Alcune note su Esercizio 11.2

Testo dell'esercizio: si consideri il problema:

$$\begin{cases} y' = -y^2, & t \in [0,10] \\ y(0) = 5 \end{cases} \quad \text{di soluzione} \quad y(t) = \frac{5}{1+5t}$$

Approssimarlo con Eulero Implicito. Compilare la seguente tabella per N = 10

toll	Errore al primo passo	Errore finale	Errore massimo tra i passi
1e-6			
1			

Nel caso toll = 1 fare un grafico sovrapposto in Matlab della soluzione esatta, della soluzione ottenuta con Newton e di quella che si otterrebbe risolvendo ad ogni passo l'equazione di secondo grado tramite la formula risolvente. Dedurre l'importanza della scelta del valore di toll.

Risultati: dipendono fortemente dall'algoritmo usato per risolvere ad ogni passo il problema non-lineare.

Newton autentico (costruisce e fattorizza lo jacobiano ad ogni iterazione) e trova l'incognita U_{n+1}

toll	Errore al primo passo	Errore finale	Errore massimo tra i passi
1e-6	0.9580	0.0371	0.9580
1	1.0937	0.0556	1.0937

Per toll=1 compie 2 iterazioni al primo passo (n = 1) e poi sempre solo 1

Newton semplificato (costruisce e fattorizza lo jacobiano solo alla prima iterazione) e trova l'incognita U_{n+1} (vedi il programma Eulero Implicito in R^d)

toll	Errore al primo passo	Errore finale	Errore massimo tra i passi
1e-6	0.9580	0.0371	0.9580
1	1.4244	0.0616	1.4244

Per toll=1 compie 2 iterazioni al primo passo (n = 1) e poi sempre solo 1.

Il motivo per cui per toll=1 non si hanno gli stessi risultati del caso precedente è la lenta velocità di convergenza di Newton semplificato.
Al primo passo temporale, la prima iterazione è uguale per entrambe i metodi e non supera il test di arresto err< toll. Le seconde iterate però non coincidono più perché Newton autentico ha cambiato lo jacobiano e mi fornisce una soluzione molto più accurata di Newton semplificato. Ma entrambe soddisfano il test err< toll. La scarsa accuratezza con cui ho calcolato U_1 con Newton semplificato si ripercuote poi sui passi seguenti.

Newton semplificato (costruisce e fattorizza lo jacobiano solo alla prima iterazione) e trova l'incognita K_1 (vedi il programma Runge-Kutta Implicito)

L'incognita qui non è U_{n+1} bensì K_1. Il problema non-lineare è impostato in modo diverso e in questo caso per N = 10 Newton semplificato non converge.