Metodi Multi – Step Impliciti

Assegnati i due polinomi caratteristici di grado k

$$\rho = \sum_{i=0}^{k} \rho_i x^{k-i} \quad , \qquad \sigma = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i x^{k-i} \quad ,$$

un metodo **Multi – Passo a k passi implicito con τ fisso** si scrive:

$$\sum_{i=0}^{k} \rho_i U_{n-i} = \tau \sum_{i=0}^{k} \sigma_i f_{n-i}$$

dove si è posto $f_i = f(t_i , U_i)$ con $\sigma_0 \neq 0$

Una volta normalizzati i coefficienti, posso riscrivere il metodo come:

$$U_n = +\tau \tilde{\sigma}_0 f_n - \sum_{i=1}^{k} \tilde{\rho}_i U_{n-i} + \tau \sum_{i=1}^{k} \tilde{\sigma}_i f_{n-i}$$

dove il termine $V = -\sum_{i=1}^{k} \tilde{\rho}_i U_{n-i} + \tau \sum_{i=1}^{k} \tilde{\sigma}_i f_{n-i}$ è noto e coincide con quanto già calcolato nel metodo esplicito.

Posto il termine incognito $U_n = X$ si tratta di risolvere, ad ogni passo temporale, il problema non lineare in **d** equazioni e **d** incognite:

$$\mathcal{F}(X) = X - \tau \tilde{\sigma}_0 \, f(t_n, X) - V = 0$$

Ricordiamo il metodo di Newton semplificato:

Posto in questo caso $\mathbf{X}^{(0)} = V$,

costruito e fattorizzato $\mathbf{J}_{\mathcal{F}}(\mathbf{X}^{(0)}) = \mathbf{I} - \tau \tilde{\sigma}_0 \, \mathbf{J}_f(\mathbf{t}_n, \mathbf{X}^{(0)})$ (J_f jacobiano della f(t,u) che definisce il problema)

si itera

$$J_{\mathcal{F}}(X^{(0)}) \, d^{(k)} = -\mathcal{F}(X^{(k)})$$

$$X^{(k+1)} = d^{(k)} + X^{(k)}$$

fino a che $\| d^{(k)} \| < toll$