Calcolo Numerico 2 – a.a. 2016/17

foglio n. 4 per il 29.03.2017

4.1. **Polinomi e simboli di Landau.** Sia P un polinomio in $\mathbb{R}$ con grado $\leq k$. Dimostrare l'implicazione

$$P(\tau) = O(\tau^{k+1}) \text{ per } \tau \to 0 \implies P = 0.$$

Inoltre formulare e dimostrare una implicazione più precisa, in cui l'antecedente coinvolge $o(\cdot)$.

4.2. **Metodi di Heun.** Sia il metodo di Eulero migliorato

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}\tau(k_1 + k_2)$$

con

$$k_1 = f(t_n, U_n) \quad \text{e} \quad k_2 = f(t_n + \tau, U_n + \tau k_1),$$

che il metodo di Ralston

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\tau}{4}(k_1 + 3k_2)$$

con

$$k_1 = f(t_n, U_n) \quad \text{e} \quad k_2 = f\left(t_n + \frac{2}{3}\tau, U_n + \frac{2}{3}\tau k_1\right),$$

prendono anche il nome metodo di Heun. Verificare che entrambi sono consistenti, cioé $\epsilon(\tau) = o(\tau)$ per $\tau \searrow 0$ per l'errore di consistenza. Inoltre determinare le velocità massimali di questa convergenza per soluzioni esatte regolari.

4.3. **Metodi numerici tramite formulazione integrale.** Derivare dei metodi numerici per problemi a valori iniziali approssimando l'integrale nella formulazione integrale con la formula dei rettangoli a destra e a sinistra. Da quali formule di quadratura si lasciano derivare i metodi di Heun?

4.4. **Consistenza globale.** Considerare

$$u' = f(\cdot, u) \text{ in } (t_0, T), \qquad u(t_0) = v$$

con secondo membro $f \in C^0(\mathbb{R}^{d+1}; \mathbb{R}^d)$ limitato e una funzione di incremento $F \in C^0(\mathbb{R}^{d+1} \times [0, \infty[; \mathbb{R}^d)$ limitata di un metodo ad un passo consistente. Mostrare che, posto

$$\tau = \frac{T - t_0}{N}, \qquad t_n = t_0 + n\tau \quad (n = 0, \dots, N),$$

vale

$$\sum_{n=0}^{N-1} \epsilon\big(t_n, u(t_n), \tau\big) = o(1)$$

per $N \to \infty$. Discutere il legame tra questo enunciato e la consistenza di un singolo passo.

Suggerimento: Introdurre i moduli di continuità

$$\omega_f(\tau) := \sup_{t_1,t_2\in[t_0,T],\, 0\le t_2-t_1\le\tau} |f(t_1,u(t_1)) - f(t_2,u(t_2))|$$
$$\omega_F(\tau) := \sup_{t_1,t_2\in[t_0,T],\, 0\le t_2-t_1\le\tau} |F(t_1,u(t_1),0) - F(t_1,u(t_1),t_2-t_1)|$$

e utilizzare la compattezza di $[t_0, T]$.

4.5. **Consistenza del metodo di Eulero implicito.** Verificare che il metodo di Eulero implicito

$$U_{n+1} = U_n + \tau f(t_{n+1}, U_{n+1})$$

ha ordine di consistenza 1.

4.6. **Consistenza del metodo dei trapezi implicito.** Considerare il metodo

$$U_{n+1} \quad \text{tale che} \quad U_{n+1} = U_n + \frac{\tau}{2}\Big[f(t_n,U_n) + f(t_{n+1},U_{n+1})\Big].$$

Verificare che questo metodo, detto metodo dei trapezi implicito, ha ordine di consistenza 2.

4.7. **Derivate di f e ordine di consistenza.** Permettendo valutazioni di derivate della funzione f che caratterizza l'equazione differenziale, proporre un metodo esplicito con ordine di consistenza $r \in \mathbb{N}_0$.

Informazioni:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento