Problemi d'esame di **Calcolo Numerico 2**

a.a. 2012/2013

12.1. **Approssimando un ciclo limite.** Considerare il problema ai valori iniziali per l'equazione di Van der Pol

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 & u_1(0) &= u_1, \\ u_2' &= \epsilon(1-u_1^2)u_2 - u_1 & u_2(0) &= u_2, \end{aligned}$$

per

$$\epsilon = 1, \quad u_1 = 2.00861986087484313650940188, \quad u_2 = 0.$$

Applicare e confrontare i metodi di Runge-Kutta di Dormand-Prince 5(4), di Fehlberg 4(5)

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\ \frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\ 1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\ \hline & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \hline & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55} \end{array}$$

e di Cash-Karp

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & \frac{6}{5} & & & \\ 1 & -\frac{11}{54} & \frac{5}{2} & -\frac{70}{27} & \frac{35}{27} & & \\ \frac{7}{8} & \frac{1631}{55296} & \frac{175}{512} & \frac{575}{13824} & \frac{44275}{110592} & \frac{253}{4096} & \\ \hline & \frac{37}{378} & 0 & \frac{250}{621} & \frac{125}{594} & 0 & \frac{512}{1771} \\ \hline & \frac{2825}{27648} & 0 & \frac{18575}{48384} & \frac{13525}{55296} & \frac{277}{14336} & \frac{1}{4} \end{array}$$

per l'approssimazione di $u(T)$ con

$$T = 6.66328685932313018969968203 05.$$

12.2. **Un sistema 20×20.** Considerare il problem ai valori iniziali

$$u' = \begin{pmatrix} -1 & 20 & & & & \\ & -2 & 20 & & & \\ & & -3 & 20 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -19 & 20 \\ & & & & & -20 \end{pmatrix} u, \qquad u(0) = (1, \ldots, 1)^t.$$

Approssimare numericamente la soluzione con un metodo opportuno a scelta. Commentare l'andamento della soluzione.

12.3. **Studio dei BDF.** Applicare le backward differential formulas stabili ai problemi

$$u' = -u^2, \qquad u(0) = 1$$

e

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dove possibile confrontare il bilanciamento errore-numero di valutazioni di $f(t, z) = -z^2$ per le sei formule.

12.4. **Passi espliciti per un problema stiff.** Considerare il problema

$$u' = -\lambda u \text{ in } (0, 10), \qquad u(0) = 1$$

con $\lambda = 10^3$. Confrontare numericamente i metodo di Euler con il metodo

$$U_{n+1} = (1 - \tau_* \lambda)^m (1 - \tau^* \lambda) U_n$$

proposto da Eriksson, Johnson e Logg nel 2003 con i parametri $\tau_* = 0.5 \cdot 10^{-3}$, $\tau^* = 1$, e $m = 7$. Spiegare la scelta dei parametri, analizzando la stabilità.

12.5. **Un problema ai limiti.** Considerare il problema ai limiti

$$-u'' + u = 2x \text{ in } (0, 1), \qquad u(0) = 0 = u(1)$$

e determinare la soluzione esatta. Applicare il metodo alle differenze finite ed eseguire una serie di esperimenti numerici per indagare l'ordine di convergenza nella norma del massimo.