SISTEMI di E.D.O – ESEMPI

Esempio 1 – Sistema di Van der Pol

Da un progetto d'esame:

14.1. **Approssimando un ciclo limite.** Considerare il problema ai valori iniziali per l'equazione di Van der Pol

$$u_1' = u_2 \qquad u_1(0) = u_1,$$
$$u_2' = \epsilon(1 - u_1^2)u_2 - u_1 \qquad u_2(0) = u_2,$$

per

$$\epsilon = 1, \quad u_1 = 2.00861986087484313650940188, \quad u_2 = 0.$$

$$T = 6.6632868593231301896996820305.$$

Considerare anche il set di dati alternativo:

$\varepsilon = 10$, $u_1 = 2$, $u_2 = 0$, $T = 30$

Esempio 2 – Sistema di Lorenz

Lorenz formulò un problema ai valori iniziali della forma u' = f(u) con f : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, in componenti:

$$\begin{cases} u_1' = -10u_1 + 10u_2 \\ u_2' = 28u_1 - u_2 - u_1u_3 \\ u_3' = -\dfrac{8}{3}u_3 + u_1u_2 \\ u_1(0) = u_{01}, u_2(0) = u_{02}, u_3(0) = u_{03} \end{cases}$$

la cui soluzione è estremamente sensibile alle perturbazioni dei dati iniziali. Soluzioni corrispondenti a dati iniziali molto vicini restano unite per un certo periodo per poi separarsi sensibilmente. Il sistema di Lorenz è difficile da approssimare in modo accurato per tempi che superino le 30 unità.

Il sistema ha 3 punti di equilibrio in cui f(u) = 0:

u = (0,0,0), u = $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$.

Il punto (0, 0, 0) è di equilibrio instabille poiché in esso lo Jacobiano di f ha un autovalore positivo (instabile) e due negativi (stabili).

I punti $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$ sono leggermente instabili perché in essi lo Jacobiano di f ha un autovalore negativo e due autovalori complessi coniugati con una parte reale positiva molto piccola; in particolare $\lambda_1 \approx -13.9$, $\lambda_{2,3} \approx 0.0939 \pm 10.1\, i$

Questo dà origine alle caratteristiche traiettorie del sistema: girano alternativamente intorno ai due punti di equilibrio che si comportano come due "attrattori".

Approssimare il sistema con il metodo di Eulero Esplicito per $T = 30$ e N = 3000.

Considerare diversi valori iniziali: per esempio (ma potete sceglierne altri)

(1, 0, 0)
(1, 0.1, 0)
(1.1,0 ,0)
(1, -0.1, - 0.01)

Stampare a video le coordinate del punto finale e vedere come le distanze relative tra i punti finali siano molto più grandi di quelle tra i punti iniziali. Visualizzare con Matlab diverse traiettorie sullo stesso grafico con colori diversi per verificare come all'inizio unite, esse si separino sensibilmente.

Esempio 3 – ovvero i pericoli della linearizzazione (quando il sistema linearizzato localmente NON si comporta come quello originale)

Approssimare il sistema

$$\begin{cases} u_1' = u_2 - (u_1)^3 \\ u_2' = -u_1 \\ u_1(0) = v_1 \\ u_2(0) = v_2 \end{cases} \qquad t \in [0, 20], \quad N = 2000$$

Provare con diversi valori iniziali in un intorno dell'origine. Interpretare le componenti della soluzione come coordinate di punti nel piano. Sovrapporre sullo stesso grafico le traiettorie ottenute. Dedurre dal disegno il comportamento del sistema.

Linearizzare il sistema in un intorno dell'origine. Si ottiene un sistema noto la cui soluzione esatta NON si comporta come quella del sistema originale.

Esempio 4 – Terra Luna satellite (vecchio progetto d'esame)

Le equazioni del moto di un satellite intorno al sistema terra-luna sono

$$u_1'' = u_1 + 2u_2' - \hat{\mu}\frac{u_1 + \mu}{N_1} - \mu\frac{u_1 - \hat{\mu}}{N_2},$$
$$u_2'' = u_2 - 2u_1' - \hat{\mu}\frac{u_2}{N_1} - \mu\frac{u_2}{N_2}$$

con le abbreviazioni

$$N_1 = \left[(u_1 + \mu)^2 + u_2^2\right]^{3/2}, \qquad N_2 = \left[(u_1 - \hat{\mu})^2 + u_2^2\right]^{3/2}$$

e i dati

$$\mu = 0.012277471, \qquad \hat{\mu} = 1 - \mu.$$

approssimare il problema per i seguenti dati iniziali:

$$u_1(0) = 0.994, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = -2.0015851064$$

il tempo finale $T = 17.06521656$.

Visualizzare in Matlab le soluzioni numeriche nel piano (u_1 , u_2) e interpretarle.

L'orbita del satellite si deve chiudere. A seconda del metodo utilizzato questo potrebbe richiedere un numero di passi molto alto.