

Laboratorio 2

Obiettivi

a) approssimare il problema di Cauchy per un SISTEMA di E.D.O.:

$$f: \mathfrak{R}^{d+1} \longrightarrow \mathfrak{R}^d$$

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad u(t) \in \mathfrak{R}^d$$

$$u(t_0) = v, \quad v \in \mathfrak{R}^d$$

con il metodo di **Eulero Esplicito**

assegnato un intero $N \neq 0$, sia $\tau = (T - t_0)/N$

$$U_{n+1} = U_n + \tau f(t_n, U_n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$U_0 = v$$

dove U_n è un vettore di d componenti

prevedendo la stampa su file, ad ogni istante temporale, di t_n e delle componenti di U_n

b) applicare il metodo ad un problema di cui si conosca la soluzione esatta allo scopo di poter calcolare l'errore dopo 1 solo passo (ossia l'errore che si genera nel singolo passo quando si parte da un dato affetto dal solo errore di floating), dopo N passi (errore finale) e il massimo tra tutti.

Schema del programma C++

- Include vari;
- using namespace std;
- typedef double Real;

inizio del main:

- definizione dei puntatori alle funzioni che definiscono il problema
- definizione del file di stampa (eventuale lettura in input del nome del file di stampa)
- scelta del problema (assegnazione dei puntatori e della dimensione d)
- assegnazione delle variabili u, t, T ;
- lettura in input di N (NB: da definire come **unsigned long**)
- calcolo di tau;
- output della coppia t, u
- **inizio ciclo for** $n = 1:N$
 - passo di Eulero Esplicito
 - output della coppia t, u

fine ciclo for

fine main

Schema di lavoro in Matlab (o Octave)

Definire la soluzione esatta

Caricare il file contenente i dati forniti dal programma in C++

X = load(nome_file) carica nella variabile X il contenuto del file nome_file; nel nostro caso una matrice di N+1 righe e d colonne; colonna 1 vettore dei tempi, colonna 2 fino a d+1 vettori dei valori della soluzione approssimata;

Calcolare la soluzione esatta nei valori di X(:,1)

Eseguire nella stessa finestra il grafico di soluzione esatta ed approssimata

Calcolare 3 tipi di errore (in norma 2)

dopo un solo passo

al tempo finale

massimo tra tutti gli istanti temporali

Prove numeriche

Esercizio 2.1

Utilizzare i dati del Problema 1.2 contenuto nel file alcuni problemi di Cauchy (caso scalare). Eseguire prove per $N = 10, 100, 1000, 10000, \dots$ Con i valori dell'errore compilare (a mano!) una tabella del tipo

N	Errore al primo passo	Errore finale	Errore massimo tra i passi
10			
100			
1000			
10000			

Dai dati in tabella dedurre l'ordine di infinitesimo, rispetto a tau, con cui gli errori tendono a zero.

Eseguire, per ogni valore di N, il grafico sovrapposto di soluzione esatta ed approssimata e verificare come, al crescere di N, i due grafici tendano a sovrapporsi.

Ripetere l'esercizio utilizzando i dati del Problema 1.5.

Esercizio 2.2

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_1' = -u_2 \\ u_2' = u_1 \\ u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

la cui soluzione è

$$u_1 = \cos(t)$$

$$u_2 = \sin(t)$$

Approssimare il sistema di equazioni con il metodo Eulero Esplicito. Eseguire prove per $N = 100, 1000, 10000$. Calcolare con Matlab l'errore finale (in norma 2) e osservare come esso tenda a zero al crescere di N . Per ogni valore di N fare un grafico sovrapposto di soluzione esatta e approssimata per ognuna delle due componenti.