Calcolo Numerico 2 – a.a. 2016/17

foglio n. 5 per il 05.04.2017

5.1. **Regolarità massima.** Mostrare con un opportuno esempio di un problema a valori iniziali

$$u' = f(\cdot, u), \quad u(t_0) = v$$

che l'implicazione

$$f \in C^r \implies u \in C^{r+1} \qquad (r \in \mathbb{N})$$

non può essere migliorata. Più precisamente, individuare una funzione f tale che la soluzione del problema a valori iniziali non è due volte derivabile con continuità.

5.2. **Metodi impliciti e espliciti.** Discutere le conseguenze delle differenze rispetto al costo fra metodi espliciti e impliciti, come in E4.5 e E4.6. A questo scopo considerare in particolare problemi del tipo

$$u' = u^p, \quad u(t_0) = v$$

con $p > 0$.

5.3. **Esempi di schemi di Butcher.** Determinare gli schemi di Butcher dei seguenti metodi:

- i metodi di Heun (vedere E4.2),
- il metodo dei trapezi implicito (vedere E4.6).

5.4. **Invarianza lineare di metodi di Runge-Kutta.** Dimostrare che metodi di Runge-Kutta sono invarianti sotto trasformazioni lineari invertibili: se $T \in \mathrm{GL}(d)$ e se si applica il metodo a

$$u' = f(\cdot, u), \quad u(0) = v \qquad \text{e} \qquad w' = Tf(\cdot, T^{-1}w), \quad w(0) = Tv,$$

allora le approssimazioni corrispondenti U_1 e W_1 dopo un passo soddisfano $W_1 = TU_1$.

5.5. **Metodi di Runge-Kutta e autonomizzazione.** Applicare un metodo Runge-Kutta esplicito generale (c, A, b) a s stadi sia al problema non autonomo sia a quello autonomo dell'esercizio E2.2. Verificare che le soluzioni di Runge-Kutta rispettive si corrispondono se e solo se

$$\forall i = 1, \dots, s \quad c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}.$$

5.6. **Metodi di Runge-Kutta espliciti per problemi modello.** Applicare un metodo di Runge-Kutta esplicito ad s stadi a un problema autonomo lineare

$$u' = Au \qquad \text{con } A \in \mathrm{Mat}(d)$$

e verificare che esiste un polinomio $P \in \mathbb{P}_s$ di grado massimo s tale che

$$\forall (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \qquad \Phi(t + \tau, t)z = P(\tau A)z.$$

5.7. **Stadi e ordine per metodi di Runge-Kutta.** Sia p l'ordine di consistenza massimo di un metodo di Runge-Kunge esplicito a s stadi. Dimostrare che $p \leq s$.

Suggerimento: Considerare il problema a valore iniziale scalare

$$u' = u \text{ in } [0, \infty[, \qquad u(0) = 1$$

e usare E5.6.

Informazioni:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento