Laboratorio 5

Obiettivi

1) Rapporto tra consistenza e regolarità.

2) Stimare l'errore finale oppure l'ordine p di un metodo usando la proprietà:

$$| U_N(T) – U_{2N}(T)| * 2^p/ (2^p-1) \sim | u(T) – U_N(T) |= O(N^{-p})$$

dove $U_N(T)$ e $U_{2N}(T)|$ sono le soluzioni approssimate al tempo T ottenute rispettivamente con un passo τ e un passo $\tau/2$ (ovvero con N passi e 2N passi)

Esercizio 5.1

Approssimare il seguente problema:

$$\begin{cases} u' = t^q u, \quad t \in (0,1) \\ u(1) = e^{1/(q+1)} \end{cases}$$

dove q > -1, la cui soluzione è $u(t) = \exp\left(\frac{t^{q+1}}{q+1}\right)$,

con i metodi di Eulero Esplicito e di Eulero Modificato:

$$U_{n+1} = U_n + \tau\, f(t_n + \tau/2 \,,\, U_n + (\tau/2)\, f(t_n \,,\, U_n)),$$

per $N = 10^k$, k = 1, 2, 3, 4.

Utilizzando la tabella degli errori finali stimare l'ordine dei due metodi nei casi q = -0.5 e 0.1. Confrontando i risultati con quanto ottenuto nell'Esercizio 4.1 darne una giustificazione teorica.

Esercizio 5.2

Dato il problema 1.2 (vedi **alcuni problemi di Cauchy (caso scalare)**) approssimarlo con il metodo di Heun:

$$U_{n+1} = U_n + (\tau/2)[\, f(t_n , U_n) + f(t_n+ \tau , U_n+ \tau f(t_n , U_n))]$$

Confrontare l'errore finale vero e la stima $|\, U_N(T) - U_{2N}(T)|$ verificando che entrambi siano infinitesimi dello stesso ordine rispetto a 1/N e dedurre dall'errore stimato l'ordine p del metodo.

A tale scopo compilare la seguente tabella:

N	$\|u(T) - U_N(T)\|$	$\|U_N(T) - U_{2N}(T)\|$
100		
200		
400		
800		