

## Capitolo 2

# Le equazioni di Hamilton e lo spazio delle fasi

### 2.1 Introduzione

Con il passaggio dalle equazioni di Newton (1687) a quelle di Lagrange (1787), abbiamo già ottenuto un progresso considerevole, perché tali equazioni si ottengono con un procedimento di derivazione a partire da una unica funzione scalare, la Lagrangiana  $L$ , e inoltre le equazioni hanno la medesima struttura, quale che sia la scelta delle coordinate. Queste due circostanze si rifletteranno poi, come vedremo nel prossimo capitolo, nel fatto che i movimenti naturali soddisfano un principio di minimo (meglio, di stazionarietà) di un certo funzionale che si esprime proprio attraverso la lagrangiana, ovvero il funzionale d'azione  $S = \int L dt$  (principio di Hamilton).

Le equazioni di Hamilton (1833) costituiscono poi, dal punto di vista più elementare possibile, semplicemente una conveniente riscrittura delle equazioni di Lagrange come sistema di  $2n$  equazioni del primo ordine, con una scelta particolarmente significativa delle variabili (lo vedremo subito qui sotto). Tale riscrittura delle equazioni di moto risulta tuttavia essenziale per fondare la **meccanica statistica** e per fondare la **meccanica quantistica**. Infatti mostreremo che la compatibilità tra probabilità e dinamica, che costituisce uno dei problemi centrali della meccanica statistica, può essere formulata in maniera molto semplice in ambito hamiltoniano piuttosto che in ambito lagrangiano (si tratta del **teorema di Liouville**), e d'altra parte ricorderemo come le **regole di quantizzazione** (che esprimono il modo in cui si passa dalla meccanica classica a quella quantistica) vengono formulate facendo uso delle **parentesi di Poisson**, ovvero di una struttura algebrica sottostante le equazioni di Newton, che viene spontaneamente resa esplicita in ambito hamiltoniano. Infine, il formalismo hamiltoniano risulta partico-

larmente utile anche in ambito puramente meccanico, in relazione alla **teoria delle perturbazioni**, il cui sviluppo viene estremamente facilitato facendo uso della tecnica delle **trasformazioni canoniche**, che pure richiedono di disporre del formalismo hamiltoniano. Le trasformazioni canoniche, tra l'altro, vennero molto utilizzate anche nella prima formulazione della meccanica quantistica, soprattutto ad opera di Born e di Sommerfeld.

La trattazione viene qui svolta a un livello elementare, prendendo per modello quella del classico manuale di Landau e Lifshitz. Per una discussione più approfondita, che faccia uso sistematico delle forme differenziali, si rimanda ai corsi di *meccanica analitica*.

Nel paragrafo (2.2) vengono dedotte le equazioni di Hamilton, e viene dato un breve cenno alle loro applicazioni. Queste vengono poi discusse dettagliatamente nei successivi paragrafi. Precisamente: le parentesi di Poisson e la loro applicazioni alle regole di quantizzazione; le trasformazioni canoniche; la relazione tra simmetrie e leggi di conservazione; il teorema di Liouville e i fondamenti della meccanica statistica.

## 2.2 Deduzione delle equazioni di Hamilton. Cenno alle applicazioni

### 2.2.1 Il problema

Vediamo dunque in quale modo si introducono le equazioni di Hamilton sostanzialmente come una significativa riscrittura delle equazioni di Lagrange. Ammettiamo di avere un sistema meccanico ad  $n$  gradi di libertà con un suo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , e sia fissata una carta, ovvero un sistema di coordinate locali  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  in  $\mathcal{C}$ . Sia poi data una lagrangiana  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , sicché i movimenti naturali del sistema sono soluzioni delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.2.1)$$

che scriveremo anche nella forma compatta

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (2.2.2)$$

Ora, queste equazioni costituiscono un sistema di  $n$  equazioni del secondo ordine in forma normale, ovvero del tipo

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n) \quad (2.2.3)$$

cioè risolto rispetto alle derivate di ordine massimo. Ciò è ovvio nel caso tipico di una particella senza vincoli, in coordinate cartesiane, in cui l'equazione di Lagrange coincide con l'equazione di Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ , che è

proprio della forma (2.2.3) con  $\mathbf{q} = \mathbf{x}$ , e  $\mathbf{f} = \mathbf{F}/m$ . Ciò comunque risulta vero anche per i sistemi “naturali”, in cui cioè si ha  $L = T - V$ , differenza di energia cinetica ed energia potenziale (si veda l’appendice).

D’altra parte, abbiamo già ripetutamente osservato, fin dai richiami sull’equazione di Newton, che è conveniente interpretare l’equazione (2.2.3) come un sistema di equazioni del primo ordine (in forma normale) in uno spazio con un numero doppio ( $2n$ ) di variabili. Il motivo è che per una equazione del secondo ordine del tipo (2.2.3) ogni soluzione  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$  viene univocamente individuata dalla coppia  $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$  di dati iniziali (posizione e velocità). Dunque è spontaneo considerare, piuttosto che lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , lo spazio delle coppie  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , in cui le “posizioni”  $\mathbf{q}$  e le “velocità”  $\dot{\mathbf{q}}$  sono pensate come variabili indipendenti. Questo spazio viene detto “**spazio degli stati**”. In tal modo appare spontaneo studiare come si presenta il movimento in quello spazio, cioè studiare come evolvono, allo scorrere del tempo, i punti dello spazio degli stati, ovvero la coppia posizione e velocità:  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t)$ . L’utilità di questo punto di vista è ben illustrato dalla tecnica del “ritratto in fase” (cioè del “ritratto” nello spazio degli stati) che abbiamo impiegato per lo studio qualitativo dei sistemi monodimensionali, nel capitolo sulle equazioni di Lagrange.

L’ultima osservazione che resta da compiere ora è la seguente. Se si è deciso che sia opportuno raddoppiare il numero di variabili per passare a un numero doppio di equazioni del primo ordine, allora la forma delle equazioni di Lagrange suggerisce essa stessa una scelta diversa. Si tratta di prendere come variabili ausiliarie accanto alle “posizioni”  $\mathbf{q}$ , invece delle “velocità”  $\dot{\mathbf{q}}$ , le quantità  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  (dette *momenti coniugati* alle coordinate  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ) e definite da

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \text{ovvero} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.2.4)$$

perchè il vantaggio è che allora le equazioni di Lagrange assumono la forma particolarmente semplice (già in forma normale)

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \text{ovvero} \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.2.5)$$

Si introduce in tal modo, in luogo dello spazio degli stati (coppie  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ) il cosiddetto **spazio delle fasi** (coppie  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ). Denoteremo  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{x}$ ; le coordinate  $(x_1, \dots, x_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  vengono dette **coordinate canoniche**.

