Calcolo Numerico 2 – a.a. 2016/17

foglio n. 6 per il 12.04.2017

6.1. **Lipschitzianità di RKE.** Sia

$$u' = f(u) \text{ in } \mathbb{R}, \quad u(0) = v$$

un problema a valori iniziali autonomo, dove $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è Lipschitz con costante L. Inoltre sia Φ un metodo Runge-Kutta consistente esplicito a s stadi caratterizzato da (c, A, b) tali che $c = Ae$ con $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^s$. Verificare che, per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\tau > 0$, $\Phi(t + \tau, t)$ è Lipschitz con costante $\exp(\tau\gamma L)$ dove

$$\gamma := \max_{j=1}^{s} \big(j!|b^t||A|^{j-1}e\big)^{1/j} \geq 1$$

dove $|A| = (|a_{ij}|)_{i,j=1,\ldots,s}$.
Suggerimento: Sfruttare il fatto che $|A|$ è nilpotente.

6.2. **Un esempio di estrapolazione di Richardson.** Applicare l'estrapolazione di Richardson al metodo di Eulero esplicito con passo $\tau/2$ e formulare il risultato come metodo di Runge-Kutta esplicito.

6.3. **Sulla scelta del passo adattativo.** Sia $R = R(\tau)$ un residuo locale tale che $R(\tau) \approx \tau^p$ per $\tau \to 0$ con $p > 0$. Dati tol > 0, $\tau_0 > 0$ e $R(\tau_0) > 0$, proporre un nuovo passo $\tau_1 > 0$ con lo scopo $R(\tau_1) \lesssim$ tol, cioè $R(\tau_1)$ è più piccolo di tol ma non molto diverso.

6.4. **Collocazione e metodi di Runge-Kutta.** Un metodo per

$$u' = f(\cdot, u)$$

si dice di collocazione se esistono

$$s \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad 0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_s \leq 1.$$

tali che l'evoluzione discreta è definita da

$$\Phi(t + \tau, t)z = P(t + \tau)$$

dove $P \in \mathbb{P}_s(\mathbb{R})$ soddisfi

(i) $P(t) = z$,
(ii) $\forall u = 1, \ldots, s \quad P'(t + c_i\tau) = f\big(t + c_i\tau, P(t + c_i\tau)\big)$.

Verificare che un metodo di collocazione è un metodo di Runge-Kutta.
Suggerimento: Introdurre i polinomi di Lagrange $L_i \in \mathbb{P}_s(\mathbb{R})$ tali che

$$\forall i, j = 1, \ldots, s \quad L_i(c_j) = \delta_{ij}$$

e porre $k_i = P'(t + c_i\tau)$ per $i = 1, \ldots, s$.

6.5. **Coefficienti di Runge-Kutta per metodi di collocazione.** Verificare che i coefficienti di un metodo di Runge-Kutta (c, A, b) indotto dalla collocazione soddisfano

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k},$$

per $i, k = 1, \ldots, s$ con la convenzione $0^0 = 1$. Inoltre verificare che il metodo di Runge-Kutta è consistente e invariante nel senso di E5.5.

Suggerimento: Usare le formule

$$b_j = \int_0^1 L_j \quad \text{e} \quad a_{ij} = \int_0^{c_i} L_j$$

per $i, j = 1, \ldots, s$ dimostrate in E6.4.

6.6. **FSAL.** Formulare le condizioni sui coefficienti di un metodo di Runge-Kutta esplicito per realizzare la seguente idea del "First same as last", cioè il primo stadio di un passo corrisponde all'ultimo del passo precedente. Questa richiesta è compatibile con E5.5?

Informazioni:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento