Fattorizzazione LU

Come è noto la triangolazione di Gauss con pivoting parziale fornisce una fattorizzazione della matrice:

$$PA = L\,U$$

dove P è la matrice di permutazione delle righe, U è la triangolare superiore di Gauss, mentre L è la matrice triangolare inferiore dei moltiplicatori a cui si sia sommata la matrice identità.

La fattorizzazione si costruisce utilizzando le formule dell'eliminazione gaussiana senza trattamento del termine noto, memorizzando i moltiplicatori al posto dell'elemento che hanno annullato e tenendo traccia degli scambi di righe. A fine algoritmo la matrice A conterrà nella sua parte superiore la U e nella sua parte inferiore la L.

Di seguito lo schema dell'algoritmo:

Inizializzo con gli interi da 1 a N un vettore che memorizza gli scambi di righe:

k = 1, ..., N

  P(k) = k

end k

Ciclo sulle colonne

k = 1, ..., N – 1

- **cerco il max in modulo tra gli $a_{ik}^{(k)}$ per i = k, k+1, …, N, sia ipiv il suo indice di riga**
- **scambio tutta la riga k-esima con tutta la riga ipiv-esima**
- **scambio P(k) con P(ipiv)**
- **eseguo l'eliminazione della K-esima colonna:**

  i = k + 1, ..., N

    $m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$

    $a_{ik}^{(k+1)} = m_{ik}$

    j = k + 1, ..., N

      $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}$

    end j

  end i

end k

Sostituzione in avanti e all'indietro

Se A è stata fattorizzata con l'algoritmo precedente, la risoluzione del sistema lineare

Ax = b   equivale a   PA x =Pb   ovvero   LU x = Pb

che richiede la risoluzione di due sistemi triangolari:

Ly = Pb,   NB il calcolo di Pb non richiede una moltiplica matrice-vettore ma solo che b sia "riordinato"secondo gli scambi di righe effettuati durante la fattorizzazione

Ux = y

Ricordando che L e U sono state memorizzate sulla stessa A, evitando di utilizzare vettori inutili, l'algoritmo si scrive nel modo seguente:

Riordino gli elementi di b, memorizzandoli in x, secondo gli scambi contenuti in P:

k = 1, ..., N

$$x_k = b_{P_k}$$

end k

sostituzione in avanti (gli elementi sulla diagonale principale sono tutti uguali a 1)

k = 2, ..., N

$$x_k = x_k - (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk-1}x_{k-1})$$

end k

sostituzione all'indietro

$$x_N = x_N / a_{NN}$$

k= N-1, N-2, …,1

$$x_k = [x_k - (a_{kk+1}x_{k+1} + a_{kk+2}x_{k+2} + \ldots + a_{kN}x_N)] / a_{kk}$$

end k