Laboratorio 6

Obiettivi

Approssimare il problema di Cauchy per un SISTEMA di E.D.O.:

$f: \Re^{d+1} \longrightarrow \Re^{d}$

$u'(t) = f(t,u(t)), \quad t_0 \le t \le T, \quad u(t) \in \Re^d$

$u(t_0) = v, \quad v \in \Re^d$

con un metodo **Runge – Kutta esplicito**

$$U_{n+1} = U_n + \tau \sum_{i=1}^{s} b_i K_i \ ,$$

$$K_i = f\left(t_n + c_i \tau , U_n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j \right)$$

Consigli/Osservazioni :

- utilizzare una funzione (vedi la funzione set_Runge_Kutta allegata) che abbia il compito di definire i parametri del metodo Runge-Kutta che si vuole utilizzare in modo che tutto il resto del lavoro funzioni per qualsiasi metodo Runge-Kutta esplicito;
- utilizzare una matrice **K** con **s** (numero degli stadi) righe e **d** (dimensione del sistema) colonne per memorizzare i K_i (conviene memorizzare le diverse componenti di ogni K_i lungo la riga della matrice, sarà più facile passare la riga alla funzione **effe**)

  Se **K** è stata costruita come sopra indicato,

  effe è la funzione che calcola la **f** che definisce il problema differenziale

  effe(K[i], t, Z)

  calcola f in (t, Z) e la memorizza nella riga i-esima di **K.**

- se tutti i K_i sono memorizzati nella matrice **K** definita al punto precedente, la sommatoria $\sum_{i=1}^{s} b_i K_i$ non è altro che il prodotto (vettore-riga) x matrice: b***K**
- $K_1 = f(t_n, U_n)$ è memorizzato nella prima riga di **K** e si calcola con effe(K[0], t, u).
- per gli indici successivi, per calcolare K_i devo costruire $U_n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j$.

  La sommatoria $V = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j$ si realizza tramite il prodotto (vettore-riga) x matrice:

  V = A[i]***K**

  dove si sia specificato che A[i] è un vettore di **1** riga e **i** colonne e **K** una matrice di **i** righe e **d** colonne.

Esercizio 6.1

Per una **prima verifica del buon funzionamento del programma realizzato**, confrontare i risultati ottenuti sul problema test

$$\begin{cases} u_1' = -u_2 \\ u_2' = u_1 \\ u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi],$$

la cui soluzione è $u_1(t) = \cos(t)$, $u_2(t) = \sin(t)$, dal metodo di Eulero Esplicito implementato nel Lab2 e dallo stesso metodo implementato come metodo Runge-Kutta esplicito a 1 stadio.

Come **seconda verifica** controllare, sempre sul medesimo problema test, che il metodo Runge-Kutta 4 si comporti effettivamente come un metodo di ordine 4 (calcolare la norma 2 della differenza tra soluzione esatta ed approssimata al tempo finale per $N = 10^k$, con k = 1, 2, 3, 4, 5) . Dare una giustificazione dei risultati per N = 100000.

Esercizio 6.2

Approssimare il problema di Van der Pol in ***alcuni problemi di Cauchy (sistemi)*** con $\varepsilon = 1$ sia con Eulero Esplicito che con Runge-Kutta 4.

Poiché la soluzione esatta non è nota, stimare l'errore finale come norma 2 della differenza tra punto iniziale e punto finale del ciclo limite. Compilare una tabella del tipo:

N	**Errore Eulero Esplicito**	**Errore Runge-Kutta 4**
100		
1000		
10000		
100000		

Ad ogni N fare un grafico della traiettoria del punto nel piano e verificare che, per N crescenti, tenda a chiudersi.

Confrontare, a parità di precisione raggiunta, il costo computazionale di un metodo di ordine 1 (Eulero Esplicito) e uno di ordine 4 (RK4).

Dare una giustificazione dei risultati per N = 100000.

Esercizio 6.3

Approssimare il problema

$$\begin{cases} u' = \sqrt[4]{t^5} \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 3],$$

con il metodo Runge-Kutta 4 per N = 10, 100, 1000, 10000. Calcolare l'errore finale. Fare una tabella dell'errore e giustificare i risultati.

Eseguire le stesse prove sul problema

$$\begin{cases} u' = 4t^3 \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 3],$$

Discutere i risultati.