Problemi d'esame di **Calcolo Numerico 2**

a.a. 2014/2015

Per ogni progetto fare attenzione in particolare ai seguenti punti:

- testare la correttezza della propria implementazione e documentarla brevemente nella relazione, e
- ove possibile, valutare la compabilità dei risultati numerici con quelli teorici.

La consegna corretta del progetto consiste in

- un file di formato pdf contenente la relazione (max. cinque pagine),
- un archivio di formato zip contenente i codici (ad esempio, nel caso di `codeblocks` la cartella associata al progetto corredata da tutte le funzioni).

Per ulteriore informazioni consultare le modalità d'esame sulla homepage del corso `users.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html`.

---

1. Reazione di Belousov-Zhabotinsky. Il sistema

$$\begin{aligned} u_1' &= 77.27\Big(u_2 + (1 - 8.375 \cdot 10^{-6} u_1 - u_2)u_1\Big) \\ u_2' &= \frac{1}{77.27}\Big(u_3 - (1 + u_1)u_2\Big) \\ u_3' &= 0.161(u_1 - u_3), \end{aligned}$$

detto oregonatore, è un modello per la reazione di Belousov-Zhabotinsky e ha per

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 2, \quad u_3(0) = 3$$

una soluzione periodica. Scegliere un opportuno metodo numerico per ottenere delle approssimazioni per $u(t)$ con $t = 30, 60, 90, \ldots, 360$.

2. Terra-luna-satellite. Le equazioni di moto di un satellite intorno del sistema terra-luna sono

$$\begin{aligned} u_1'' &= u_1 + 2u_2' - \hat{\mu}\frac{u_1 + \mu}{N_1} - \mu\frac{u_1 - \hat{\mu}}{N_2}, \\ u_2'' &= u_2 - 2u_1' - \hat{\mu}\frac{u_2}{N_1} - \mu\frac{u_2}{N_2} \end{aligned}$$

con le abbreviazioni

$$N_1 = \big[(u_1 + \mu)^2 + u_2^2\big]^{3/2}, \qquad N_2 = \big[(u_1 - \hat{\mu})^2 + u_2^2\big]^{3/2}$$

e i dati

$$\mu = 0.012277471, \qquad \hat{\mu} = 1 - \mu.$$

Applicare i metodi

- Runge-Kutta classico di ordine 4 (RK4)
- il metodo risultante dall'applicazione dell'estrapolazione di Richardson su RK4

per

$$u_1(0) = 0.994, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = -2.001585106$$

e il tempo finale $T = 17.0652166$.

Verificare l'aumento dell'ordine, supponendo che la traiettoria esatta si chiuda. Inoltre valutare in questa situazione l'eventuale vantaggio della variante adattiva del secondo metodo.

3. Studio dei BDF. Applicare le quattro backward differential formulae date da

$$\begin{aligned}
\rho_1(\zeta) &= \zeta - 1, \\
\rho_2(\zeta) &= \frac{3}{2}\zeta^2 - 2\zeta + \frac{1}{2}, \\
\rho_3(\zeta) &= \frac{11}{6}\zeta^3 - 3\zeta^2 + \frac{3}{2}\zeta - \frac{1}{3}, \\
\rho_4(\zeta) &= \frac{25}{12}\zeta^4 - 4\zeta^3 + 3\zeta^2 - \frac{4}{3}\zeta + \frac{1}{4}, \\
\sigma_k(\zeta) &= \zeta^k \quad (k = 1, \dots, 6)
\end{aligned}$$

ai problemi

$$u' = -u^2, \qquad u(0) = 1$$

e

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'ordine di consistenza e valutare l'adeguatezza per i problemi proposti di ognuna delle quattro formule.

4. Rotazione di un corpo rigido. Le equazioni di Eulero

$$\begin{aligned}
I_1 u_1' &= (I_2 - I_3) u_2 u_3 \\
I_2 u_2' &= (I_3 - I_1) u_3 u_1 \\
I_3 u_3' &= (I_1 - I_2) u_1 u_2 + f
\end{aligned}$$

descrivono la rotazione di un corpo rigido, dove u_1, u_2, u_3 sono le coordinate del vettore di rotazione e I_1, I_2, I_3 i momenti d'inerzia principali. La terza componente ha una forza esterna

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin^2 t, & \text{se } 3\pi \le t \le 4\pi \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Considerare il caso in cui

$$I_1 = 0.5, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = 3, \quad u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = 0.9$$

e indagare l'accuratezza delle approssimazioni di $u(10)$ e $u(20)$ per due metodi numerici a scelta, ma di ordine di consistenza diverso.

Informazioni:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento