Laboratorio 10

Obiettivi

Approssimare il problema di Cauchy per un SISTEMA di E.D.O.:

f: $\Re^{d+1} \longrightarrow \Re^{d}$

u'(t) = f(t,u(t)), $t_0 \le t \le T$, $u(t) \in \Re^{d}$

$u(t_0) = v$, $v \in \Re^{d}$

con un metodo **Runge – Kutta implicito a passo fisso**

Metodi Runge – Kutta impliciti a passo fisso

$$U_{n+1} = U_n + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i K_i \,,$$

$$K_i = f\left(t_n + c_i \tau \,,\, U_n + \tau \sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j \right) \quad , \; i = 1, 2, \ldots, s. \qquad (*)$$

N.B: in (*) l'indice j arriva fino a s quindi A è una matrice piena

(*) definisce un sistema non lineare di d*s equazioni in d*s incognite

Se si indica con $K_{i,m}$ la m-esima componente del vettore K_i , il sistema non lineare (*) scritto in dettaglio diventa: ponendo $t_n = t, U_n = u$ per semplicità di notazione

$$K_{1,1} = f_1\left(t + c_1\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{1j}K_j\right)$$

$$K_{1,2} = f_2\left(t + c_1\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{1j}K_j\right) \qquad (**)$$

…

$$K_{1,d} = f_d\left(t + c_1\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{1j}K_j\right)$$

$$K_{2,1} = f_1\left(t + c_2\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{2j}K_j\right)$$

$$K_{2,2} = f_2\left(t + c_2\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{2j}K_j\right)$$

…

$$K_{2,d} = f_d\left(t + c_2\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{2j}K_j\right)$$

…

…

$$K_{s,1} = f_1\left(t + c_s\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{sj}K_j\right)$$

$$K_{s,2} = f_2\left(t + c_s\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{sj}K_j\right)$$

…

$$K_{s,d} = f_d\left(t + c_s\tau, u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{sj}K_j\right)$$

Ad ogni istante temporale si tratta di risolvere un sistema di equazioni non lineari di tipo:

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{K}) = \mathbf{K} - \mathbf{F}\,(\mathbf{K}) = \mathbf{0}$$

Ricordiamo il metodo di Newton semplificato:

dato $\mathbf{K}^{(0)}$ = il valore di K al passo temporale precedente, costruito e fattorizzato $J_f(K^{(0)})$, si itera

$J_f(K^{(0)})\, d^{(k)} = -f(K^{(k)}) = F(K^{(k)}) - K^{(k)}$,

$K^{(k+1)} = d^{(k)} + K^{(k)}$

finchè $\| d^{(k)} \| < toll$

Dove:

$J_f(\mathbf{K}) = I - J_F(K)$,

con

I matrice identità (d*s) x (d*s)

$J_F(K)$ Jacobiano di **F** rispetto alle componenti del vettore **K** (vedi nella prossima pagina lo schema della struttura di J_F)

Struttura di J_F

J_F è una matrice a blocchi costituita da s righe e s colonne di blocchi ognuno di dimensione dxd.
Ogni blocco è costituito dallo Jacobiano J_f dell'applicazione f del problema differenziale assegnato (#), moltiplicato per una costante e valutato in opportuni valori delle variabili (t,u):

$\tau\ a_{11}\, J_f\left(t + c_1\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{1j}K_j\right)$	$\tau\ a_{12}\, J_f\left(t + c_1\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{1j}K_j\right)$			$\tau\ a_{1s}\, J_f\left(t + c_1\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{1j}K_j\right)$
$\tau\ a_{21}\, J_f\left(t + c_2\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{2j}K_j\right)$	$\tau\ a_{22}\, J_f\left(t + c_2\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{2j}K_j\right)$			$\tau\ a_{2s}\, J_f\left(t + c_2\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{2j}K_j\right)$
…..				
$\tau\ a_{s1}\, J_f\left(t + c_s\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{sj}K_j\right)$	$\tau\ a_{s2}\, J_f\left(t + c_s\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{sj}K_j\right)$			$\tau\ a_{ss}\, J_f\left(t + c_s\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{sj}K_j\right)$

Possiamo notare che:

- il blocco di indice ij è moltiplicato per l'elemento a_{ij} della matrice di Butcher del metodo
- gli Jacobiani sulla stessa riga sono valutati negli stessi valori delle variabili: se la riga ha indice k, sono tutti valutati in $\left(t + c_k\tau\,,\ u + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{kj}K_j\right)$

Schema di lavoro per l'implementazione del metodo

Suggerimento: dimensionare, oltre alla matrice K, una K2 di ugual dimensione che memorizzi **F(K)**;

NB: in grassetto rosso si indica ciò che si intende fare nelle righe sottostanti

Inizializzazioni: $t = t_0$, $u = v$

i = 1, …, s

f(K[i], t + $c_i\,\tau$, u) // inizializzo la matrice K

end i

ciclo sul tempo

n = 0,1, …,N-1

calcolo lo Jacobiano JF = J_f (K) = I - J_F(K):

i = 1, …, s (ciclo sulle righe di blocchi)

calcolo la matrice d x d $Jf = J_f\left(t + c_i\tau\,,\ u + \tau\sum_{p=1}^{s} a_{ip}K_p\right)$

j = 1,…, s (ciclo sulle colonne di blocchi)

memorizzo $-\tau\ a_{ij}\,Jf$ nel suo blocco di JF

end j

end i

JF = JF +I

fattorizzo JF

iterazioni di Newton

k=0; (conta il numero di iterazioni di Newton)

do (itero Newton)

calcolo F(K) memorizzando in K2

costruisco tn = K2 - K (**Nota**: attenzione alle dimensioni, tn è un vettore!)

risoluzione del sistema lineare

K + = δ (**Nota**: attenzione alle dimensioni, δ è un vettore!)

k=k+1;

while (|| δ || > toll and k < k_{max})

calcolo U_{n+1}

t = t + τ

eventuali stampe

end n

Prove numeriche: vedi file dei risultati