Resta però il problema se sia possibile scrivere il sistema completo stesso come un sistema in forma normale. cioè nella forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad \text{con } \mathbf{x} \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (2.2.6)$$

con un opportuno campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  in  $\mathbb{R}^{2n}$ . Si tratta di potere “invertire” rispetto alle  $\dot{\mathbf{q}}$  (pensando a  $\mathbf{q}, t$  come parametri) la relazione

(2.2.4) definente le  $\mathbf{p}$ , ottenendo le  $\dot{\mathbf{q}}$  in termini delle  $\mathbf{p}$ :

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) . \quad (2.2.7)$$

**Esempi.**

- Per una particella sulla retta (con  $x \equiv q$ ,  $\dot{x} \equiv \dot{q}$ ) è  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  e quindi (si osservi  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$ )

$$p = m\dot{x} ,$$

relazione che viene invertita immediatamente, fornendo

$$\dot{x} = p/m .$$

- Per una particella nel piano in coordinate polari (con  $q_1 \equiv r$ ,  $q_2 \equiv \varphi$ ), essendo

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) ,$$

si ha (con  $p_1 \equiv p_r$ ,  $p_2 \equiv p_\varphi$ )

$$p_r = m\dot{r} . \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$$

e quindi

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} , \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} .$$

La invertibilità tra  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\mathbf{p}$  in effetti è sempre garantita nel caso dei sistemi meccanici naturali, in cui la lagrangiana ha la forma  $L = T - V$ , con un'energia potenziale  $V$  che non dipende <sup>1</sup> da  $\dot{\mathbf{q}}$ . È questo un semplice esercizio, svolto in appendice. Più in generale, considerando anche il caso di funzioni lagrangiane generiche (cioè non del tipo <sup>2</sup>  $L = T - V$ ), ammetteremo che sia soddisfatta la **condizione di nondegenerazione**  $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$ , la quale garantisce che la definizione (2.2.4) dei momenti  $\mathbf{p}$  può essere invertita a fornire le  $\dot{\mathbf{q}}$  in termini delle  $\mathbf{p}$  (pensando a  $\mathbf{q}, t$  come parametri). Sostituendo queste ultime nelle equazioni di Lagrange scritte in termini delle  $\mathbf{p}$  (ovvero nelle (2.2.5)) si ottiene infine

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) . \quad (2.2.8)$$

Questa, congiunta con la relazione (2.2.7), fornisce infine la coppia di equazioni in forma normale per le  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t)$ , ovvero l'equazione in forma normale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  nello spazio delle fasi, con una ben definita espressione per il campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

**Esempio.** Particella sulla retta. L'equazione di moto del secondo ordine  $m\ddot{q} = -V'(q)$  (con  $q \equiv x$ ), quando si introduce il momento  $p = m\dot{q}$  diviene il seguente sistema di due equazioni del primo ordine in forma normale nello spazio delle fasi:

$$\begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = -V'(q) . \end{cases} \quad (2.2.9)$$

<sup>1</sup>Il caso della forza di Lorentz verrà studiato separatamente.

<sup>2</sup>L'utilità di questa generalizzazione si comprenderà studiando i principi variazionali.

## 2.2.2 Deduzione delle equazioni di Hamilton

Ma l'interesse principale per questo modo di procedere (cioè passare allo spazio delle fasi con coordinate  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  anziché allo spazio degli stati con coordinate  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ) consiste nel fatto che le  $2n$  equazioni così ottenute presentano una struttura molto particolare e simmetrica.

Questo è dovuto al fatto che da una parte abbiamo riscritto le equazioni di Lagrange in termini delle  $\mathbf{p}$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad \text{equivalente a} \quad \left( \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (2.2.10)$$

e d'altra parte si ha il seguente

**Lemma (trasformata di Legendre).** Si consideri una lagrangiana  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  nondegenere, ovvero con determinante hessiano (rispetto alle  $\dot{\mathbf{q}}$ ) non nullo:

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0. \quad (2.2.11)$$

Si definisca poi la funzione  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  come<sup>3</sup>

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \left[ \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right]_{\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)} \quad (2.2.12)$$

dove la funzione  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  è definita per inversione della

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}.$$

Allora si ha

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad \text{equivalente a} \quad \left( \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \right), \quad (2.2.13)$$

e inoltre  $\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$ .

La funzione  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  viene detta **funzione hamiltoniana** del sistema. Questo Lemma verrà dimostrato subito sotto, ed apparirà allora che la introduzione della funzione hamiltoniana è del tutto naturale quando si sia deciso di sostituire le variabili  $\dot{\mathbf{q}}$  con le variabili  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ . Si tratta del procedimento ben familiare in termodinamica, che corrisponde alla introduzione della cosiddetta **trasformata di Legendre** della lagrangiana  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Prima osserviamo che il virtù del Lemma e della (2.2.10) si ha immediatamente il

**Teorema (equazioni di Hamilton).** Data una lagrangiana  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  nondegenere (proprietà sempre garantita per i sistemi "naturali") le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

---

<sup>3</sup>Si denota  $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i$ .

sono equivalenti alle equazioni (di Hamilton)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

**Dimostrazione del Lemma.** Riportiamo anzitutto una dimostrazione banale, di tipo “*brute force*”, consistente semplicemente in una verifica diretta. Un procedimento più significativo verrà seguito subito sotto.

Osserviamo innanzitutto che, per l’ipotesi di nondegenerazione (2.2.11), l’inversione della relazione  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  che fornisce le “velocità”  $\dot{\mathbf{q}}$  in termini dei momenti  $\mathbf{p}$  è possibile, sicché l’hamiltoniana  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  risulta ben definita. Si fa poi uso di una proprietà elementare del differenziale,<sup>4</sup> secondo la quale nel differenziare una funzione composta si può procedere formalmente come se le variabili da cui essa dipende, a loro volta dipendenti da altre variabili, fossero invece indipendenti. Differenziando  $H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L$  si ha dunque

$$dH = \mathbf{p} \cdot d\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot d\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} dt ,$$

e i due termini proporzionali a  $d\dot{\mathbf{q}}$  si cancellano per la definizione stessa di  $\mathbf{p}$ . Si resta pertanto con

$$dH = \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \quad (2.2.15)$$

D’altra parte, pensando  $H$  come funzione di  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, t$ , per definizione di differenziale si ha

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial t} dt , \quad (2.2.16)$$

cosicché per confronto si ottiene

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} , \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \quad (2.2.17)$$

