

Laboratorio 7

Obiettivo: implementare l'estrapolazione di Richardson per

a) elevare l'ordine di un metodo a passo fisso;

b) stimare l'errore di consistenza

Estrapolazione di Richardson

Sia Φ un qualsiasi metodo Runge-Kutta esplicito di ordine p e sia U_n l'approssimazione ottenuta al tempo t_n . Se

$$\hat{U} = \Phi(t_n + \tau, t_n)U_n$$

$$U_{1/2} = \Phi(t_n + \tau/2, t_n)U_n$$

$$U_1 = \Phi(t_n + \tau, t_n + \tau/2)U_{1/2}$$

Allora

$$\|U_1 - \hat{U}\| / (2^p - 1) = O(\tau^{p+1}) \quad \text{stima l'errore di consistenza del metodo } \Phi$$

$$U_{n+1} = U_1 + (U_1 - \hat{U}) / (2^p - 1) \quad \text{è un metodo di ordine } p+1$$

Esercizio 7.1

Approssimare il problema

$$\begin{cases} u_1' = -u_2 \\ u_2' = u_1 \\ u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

la cui soluzione è $u_1(t) = \cos(t)$, $u_2(t) = \sin(t)$, con il metodo di Runge-Kutta 4 con estrapolazione di Richardson. Calcolare la norma 2 della differenza tra soluzione esatta ed approssimata al tempo finale per $N = 10^k$, con $k = 1, 2, 3$. Verificare che il metodo si comporti come un metodo del quinto ordine e confrontare i risultati con quelli ottenuti sullo stesso problema da Runge Kutta 4 semplice (vedi risultati Esercizio 6. 1).

Ad ogni istante temporale calcolare la norma 2 del fattore di correzione di Richardson

$$\|U_1 - \hat{U}\| / (2^p - 1) \quad \text{con } p \text{ ordine del metodo (in questo caso } p = 4)$$

calcolare il massimo tra tutti i passi e verificare che questo sia infinitesimo di ordine 5 rispetto a $1/N$. Compilare una tabella del tipo:

N	Errore finale RK4 puro	Errore finale RK4 con Richardson	$\ U_1 - \hat{U}\ / (2^4 - 1)$ massimo tra i passi
10			
100			
1000			

Esercizio 7.2

Approssimare il problema di Van der Pol in [alcuni problemi di Cauchy \(sistemi\)](#) con $\varepsilon = 1$ con il metodo di estrapolazione di Richardson dove Φ sia Heun.

Come nell'esercizio precedente compilare una tabella del tipo

N	Errore finale Heun puro	Errore finale Heun con Richardson	$\ U_1 - \hat{U}\ / (2^2-1)$ massimo tra i passi
10			
100			
1000			

Verificare l'aumento dell'ordine.

Esercizio 7.3

Approssimare il problema Terra-Luna-satellite in [alcuni problemi di Cauchy \(sistemi\)](#) con Heun associato a Richardson. Visualizzare in Matlab le soluzioni numeriche nel piano (u_1, u_2) : l'orbita del satellite si deve chiudere. Stimare l'errore con la norma 2 della differenza tra il dato iniziale e il punto finale.

Eeguire prove numeriche e compilare una tabella del tipo:

N	Errore finale Heun con Richardson	$\ U_1 - \hat{U}\ / (2^2-1)$ massimo tra i passi
100		
1000		
10000		
100000		
1000000		

N.B. eseguire il grafico con Matlab - con conseguente scrittura su file dei passi temporali - SOLO per N = 100, 1000, 10000, 100000 (il caso N = 1000000 risulterebbe troppo oneroso, commentare la scrittura su file)