Metodi Runge – Kutta diagonalmente impliciti a passo fisso

$$U_{n+1} = U_n + \tau F(t_n, U_n, \tau),$$

$$F(t,u,\tau) = \sum_{i=1}^{s} b_i K_i(t,u)$$

$$K_i = f\left(t + c_i\tau,\ u + \tau\sum_{j=1}^{i} a_{ij}K_j \right)$$

N.B. l'indice j arriva fino a i quindi A matrice triangolare inferiore con diagonale non nulla.

Riscrivo per esteso i K_i

$$K_1 = f(t_n + c_1\tau, U_n + \tau a_{11}K_1)$$ incognita vettore K_1, risolvo con Newton

$$K_2 = f(t_n + c_2\tau, U_n + \tau a_{21}K_1 + \tau a_{22}K_2)$$ incognita solo vettore K_2, risolvo con Newton

$$K_3 = f(t_n + c_3\tau, U_n + \tau\sum_{j=1}^{2} a_{3j}K_j + \tau a_{33}K_3)$$ incognita solo vettore K_3, risolvo con Newton

……

$$K_s = f(t_n + c_s\tau, U_n + \tau\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}K_j + \tau a_{ss}K_s)$$ incognita solo vettore K_s, risolvo con Newton

Risolvendo il sistema con uno schema di tipo "sostituzione in avanti", partendo dall'alto, ogni equazione dipende da un solo vettore incognito.

Nello schema si è messa in evidenza la parte $\tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}K_j$ nota in quanto i K_j, avendo tutti indice inferiore a i, sono già stati calcolati, e la parte $\tau a_{ii}K_i$ che contiene il vettore incognito

Per ogni i, posto $K_i = X$, si tratta di risolvere un sistema di equazioni non lineari di incognita X:

$$F(X) = X - f(t_n + c_i\tau, U_n + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}K_j + \tau a_{ii}X) = 0$$

applicando il metodo di Newton vettoriale:

dato $X^{(0)}$,

$J_F(X^{(0)})\, d^{(k)} = -F(X^{(k)})$,

$X^{(k+1)} = d^{(k)} + X^{(k)}$

Dove: $J_F(X) = I - \tau a_{ii} J_f(t_n + c_i\tau,\ U_n + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}K_j + \tau a_{ii}X)$ con

- I matrice identità della stessa dimensione del sistema di EDO

- J_f matrice Jacobiana di f rispetto a u
- $X^{(0)} = f(t_n + c_i\tau, U_n + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}K_j)$

Schema di lavoro per l'implementazione del metodo

Suggerimento: associare allo schema di Butcher del metodo un vettore di interi Ind che segnali quali valori diagonali di A siano diversi da zero, quindi quali K_i siano effettivamente definiti in modo implicito: ad esempio Ind[i] = 0 se $a_{ii} = 0$, Ind[i] = 1 altrimenti.

n = 0,1, …,N-1 (ciclo sul tempo)

for i = 1,...numero degli stadi (calcolo K_i)

calcolo la parte nota $Nota = U_n + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}K_j$

$X^{(0)} = f(t_n + c_i\tau, Nota)$

k=0; (conta il numero di iterazioni di Newton)

TEST : se $a_{ii} \neq 0$ (ossia se Ind[i] == 1)

calcolo lo Jacobiano $A = I - \tau a_{ii} J_f(t_n + c_i\tau, Nota + \tau a_{ii} X)$

fattorizzo A

do (itero Newton)

costruzione del termine noto del sistema lineare $A\,\delta^{(k)} = -F(X^{(k)})$,

ossia: $-F(X^{(k)}) = f(t_n + c_i\tau, Nota + \tau a_{ii} X^{(k)}) - X^{(k)}$

risoluzione del sistema lineare

$X^{(k+1)} = \delta^{(k)} + X^{(k)}$

k=k+1;

while ($\|\delta^{(k)}\|$ > toll and k < k_{max})

end if

assegno $K_i = X^{(k)}$

end i

calcolo U_{n+1}

$t = t + \tau$

eventuali stampe

end n