La dimostrazione sopra data costituisce in effetti una semplice verifica. Abbiamo verificato che è proprio vero che, introducendo l’hamiltoniana, si hanno le formule di equivalenza (2.2.13), e quindi le equazioni di Hamilton. Non abbiamo però spiegato da dove venga l’idea di introdurre proprio questa funzione  $H$ , come la si inventi. In realtà esiste un argomento generale che fa apparire questa scelta naturale, quando si sia deciso che, in luogo delle variabili  $\dot{\mathbf{q}}$ , si vogliono prendere come variabili indipendenti i momenti  $\mathbf{p}$ , legati alle  $\dot{\mathbf{q}}$  proprio dalla relazione  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ . La trasformata di Legendre viene ampiamente impiegata anche in termodinamica, nel passare ad esempio dall’energia interna  $U$  all’energia libera di Helmholtz  $F = U - TS$  e agli

<sup>4</sup>Tale proprietà è detta talvolta proprietà di *invarianza in forma* del differenziale primo.

altri “potenziali termodinamici”. Questi ed altri aspetti della trasformata di Legendre sono discussi in appendice.<sup>5</sup>

**Intermezzo: la trasformata di Legendre.** L’argomento generale cui ci riferiamo riguarda quella che si chiama la *trasformata di Legendre*, e consiste in questo: se è data una funzione  $f(x)$  e si vuole prendere come variabile indipendente, in luogo di  $x$ , la variabile<sup>6</sup>

$$u = f'(x) \equiv \frac{df}{dx} \quad (2.2.18)$$

(l’apice denota derivata), allora è spontaneo introdurre la quantità

$$g = f - ux$$

(pensata come funzione di  $u$ , ottenuta eliminando  $x$  attraverso le definizioni  $u = f'(x)$ ), e risulta che la relazione  $u = f'(x)$  è equivalente alla relazione  $x = -g'(u)$ .

Infatti, per definizione di  $u$  si ha

$$df = u dx ,$$

e d’altra parte, volendo sostituire  $u$  ad  $x$  come variabile indipendente, è spontaneo cercare di riscrivere questa espressione in maniera che vi figuri il differenziale  $du$  invece del differenziale  $dx$ . Ma allora è ovvio come procedere. Infatti basta ricordare l’identità (regola di integrazione per parti, ovvero regola di Leibniz per la derivata di un prodotto)

$$u dx = d(ux) - x du , \quad (2.2.19)$$

perché allora si ha  $df = d(ux) - xdu$ , ovvero  $d(f - ux) = -xdu$ , ovvero

$$dg = -x du \quad (g = g(u) = f - ux) .$$

Per la definizione di differenziale, si ha pertanto la relazione

$$x = -\frac{dg}{du} , \quad (2.2.20)$$

che costituisce l’inversione della relazione (2.2.18) definente  $u$ . La funzione  $g$  (o talvolta la funzione  $-g$ ) viene detta *trasformata di Legendre* della funzione  $f$ .

Se poi  $f$  dipende anche da un’altra variabile  $y$ , cioè si ha  $f = f(x, y)$ , allora si definisce analogamente  $g = g(u, y) = f - ux$  (trasformata di Legendre di  $f$  rispetto

<sup>5</sup>Non ancora presente in questa versione delle note. In particolare, viene mostrato come per la trasformata di Legendre una scrittura più corretta, anche consona al suo significato geometrico, sarebbe

$$g(u) = \sup_x [f(x) - ux] \quad \text{se } f'' < 0 ,$$

$$g(u) = \inf_x [f(x) - ux] \quad \text{se } f'' > 0 .$$

<sup>6</sup>A tal fine si deve fare l’ipotesi che sia  $f'' \neq 0$  (cioè la funzione  $f$  sia concava o convessa). Infatti per sostituire  $u = f'$  ad  $x$  come variabile indipendente, occorre che la funzione  $u = u(x) = f'(x)$  sia invertibile e dunque monotona, vale a dire che sia  $u' \neq 0$ , ovvero  $f'' \neq 0$ .

alla variabile  $x$ ) e si trova

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{equivalente a} \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} . \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Dunque  $-H$  è la trasformata di Legendre di  $L$  rispetto alle variabili  $\dot{\mathbf{q}}$ , mentre le variabili  $\mathbf{q}$  e  $t$  svolgono il ruolo di parametri, analogo a quello della variabile  $y$  nelle funzioni  $f(x, y)$  e  $g(u, y)$  considerate sopra. In conclusione, nel caso della lagrangiana e della hamiltoniana le relazioni (2.2.21) divengono

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad \text{equivalente a} \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} , \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

(e inoltre  $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$ ).

### 2.2.3 Hamiltoniana ed energia: esempio della particella in coordinate cartesiane.

Si noti che nel capitolo dedicato alle equazioni di Lagrange già avevamo introdotto la funzione  $\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L$ , che avevamo chiamato *energia generalizzata* o funzione di Jacobi. Dunque l'hamiltoniana, come grandezza fisica, coincide proprio con l'energia generalizzata  $\mathcal{E}$ . La differenza sta soltanto nella scelta delle variabili da cui essa dipende. Nel caso dell'energia generalizzata  $\mathcal{E}$  le variabili indipendenti erano (oltre a  $\mathbf{q}, t$ ) le velocità  $\dot{\mathbf{q}}$ , mentre nel caso dell'hamiltoniana  $H$  le variabili indipendenti che sostituiscono le velocità  $\dot{\mathbf{q}}$  sono i momenti  $\mathbf{p}$ . Si ha dunque

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t) .$$

Abbiamo già osservato (e d'altra parte si constata immediatamente) che nei sistemi meccanici "naturali", in cui cioè  $L = T - V$ , si ha che l'energia cinetica  $T$  è decomposta nella somma  $T = T_2 + T_1 + T_0$  di polinomi omogenei di ordine 2 e rispettivamente 1 e 0 nelle velocità  $\dot{\mathbf{q}}$ , e in conseguenza risulta<sup>7</sup>  $H = T_2 - T_0 + V$ , (con  $T_2, T_0$  riespressi in funzione di  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$ ). In particolare, nel caso comunissimo di vincoli indipendenti dal tempo si ha

$$H = T + V . \quad (2.2.23)$$

Vediamo dunque che, **nel caso particolarmente interessante di vincoli indipendenti dal tempo, l'hamiltoniana coincide con l'energia totale del sistema**, espressa però in funzione dei momenti  $\mathbf{p}$  anziché

<sup>7</sup>Si usa teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, secondo il quale si ha

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 2T_2 + T_1 .$$



delle velocità  $\dot{\mathbf{q}}$  (oltre che delle coordinate  $\mathbf{q}$  e del tempo). Questo risultato insegna la via pratica, davvero semplice, per costruire la funzione hamiltoniana  $H$  nel caso indipendente dal tempo: basta scrivere l'energia totale  $T + V$ , con la sola avvertenza di esprimere  $T$  in termini di  $\mathbf{p}$  anziché di  $\dot{\mathbf{q}}$ . Analogamente si procede nel caso generale, usando  $H = T_2 - T_0 + V$ .

