un sistema dissipativo.** Considerare un problema ai valori iniziali del tipo

$$u' = -\nabla\Phi(u) + \delta, \quad u(0) = v + \rho,$$

dove $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è due volte derivabile con continuità e strettamente convesso nel senso che esiste $\lambda > 0$ con

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}^d \quad D^2\Phi(z)\xi \cdot \xi \geq \lambda|\xi|^2,$$

$\delta \in C^0(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ e $\rho \in \mathbb{R}^d$ sono perturbazioni. Studiare l'effetto delle perturbazioni δ e ρ sulla soluzione.

Suggerimento: Confrontarsi con esercizio E2.4.