Estrapolazione di Richardson

Sia Φ un qualsiasi metodo Runge-Kutta esplicito di ordine p e sia U_n l'approssimazione al tempo t_n.

Se

$$\hat{U} = \Phi(t_n + \tau,\ t_n)U_n$$

$$U_{1/2} = \Phi(t_n + \tau/2, t_n)U_n$$

$$U_1 = \Phi(t_n + \tau, t_n + \tau/2)U_{1/2}$$

Allora

$\| \frac{U_1 - \hat{U}}{2^p - 1} \| = O(\tau^{p+1})$ stima l'errore di consistenza del metodo Φ

$U_{n+1} = U_1 + \frac{U_1 - \hat{U}}{2^p - 1}$ è un metodo di ordine p+1

Adattività del passo

- si corregge il passo moltiplicandolo per una costante $q = \sqrt[p+1]{\frac{toll}{Err_n}}$ (vedi esercizio 6.3 delle esercitazioni teoriche)
- sebbene si sia stimato l'errore di consistenza del metodo di ordine p, si calcola la soluzione approssimata utilizzando il metodo di ordine p+1

nella pagina seguente uno schema dell'algoritmo.

schema dell'algoritmo

fissata una tolleranza **toll**, posto **r = 0.5 (** 0 < r < 1 è un parametro di sicurezza),

assegnato **τ** (valore di tentativo per il primo passo),

inizializzati , **$t = t_0$, U = v, n = 0** (conta il n° dei passi)

while (t < T)

calcolo di $\hat{U}, U_{1/2}, U_1$

stima dell'errore $Err = \| \frac{U_1 - \hat{U}}{2^p - 1} \|$

$\tau_{nuovo} = \sqrt[p+1]{\frac{r * toll}{\text{Err}}} \cdot \tau$ nuovo τ per prossima prova

if(Err <= toll) il passo ha avuto successo: assegno

$$U_{n+1} = U_1 + \frac{U_1 - \hat{U}}{2^p - 1}$$

$t = t + \tau$,

$\tau = \min(\tau_{nuovo}, T\text{-}t)$

n = n+1

eventuale gestione stampe su video o file

else // il passo non ha avuto successo, devo ripeterlo

$\tau = \tau_{nuovo}$

end if

end while