**Esempio.** L'esempio fondamentale è quello del sistema costituito da una particella nello spazio, riferita a coordinate cartesiane, con lagrangiana

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

Allora, come già ricordato, i momenti coniugati  $p_x, p_y, p_z$  coincidono con le componenti della quantità di moto, ovvero si ha

$$p_x = m\dot{x} \quad , \quad p_y = m\dot{y} \quad , \quad p_z = m\dot{z} \quad ,$$

sicché l'inversione è banale, essendo data da

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad , \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \quad , \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \quad ,$$

e si ottiene dunque per l'energia cinetica  $T$  la forma  $T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ . L'hamiltoniana è pertanto

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \quad . \quad (2.2.24)$$

**Esercizio:** Scrivere l'hamiltoniana per la particella nello spazio in coordinate cilindriche o polari, per il problema a due corpi, per il pendolo sferico.<sup>8</sup>

Come caso particolare dell'esempio della particella nello spazio in coordinate cartesiane, si ha il caso (di fondamentale importanza in tutta la fisica, dalla fisica della materia fino alla teoria quantistica dei campi) dell'**oscillatore armonico** sulla retta. Si impone allora  $y = 0, z = 0$ , e denotando  $x \equiv q, p_x \equiv p$  si ha

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \quad , \quad (2.2.25)$$

dove  $k$  è una costante positiva. Sull'oscillatore armonico ritorneremo più avanti.

## 2.2.4 Una riscrittura compatta delle equazioni di Hamilton: la matrice "simplettica standard". Analogia tra le coordinate canoniche e le coordinate cartesiane

L'utilità delle coordinate canoniche  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$  rispetto alle  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  si rivela nel fatto che le corrispondenti equazioni di moto (cioè le equazioni

<sup>8</sup>Questo esercizio è svolto in appendice.

di Hamilton) hanno una struttura particolarmente simmetrica. In effetti le equazioni di Hamilton hanno evidentemente forma normale, cioè sono del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

con un opportuno campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  nello spazio delle fasi. Si ha poi però l'ulteriore fatto che il campo vettoriale  $\mathbf{v}$  si ottiene nella maniera seguente. Si prende la funzione  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  e se ne costruisce il gradiente

$$\text{grad } H = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right) \equiv \left( \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right).$$

Poi si scambia l'insieme delle prime  $n$  componenti con quello delle ultime  $n$  componenti, introducendo anche un cambiamento di segno per uno dei due insiemi. Questo scambio (con un cambiamento di segno) può essere ottenuto mediante la matrice  $\mathbb{E}$  definita da

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad (2.2.26)$$

dove  $\mathbb{I}_n$  e  $0_n$  sono la matrice identità e la matrice nulla in  $\mathbb{R}^n$ . In altri termini, il campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  che definisce la dinamica nello spazio delle fasi ha la specialissima struttura<sup>9</sup>

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \text{grad } H(\mathbf{x}). \quad (2.2.27)$$

In particolare si verifica immediatamente<sup>10</sup> che, proprio in virtù di questa specialissima struttura, il campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  ha la proprietà di essere **solenoidale**, cioè di soddisfare la condizione

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.2.28)$$

La matrice  $\mathbb{E}$  viene talvolta detta *matrice simplettica standard*. Essa ha le proprietà (dove  $A^T$  denota la trasposta della matrice  $A$ )<sup>11</sup>

$$\mathbb{E}^2 = -\mathbb{I}_{2n}, \quad \mathbb{E}^T = -\mathbb{E} = \mathbb{E}^{-1}. \quad (2.2.29)$$

<sup>9</sup>Ovvero

$$v_j = \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{E}_{jk} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_k} \quad (j = 1, \dots, 2n).$$

<sup>10</sup>Perché per il teorema di Schwartz si ha

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0.$$

<sup>11</sup>La prima di queste proprietà è, nell'ambito delle matrici, l'analogo della proprietà

$$i^2 = -1$$

per l'unità immaginaria  $i = \sqrt{-1}$ .

**Intermezzo: Analogia tra le coordinate canoniche e quelle cartesiane.** Si osservi che, poco sopra, il gradiente delle funzione hamiltoniana  $H = H(\mathbf{x})$  e la divergenza del campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  nello spazio delle fasi sono stati definiti come una estensione (al caso di dimensione  $2n$ ) delle familiari definizioni per lo spazio ordinario  $\mathbb{R}^3$  riferito a coordinate cartesiane ortogonali, ovvero (se  $f = f(x, y, z)$  e  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ )

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Vogliamo qui fare notare che questo fatto è tutt'altro che banale, perché già nello spazio ordinario il gradiente e la divergenza hanno espressioni ben diverse da quelle ricordate sopra, se si usano coordinate diverse da quelle cartesiane ortogonali, ad esempio se si usano coordinate polari o cilindriche. Il fatto notevole è che invece, nel nostro caso, le coordinate  $\mathbf{q}$  relative allo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  sono *arbitrarie*: ad esempio, per un punto materiale possono essere coordinate polari o cilindriche. Ma se si passa dalle equazioni di Lagrange a quelle di Hamilton (introducendo dunque in luogo delle velocità  $\dot{\mathbf{q}}$  i momenti  $\mathbf{p}$  coniugati alle  $\mathbf{q}$ ), allora risulta che, **comunque le coordinate  $\mathbf{q}$  siano state scelte**, le equazioni di moto si scrivono nella forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ , dove il campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  ha la speciale struttura (2.2.27), e **il gradiente ha il medesimo aspetto che avrebbe se le coordinate  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  fossero cartesiane**. Da questo punto di vista dunque **le coordinate canoniche (cioè le coordinate  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ) si comportano come se fossero coordinate cartesiane ortogonali**. Lo stesso avviene per quanto riguarda la divergenza e la proprietà di solenoidalità.

