Problemi d'esame di **Calcolo Numerico 2**

year 2017/18 – validi fino al primo appello di Giugno 2019

Per ogni progetto fare attenzione in particolare ai seguenti punti:

- Testare la correttezza della propria implementazione e documentarla brevemente nella relazione.
- Ove possibile, valutare la compabilità dei risultati numerici con quelli teorici.

La consegna corretta del progetto consiste in una email indirizzata a `andreas.veeser@unimi.it` e `nicoletta.bressan@unimi.it` contenente:

- Un file di formato pdf contenente la relazione (max. cinque pagine).
- Un archivio di formato zip contenente i codici in C (ad esempio, nel caso di `codeblocks`, la cartella associata al progetto corredata da tutte le funzioni, ma senza eseguibili); allegati con eseguibili non vengono accettati dalla protezione antivirus dell'Unimi.

Bisogna presentarsi all'esame orale con una copia cartacea della relazione. Per ulteriori informazioni consultare le modalità d'esame sulla homepage del corso

`www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html`.

---

1. **Una reazione chimica.** Considerare il sistema

$$\begin{aligned}
u_1' &= -Au_1 - Bu_1u_3 \\
u_2' &= Au_1 \qquad\qquad - MCu_2u_3 \\
u_3' &= Au_1 - Bu_1u_3 - MCu_2u_3 + Cu_4 \\
u_4' &= \qquad\quad Bu_1u_3 \qquad\qquad\quad - Cu_4,
\end{aligned}$$

con le costanti

$$A = 7.89 \cdot 10^{-10}, \quad B = 1.1 \cdot 10^7, \quad C = 1.13 \cdot 10^3, \quad M = 10^6$$

e i valori iniziali

$$u_1(0) = 1.76 \cdot 10^{-3}, \quad u_2(0) = u_3(0) = u_4(0) = 0.$$

Scegliere un metodo per seguire l'andamento di u_1, u_2, u_3, u_4 nel periodo $[10, 10^{10}]$, visualizzando i relativi grafici in scala log-log. Inoltre produrre delle approssimazioni per $u(t)$ per i tempi $t = 10, 10^5, 10^9$.

2. **Pleiadi nel piano.** Il sistema

$$x_i'' = \sum_{j\neq i} m_j(x_j - x_i)/r_{ij}, \quad y_i'' = \sum_{j\neq i} m_j(y_j - y_i)/r_{ij}$$

descrive il movimento di sette stelle con coordinate planari x_i, y_i, masse $m_i = i$ e

$$r_{ij} = \left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right)^{3/2}, \quad i, j = 1, \ldots, 7.$$

Considerare le condizioni iniziali

$$\begin{array}{cccc} x_1(0) = 3, & x_2(0) = 3, & x_3(0) = -1, & x_4(0) = -3, \\ x_5(0) = 2, & x_6(0) = -2, & x_7(0) = 2, & \\ y_1(0) = 3, & y_2(0) = -3, & y_3(0) = 2, & y_4(0) = 0, \\ y_5(0) = 0, & y_6(0) = -4, & y_7(0) = 4, & \end{array}$$

e

$$x_i'(0) = y_i'(0) = 0$$

per $i = 1, \ldots, 7$, con le eccezioni

$$x_6'(0) = 1.75, \quad x_7'(0) = -1.5, \quad y_4'(0) = -1.25, \quad y_5'(0) = 1.$$

Scegliere un metodo numerico opportuno e determinare la quasi-collisione più stretta (nel senso di r_{ij}^2) nell'intervallo temporale $[0, 3]$.

3. **Determinare il passo corrispondente ad una accuratezza quasi-ottimale.** Considerare l'applicazione del metodo

$$\rho(E)U_n = \tau\sigma(E)F_n$$

con

$$\begin{gathered} \rho(\zeta) = \tfrac{49}{20}\zeta^6 - 6\zeta^5 + \tfrac{15}{2}\zeta^4 - \tfrac{20}{3}\zeta^3 + \tfrac{15}{4}\zeta^2 - \tfrac{6}{5}\zeta + \tfrac{1}{6}, \\ \sigma(\zeta) = \zeta^6 \end{gathered}$$

al problema

$$u' = t^2 + u^2, \qquad u(0) = 0,$$

facendo attenzione all'accuratezza con cui viene risolto il problema non lineare per l'avanzamento in tempo. Determinare approssimativamente il passo che restituisce per la vostra implementazione la soluzione più accurata su $[0, 1]$.

4. **Rotazione di un corpo rigido.** Le equazioni di Eulero

$$\begin{aligned} I_1 u_1' &= (I_2 - I_3)u_2 u_3 \\ I_2 u_2' &= (I_3 - I_1)u_3 u_1 \\ I_3 u_3' &= (I_1 - I_2)u_1 u_2 + f \end{aligned}$$

descrivono la rotazione di un corpo rigido, dove u_1, u_2, u_3 sono le coordinate del vettore di rotazione e I_1, I_2, I_3 i momenti d'inerzia principali. La terza componente ha una forza esterna

$$f(t) = \begin{cases} 4^k \sin^2 t, & \text{se } 3\pi \leq t \leq 4\pi, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Considerare il caso in cui

$$I_1 = 0.5, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = 3,$$
$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = 0.9,$$
$$k \in \{0, 3\}$$

e indagare l'accuratezza delle approssimazioni di $u(10)$ e $u(20)$ per due metodi numerici adeguati, ma di ordine di consistenza diverso.

Informazioni:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30 o su appuntamento

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1025
Telefono: 02.503.16133
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento