

---

## Problemi d'esame di **Calcolo Numerico 2**

year 2016/17 – validi fino a Giugno 2018

---

Per ogni progetto fare attenzione in particolare ai seguenti punti:

- Testare la correttezza della propria implementazione e documentarla brevemente nella relazione.
- Ove possibile, valutare la compatibilità dei risultati numerici con quelli teorici.

La consegna corretta del progetto consiste in una email indirizzata a `andreas.veeser@unimi.it` e `nicoletta.bressan@unimi.it` contenente:

- Un file di formato pdf contenente la relazione (max. cinque pagine).
- Un archivio di formato zip contenente i codici in C (ad esempio, nel caso di `codeblocks`, la cartella associata al progetto corredata da tutte le funzioni, ma senza eseguibili); allegati con eseguibili non vengono accettati dalla protezione antivirus dell'Unimi.

Bisogna presentarsi all'esame orale con una copia cartacea della relazione. Per ulteriori informazioni consultare le modalità d'esame sulla homepage del corso

[www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnm2.html](http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnm2.html).

---

1. **Una reazione chimica.** Considerare il sistema

$$\begin{aligned}u_1' &= -Au_1 - Bu_1u_3 \\u_2' &= Au_1 - MCu_2u_3 \\u_3' &= Au_1 - Bu_1u_3 - MCu_2u_3 + Cu_4 \\u_4' &= Bu_1u_3 - Cu_4,\end{aligned}$$

con le costanti

$$A = 7.89 \cdot 10^{-10}, \quad B = 1.1 \cdot 10^7, \quad C = 1.13 \cdot 10^3, \quad M = 10^6$$

e i valori iniziali

$$u_1(0) = 1.76 \cdot 10^{-3}, \quad u_2(0) = u_3(0) = u_4(0) = 0.$$

Scegliere un metodo per seguire l'andamento di  $u_1, u_2, u_3, u_4$  nel periodo  $[10, 10^{10}]$ , visualizzando i relativi grafici in scala log-log. Inoltre produrre delle approssimazioni per  $u(t)$  per i tempi  $t = 10, 10^5, 10^9$ .

2. **Modello di Lorenz-Saltzman.** Considerare le equazioni di Lorenz-Saltzman

$$\begin{aligned}u_1' &= -\sigma u_1 + \sigma u_2, \\u_2' &= -u_1 u_3 - r u_1 - u_2, \\u_3' &= u_1 u_2 - b u_3\end{aligned}$$

con le costanti

$$\sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3}.$$

Si vuole approssimare  $u(16)$  e  $u(32)$  numericamente per i valori iniziali

$$u_1(0) = -8, \quad u_2(0) = 8, \quad u_3(0) = 27.$$

A questo scopo applicare un opportuno metodo e giudicare l'affidabilità delle approssimazioni.

3. **Determinare il passo corrispondente ad una accuratezza quasi-ottimale.** Considerare l'applicazione del metodo

$$\rho(E)U_n = \tau\sigma(E)F_n$$

con

$$\begin{aligned}\rho(\zeta) &= \frac{49}{20}\zeta^6 - 6\zeta^5 + \frac{15}{2}\zeta^4 - \frac{20}{3}\zeta^3 + \frac{15}{4}\zeta^2 - \frac{6}{5}\zeta + \frac{1}{6}, \\ \sigma(\zeta) &= \zeta^6\end{aligned}$$

al problema

$$u' = t^2 + u^2, \quad u(0) = 0,$$

facendo attenzione all'accuratezza con cui viene risolto il problema non lineare per l'avanzamento in tempo. Determinare approssimativamente il passo che restituisce per la vostra implementazione la soluzione più accurata su  $[0, 1]$ .

4. **Rotazione di un corpo rigido.** Le equazioni di Eulero

$$\begin{aligned}I_1 u_1' &= (I_2 - I_3)u_2 u_3 \\ I_2 u_2' &= (I_3 - I_1)u_3 u_1 \\ I_3 u_3' &= (I_1 - I_2)u_1 u_2 + f\end{aligned}$$

descrivono la rotazione di un corpo rigido, dove  $u_1, u_2, u_3$  sono le coordinate del vettore di rotazione e  $I_1, I_2, I_3$  i momenti d'inerzia principali. La terza componente ha una forza esterna

$$f(t) = \begin{cases} 4^k \sin^2 t, & \text{se } 3\pi \leq t \leq 4\pi, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ . Considerare il caso in cui

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.5, & I_2 &= 2, & I_3 &= 3, \\ u_1(0) &= 1, & u_2(0) &= 0, & u_3(0) &= 0.9, \\ k &\in \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

e indagare l'accuratezza delle approssimazioni di  $u(10)$  e  $u(20)$  per due metodi numerici adeguati, ma di ordine di consistenza diverso.

---

INFORMAZIONI:

Homepage del corso:

<http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calctnum2.html>

Prof. A. Veeser

Studio: 2051 (nel "sottotetto")

Telefono: 02.503.16186

E-mail: [andreas.veeser@unimi.it](mailto:andreas.veeser@unimi.it)

Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan

Studio: 1025

Telefono: 02.503.16133

E-mail: [nicoletta.bressan@unimi.it](mailto:nicoletta.bressan@unimi.it)

Orario di ricevimento: su appuntamento