Non farà dunque meraviglia quando più avanti, discutendo il teorema di Liouville, mostreremo che una situazione del tutto analoga si presenta anche in relazione alla **definizione dell'elemento di volume nello spazio delle fasi**. Infatti mostreremo che anche per l'elemento di volume tutto va come se le coordinate canoniche fossero cartesiane ortogonali, ovvero troveremo che l'elemento di volume  $dV$  "naturalmente" definito nello spazio delle fasi è quello dato da<sup>12</sup>

$$dV = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n, \quad (2.2.30)$$

qualunque sia la scelta delle coordinate  $\mathbf{q}$  nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  (purché le  $\mathbf{p}$  siano definite consistentemente come  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ ).

---

Le matrici  $A$  agenti in  $\mathbb{R}^{2n}$  e aventi la proprietà

$$A^T \mathbb{E} A = \mathbb{E}$$

si dicono **matrici simplettiche** e costituiscono il **gruppo simplettico**. Esse hanno evidentemente la proprietà  $\det A = 1$ , proprietà che è equivalente alla definizione stessa di matrice simplettica nel caso  $n = 1$ . Questo fatto si verifica immediatamente calcolando la matrice  $A^T \mathbb{E} A$ .

<sup>12</sup>Che questo fatto sia nient'affatto banale si capisce se si ricorda ad esempio che l'elemento di volume nel piano euclideo ha, in coordinate polari  $(r, \varphi)$ , la forma

$$dV = r dr d\varphi \neq dr d\varphi.$$

**Osservazione: le dimensioni fisiche del volume nello spazio delle fasi.** Osserviamo che, nello spazio delle fasi, in ogni “piano coordinato”  $(q_i, p_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  l’elemento di area

$$dq_i dp_i$$

ha le dimensioni di una azione (= energia  $\times$  tempo). Ciò segue immediatamente dal fatto che il prodotto  $p_i \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$  ha le dimensioni di  $L$ , cioè di una energia<sup>13</sup>. Dunque l’elemento di volume  $dV$  nello spazio delle fasi ha le dimensioni di una azione alla potenza  $n$ -esima:

$$[dV] = [\text{azione}]^n .$$

Ricordiamo che le più tipiche quantità aventi la dimensione di una azione sono le componenti del momento angolare  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$  (lo si controlla a vista) e la costante di Planck  $h = 6.6 \cdot 10^{-27}$  erg sec =  $6.6 \cdot 10^{-34}$  joule sec, che sta alla meccanica quantistica come la velocità della luce  $c$  sta alla relatività.

### 2.2.5 Sulla geometria dello spazio delle fasi (cenno). Le trasformazioni puntuali estese e le trasformazioni canoniche.

**Nota didattica.** Questo sottoparagrafo può essere “letto tra le righe”.

La banale osservazione fatta sopra sulla specialissima struttura delle equazioni di moto quando si scelgano le coordinate  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  invece delle coordinate  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  costituisce il fulcro mediante il quale a questo punto si potrebbe passare alla discussione degli aspetti geometrici profondi sottostanti le equazioni di Hamilton e lo spazio delle fasi. Ciò richiede però che siano noti elementi di geometria riguardanti anzitutto la distinzione tra vettori e covettori (e quindi tra campi vettoriali e 1-forme differenziali) e inoltre le 2-forme, nozioni che non presumiamo familiari al lettore. Ci limiteremo quindi nel seguito ad una esposizione del tipo tradizionale, di carattere elementare, rinviando a corsi più avanzati per una trattazione di impostazione geometrica.<sup>14</sup>

Vogliamo tuttavia aggiungere qui almeno una osservazione, riguardante le notazioni. Il primo punto riguarda il **passaggio dal locale al globale**. Ricordiamo anzitutto che lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  deve essere riguardato come una varietà globale, definita ad esempio come sottoinsieme di uno spazio ambiente  $\mathbb{R}^{3N}$  se il sistema che si considera è costituito di  $N$  particelle eventualmente vincolate (si pensi al caso di una particella vincolata a una superficie bidimensionale  $\mathcal{C}$  immersa in  $\mathbb{R}^3$ ). Invece, in generale le coordinate

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in U \subset \mathbb{R}^n .$$

<sup>13</sup>Le dimensioni di  $\dot{q}$  si bilanciano al numeratore e al denominatore dell’espressione  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}$ .

<sup>14</sup>Il testo classico di riferimento è V.I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*.

sono locali, cioè descrivono solo una porzione della varietà  $\mathcal{C}$  (sono una “carta” dell’ “atlante”, mentre è tutto l’atlante che descrive la varietà  $\mathcal{C}$  nella sua globalità).

Se ora fissiamo un punto  $P \in \mathcal{C}$ , individuato mediante delle coordinate  $\mathbf{q}$  in una carta, resta definito lo **spazio tangente** alla varietà nel punto  $P$ , che viene di solito indicato con il simbolo  $T_P\mathcal{C}$ . Questo è uno spazio vettoriale, sotteso dai vettori coordinati, e un vettore di tale spazio (vettore velocità) è individuato (nella base coordinata mediante le componenti  $\dot{\mathbf{q}}$ . È dunque chiaro come si debba definire lo **spazio degli stati** globalmente: si tratta dell’insieme di tutte le possibili coppie “(posizione, velocità)”, ovvero le coppie  $(P \in \mathcal{C}, \text{vettore} \in T_P\mathcal{C})$ . Questo “spazio degli stati”<sup>15</sup> è dunque l’insieme

$$T\mathcal{C} := \bigcup_{P \in \mathcal{C}} T_P\mathcal{C} ,$$

Questo insieme ha in effetti tutte le buone proprietà di quelle che in geometria vengono chiamate varietà (*manifolds*) differenziabili, con in più la evidente proprietà di essere costituito da un insieme di spazi vettoriali, ciascuno “basato” su un diverso punto di un’altra varietà (lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ ). Per questo motivo lo spazio  $T\mathcal{C}$  viene chiamato **fibrato tangente** a  $\mathcal{C}$ .

D’altra parte il formalismo hamiltoniano ci ha indotto, a livello locale, a considerare, accanto allo spazio delle coppie  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , le coppie  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , in cui, **per  $\mathbf{q}$  fissato (cioè per un fissato punto  $P \in \mathcal{C}$ )**, i vettori  $\mathbf{p}$  sono in corrispondenza biunivoca con i vettori  $\dot{\mathbf{q}}$ , e costituiscono essi pure uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . È un fatto ben noto in geometria (e lo richiameremo in un prossimo capitolo sulla relatività, dove introdurremo una breve digressione geometrica riguardo l’operazione di “alzare e abbassare gli indici”) che questo secondo spazio vettoriale (con componenti  $\mathbf{p}$ ) è nient’altro che il “duale” dello spazio vettoriale  $T_P\mathcal{C}$ . Poiché tradizionalmente il duale di un generico spazio vettoriale  $V$  viene denotato con  $V^*$  e i suoi elementi vengono chiamati “covettori”, è ovvio allora che il duale di  $T_P\mathcal{C}$  venga denotato con  $T_P^*\mathcal{C}$  e che i suoi elementi vengano chiamati vettori cotangenti a  $\mathcal{C}$  in  $P$ . Infine, con atteggiamento globale, lo **spazio delle fasi**  $\mathcal{F}$  viene definito come

$$\mathcal{F} := \bigcup_{P \in \mathcal{C}} T_P^*\mathcal{C} ,$$

e viene denotato con

$$\mathcal{F} = T^*\mathcal{C}$$

e chiamato **fibrato cotangente** a  $\mathcal{C}$ . Localmente, si tratta semplicemente di tutte le possibili coppie  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

Come secondo punto, vogliamo mettere in luce la proprietà di **invarianza in forma delle equazioni di Hamilton sotto trasformazioni**

<sup>15</sup>Un nome tradizionale nella letteratura classica italiana è **spazio degli atti di moto**.

**puntuali estese.** Con questo intendiamo quanto segue. Per ottenere le equazioni di Hamilton, siamo partiti dalle equazioni di Lagrange in una carta locale (con coordinate  $\mathbf{q}$ ) nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , prendendo poi come coordinate ausiliarie le coordinate  $\mathbf{p}$  anziché le  $\dot{\mathbf{q}}$ . Possiamo ora passare a un'altra carta locale (con coordinate  $\mathbf{Q}$ ) nello spazio delle configurazioni: si dice che in tal caso si compie una **trasformazione (o un cambiamento) di coordinate “puntuale”** (perché la trasformazione riguarda lo spazio “dei punti”, ovvero delle “posizioni”, delle “configurazioni”). Ora, questo cambiamento di coordinate in  $\mathcal{C}$  induce in maniera naturale un cambiamento di coordinate nello spazio degli stati  $TC$ .

**Esempio.** Nel piano si passi dalle coordinate cartesiane ortogonali a quelle polari:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Allora la trasformazione indotta sulle  $\dot{q}$  è

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Sappiamo allora che nelle nuove variabili le equazioni di moto hanno ancora la forma di Lagrange, con una nuova lagrangiana che si ottiene della precedente per semplice sostituzione di variabili. È allora evidente che se si compie il corrispondente passaggio alle variabili  $\mathbf{P}$  con un procedimento analogo a quello seguito nel passare dalle  $\dot{\mathbf{q}}$  alle  $\mathbf{p}$ , le equazioni di moto avranno ancora la forma di Hamilton con una hamiltoniana che si ottiene dalla precedente semplicemente per sostituzione di variabili. Questa trasformazione di variabili dalle  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  alle  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  indotta in maniera “naturale” dalla trasformazione “puntuale” sulle  $\mathbf{q}$  viene detta **trasformazione puntuale estesa**.

In questo senso si ha dunque invarianza in forma delle equazioni di Hamilton sotto trasformazioni puntuali estese: *le equazioni restano ancora in forma di Hamilton con la medesima hamiltoniana* (sottintendendo che si debba compiere la sostituzione di variabili). Esiste tuttavia una classe molto più ampia di trasformazioni che hanno la medesima proprietà, ovvero: *le equazioni restano in forma di Hamilton con la medesima hamiltoniana* (sottintendendo: a meno della sostituzione di variabili). Queste trasformazioni vengono dette **trasformazioni canoniche** (indipendenti dal tempo) e sono di grande interesse ad esempio per la teoria delle perturbazioni, perché possono essere utilizzate per scegliere variabili in cui le equazioni abbiano forma più semplice rispetto alle variabili originarie, e quindi permettono di descrivere meglio i movimenti (non si dimentichi che sono eccezionali i casi in cui le equazioni si “sanno risolvere”). Ad esempio, se si riesce a trovare una trasformazione tale che nelle nuove variabili  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  si abbia

$$H = H(\mathbf{P}),$$

allora, essendo  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}} = 0$ , è evidente che le equazioni nelle nuove variabili saranno semplicissime, ovvero<sup>16</sup>

$$\dot{\mathbf{P}} = 0, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \omega(\mathbf{P}), \quad \text{dove} \quad \omega = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}$$

con le banali soluzioni

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{Q}(t) = \omega_0 t + \mathbf{Q}_0, \quad \text{dove} \quad \omega_0 = \omega(\mathbf{P}_0).$$

I sistemi per cui esiste una tale trasformazione canonica, che porti a una hamiltoniana dipendente solo dai momenti, sono detti **sistemi integrabili**.

Si osservi tuttavia che è possibile anche considerare trasformazioni di variabili non canoniche, tali cioè che nelle nuove variabili le equazioni di moto non hanno **esplicitamente** una struttura hamiltoniana come quella fin qui considerata.

## 2.2.6 Le variabili dinamiche e le costanti del moto

Veniamo ora alle nozioni di *variabile dinamica*. Abbiamo visto che uno stato del sistema considerato è individuato da un punto nello spazio degli stati, o dello spazio delle fasi, a seconda dell'ambito cui ci si riferisce, lagrangiano o hamiltoniano. Nel seguito, faremo riferimento allo spazio delle fasi, che denotiamo con  $\mathcal{F}$ . Le funzioni (a valori reali) definite sullo spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  (come tipicamente l'energia, le componenti del momento angolare, le coordinate delle posizioni o delle velocità delle particelle costituenti il sistema) sono chiamate **variabili dinamiche**.<sup>17</sup> Più in generale, possiamo pensare a *variabili dinamiche dipendenti (esplicitamente) dal tempo*, cioè funzioni della forma  $f = f(\mathbf{x}, t)$ , con  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  coordinate in  $\mathcal{F}$ . Si pensi all'energia di una particella soggetta a un campo di forze conservativo dipendente esplicitamente dal tempo (ad esempio un campo elettrico alternato).

Veniamo infine al sottoinsieme delle variabili dinamiche (eventualmente dipendenti dal tempo) che vengono dette **costanti del moto o integrali del moto o funzioni invarianti** rispetto a una data hamiltoniana  $H$ . Diciamo qui la più elementare definizione possibile; una trattazione matematicamente più convincente, che fa uso della nozione di gruppo di trasformazioni dello spazio delle fasi generato dalle equazioni di moto, verrà menzionata più avanti.

<sup>16</sup>Qui la notazione lascia a desiderare, perché  $\omega$  è un vettore, e dovremmo scrivere

$$\dot{Q}_i = \omega_i(\mathbf{P}), \quad \text{dove} \quad \omega_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

<sup>17</sup>In meccanica quantistica, le analoghe quantità sono chiamate **osservabili**, e sono rappresentate da una classe di operatori lineari in spazi di Hilbert (spazi vettoriali muniti di un prodotto scalare).

Sia data una variabile dinamica  $f(\mathbf{x}, t)$ . Sia assegnato un movimento  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  soluzione delle assegnate equazioni di moto  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  in relazione a un dato iniziale  $\mathbf{x}_0$  (che verrà considerato come un parametro, e eventualmente sottinteso). Si considerano allora i valori che la variabile dinamica assume lungo quel movimento al variare del tempo, ovvero si considera la funzione  $\tilde{f}(t)$  ottenuta da  $f$  per composizione, cioè definita da

$$\tilde{f}(t) \equiv f(\mathbf{x}(t), t) .$$

Seguendo una consolidatissima tradizione, con abuso di notazione denoteremo  $\tilde{f}(t)$  ancora con  $f(t)$ , e corrispondentemente denoteremo anche<sup>18</sup>  $\frac{d\tilde{f}}{dt} \equiv \frac{df}{dt} \equiv \dot{f}$ . Pertanto, usando la formula di derivata di una funzione composta (*chain rule*), abbiamo

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f ; \quad (2.2.31)$$

questa derivata di funzione composta viene talvolta chiamata **derivata totale o derivata sostanziale**.

Si introduce allora la

**Definizione:** Una variabile dinamica  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  è detta *costante del moto o integrale del moto o funzione invariante* rispetto a una hamiltoniana  $H$  se si ha

$$\dot{f}(t) = 0 \quad (2.2.32)$$

per ogni soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana  $H$  (cioè per ogni dato iniziale  $\mathbf{x}_0$ ).

In virtù della (2.2.31) si ha allora il

**Teorema:** Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f$  sia costante del moto sotto la dinamica indotta da una hamiltoniana  $H$  è che si abbia

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f = 0 \quad \text{dove} \quad \mathbf{v} = \mathbb{E} \text{ grad } H , \quad (2.2.33)$$

<sup>18</sup>Una notazione più adeguata si ottiene utilizzando la nozione di *flusso nello spazio delle fasi* indotto dalla hamiltoniana  $H$ , che verrà illustrata in un prossimo paragrafo. Si tratta della famiglia a un parametro (il tempo  $t$ ) di trasformazioni che invia ogni punto iniziale  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{F}$  nel suo evoluto al tempo  $t$  mediante la corrispondente soluzione delle equazioni di Hamilton. Limitiamoci qui al caso di variabili dinamiche indipendenti dal tempo. Denotando il flusso con  $\Phi^t$ , la funzione composta  $\tilde{f}$  viene denotata allora più propriamente con  $U^t f$ , dove

$$(U^t f)(\mathbf{x}) = f(\Phi^t \mathbf{x}) ,$$

e si è denotato con  $\mathbf{x}$  anziché con  $\mathbf{x}_0$  il generico dato iniziale. La considerazione di queste trasformazioni  $U^t$  sulle variabili dinamiche indotte dall'evoluzione temporale nello spazio delle fasi fu introdotta intorno all'anno 1928 da Koopman e von Neumann, particolarmente con riferimento alla cosiddetta *teoria ergodica*.

Quando si mette l'accento su come cambiano nel tempo le variabili dinamiche anziché gli stati (punti dello spazio delle fasi) si compie un procedimento analogo a quello che si compie in meccanica quantistica quando si passa dalla *descrizione di Schroedinger* (evoluzione degli stati) alla *descrizione di Heisenberg* (evoluzione delle osservabili).



ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0. \quad (2.2.34)$$

Il punto essenziale da mettere in luce è che la definizione originaria di costante del moto fa riferimento a una proprietà ( $\dot{f} = 0$ ) che richiede di essere controllata “per tutte le soluzioni delle equazioni del moto” (cioè per tutti i dati iniziali  $\mathbf{x}_0$ ), mentre d'altra parte tali soluzioni in generale non si sanno neppure scrivere esplicitamente. Invece la corrispondente condizione (2.2.33) può essere controllata senza che si conoscano le soluzioni, perché addirittura ogni riferimento esplicito al requisito “per ogni soluzione delle equazioni di Hamilton” è scomparso. Per controllare che  $f$  sia una costante del moto, è sufficiente eseguire su di essa delle derivate e controllare che la corrispondente espressione (2.2.33) sia identicamente nulla.

Vedremo in un prossimo paragrafo come la condizione (2.2.33) verrà riespressa in termini delle parentesi di Poisson di  $f$  ed  $H$ . In casi molto significativi avverrà allora che, facendo uso delle proprietà delle parentesi di Poisson, sarà possibile verificare che una variabile dinamica sia costante del moto addirittura senza dover calcolare alcuna derivata. In particolare risulterà evidente che, nel caso comunissimo in cui l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, l'hamiltoniana stessa è una costante del moto (indipendente dal tempo).

Naturalmente, il problema di *trovare* concretamente una costante del moto (e non solo *verificare* se una certa funzione sia una costante del moto) per un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  assegnato (o per una assegnata hamiltoniana) è tutt'altro che banale, perché la condizione che si deve soddisfare, ovvero la (2.2.34), si presenta come una equazione alle derivate parziali, di cui in generale non si sanno determinare esplicitamente le soluzioni. Vedremo più avanti come le costanti del moto possono essere determinate concretamente in alcuni casi speciali in cui la hamiltoniana presenti delle proprietà di simmetria.

### 2.2.7 Il teorema di Liouville e la relazione con la meccanica statistica (cenno).

Abbiamo già osservato che, in virtù della speciale struttura delle equazioni di Hamilton, il campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  che definisce la dinamica nello spazio delle fasi è solenoidale, cioè soddisfa la proprietà  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Questa proprietà ha come conseguenza il seguente

**Teorema di Liouville.** Sia  $D_0$  una arbitraria regione (o dominio)<sup>19</sup> dello spazio delle fasi, e  $D(t)$  la corrispondente regione ottenuta per evoluzione mediante le soluzioni delle equazioni di Hamilton relative a una qualsiasi hamiltoniana  $H$ .

<sup>19</sup>Sottintendiamo che il dominio sia misurabile secondo Lebesgue.

Allora si ha

$$\text{Volume di } D(t) = \text{Volume di } D_0 ,$$

dove il volume è definito mediante l'elemento di volume "canonico"

$$dV = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n ,$$

cioè "come se le coordinate canoniche  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  fossero cartesiane ortogonali".

Questo risultato è di fondamentale importanza per la meccanica statistica. Ricordiamo infatti che la meccanica statistica consta di due elementi: la dinamica (di qui il nome "meccanica") e la probabilità (di qui il nome "statistica"). La dinamica è data dalle equazioni di Hamilton nello spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  (ma si potrebbero considerare anche le equazioni di Lagrange nello spazio degli stati), in conseguenza delle quali ogni dato iniziale (punto)  $\mathbf{x}_0$  dello spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  dà luogo a un corrispondente movimento  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  (con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ) in tale spazio. La probabilità viene introdotta in maniera naturale quando si abbia una ignoranza sul dato iniziale  $\mathbf{x}_0$ , e si assegni quindi una probabilità a priori sui dati iniziali. Il problema è allora se sia possibile combinare questi due elementi (dinamica e probabilità) in maniera consistente. Questo problema verrà discusso più avanti, e vedremo che esso è banale se i possibili dati iniziali sono un insieme finito o anche numerabile, mentre il problema è alquanto delicato ("it's a mess", come dice uno dei più celebri probablisti di questi giorni<sup>20</sup>) quando i possibili dati iniziali costituiscono un continuo. In tal caso si assegna una densità di probabilità iniziale  $\rho_0(\mathbf{x})$  (con le proprietà  $\rho_0 \geq 0$  e  $\int \rho_0 dV = 1$ ), nel senso che la probabilità di trovare un punto in una regione  $D_0 \subset \mathcal{F}$  è data inizialmente da

$$\text{pr}(\mathbf{x} \in D_0) = \int_{D_0} \rho_0(\mathbf{x}) dV ,$$

e si pone il problema di determinare una corrispondente densità di probabilità  $\rho(\mathbf{x}, t)$  evoluta della densità iniziale  $\rho_0(\mathbf{x})$ . Si dimostra che la  $\rho(\mathbf{x}, t)$  è una "costante del moto" nel senso sopra discusso, ovvero soddisfa l'equazione (detta *equazione di Liouville*)<sup>21</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho = 0 \quad \text{dove} \quad \mathbf{v} = \mathbb{E} \text{ grad } H .$$

In particolare si dimostra anche il teorema di Liouville citato sopra. La dimostrazione di questi fatti verrà data in un prossimo paragrafo, in cui tutto il problema verrà discusso più ampiamente.

<sup>20</sup>S.R.S. Varadhan, *Probability theory*, American Math. Soc. (New York, 2001): "If the space of all possible outcomes is uncountable, this is a mess", pag 2.

<sup>21</sup>Nel caso generale, in cui cioè l'evoluzione non fosse di tipo hamiltoniano) si dimostra invece che la condizione di compatibilità tra dinamica e probabilità conduce alla *equazione di continuità*, da cui segue in particolare l'equazione di Liouville nel caso  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .

## 2.3 Le parentesi di Poisson e le regole di quantizzazione

Le parentesi di Poisson sono uno strumento di grande utilità in ambito hamiltoniano. Esse si presentano in maniera del tutto spontanea in connessione con il problema di determinare le costanti del moto di un sistema hamiltoniano, e sono uno strumento essenziale nella teoria delle perturbazioni. Infine, esse intervengono in maniera cruciale nel procedimento di quantizzazione che fu formulato da Heisenberg, Born, Jordan (e indipendentemente da Dirac), a seguito dello sconcertante lavoro di Heisenberg del 1925 sulla teoria della dispersione, forse uno dei lavori scientifici più geniali nella storia dell'umanità.

### 2.3.1 Integrali del moto e parentesi di Poisson

Consideriamo un sistema hamiltoniano a  $n$  gradi di libertà, di hamiltoniana  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , e una variabile dinamica  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Abbiamo già indicato come si discute l'esistenza di costanti (o integrali) del moto. Si considera la *derivata totale o sostanziale* di  $f$  rispetto al tempo lungo una soluzione delle equazioni di Hamilton, che abbiamo denotato con  $\dot{f}$ : essa è definita da

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t),$$

dove  $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$  è una soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana  $H$  relativa a un dato iniziale  $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$ . Abbiamo poi definito il sottoinsieme delle variabili dinamiche che sono **integrali del moto o costanti del moto** rispetto ad  $H$ , come quelle che soddisfano la condizione

$$\dot{f}(t) = 0 \tag{2.3.1}$$

per ogni soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana  $H$  (cioè per ogni dato iniziale  $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$ ). Essendo  $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f$ , abbiamo allora osservato che condizione necessaria e sufficiente affinché  $f$  sia costante del moto sotto la dinamica indotta da una hamiltoniana  $H$  è che valga la (2.2.33), cioè si abbia identicamente  $\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f = 0$  dove  $\mathbf{v} = \mathbb{E} \text{ grad } H$ .

È utile ora riscrivere esplicitamente questa condizione. Si ha

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right),$$

ed è pertanto significativo introdurre la seguente

**Definizione (Parentesi di Poisson).** Per ogni coppia ordinata di variabili dinamiche  $f$  e  $g$  risulta definita una nuova variabile dinamica, chiamata *parentesi di*

Poisson di  $f$  e  $g$  e denotata  $\{f, g\}$ , mediante la relazione

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Infatti, con questa notazione abbiamo  $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$ , e pertanto la condizione (2.3.1) che caratterizza le costanti del moto si riscrive nella forma  $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$ . Abbiamo pertanto il

**Teorema 1** *Una variabile dinamica  $f$  è un integrale del moto rispetto all'hamiltoniana  $H$  se e solo se si ha identicamente (cioè per ogni  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$ )*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0. \quad (2.3.3)$$

*In particolare, una variabile dinamica  $f$  indipendente dal tempo è un integrale del moto rispetto all'hamiltoniana  $H$  se e solo se si annulla la parentesi di Poisson di  $f$  con  $H$ :*

$$\{f, H\} = 0. \quad (2.3.4)$$

Abbiamo già osservato come la definizione originaria di costante del moto faccia riferimento a una proprietà ( $\dot{f} = 0$ ) che richiede di essere controllata “per tutte le soluzioni delle equazioni del moto”, mentre tali soluzioni in generale non si sanno neppure scrivere esplicitamente. Il vantaggio della equivalente condizione (2.3.3) è che essa può essere controllata senza che si conoscano le soluzioni. Anzi, nel caso che più interessa di variabili dinamiche indipendenti dal tempo, secondo la (2.3.4) basta controllare che la parentesi di Poisson  $\{f, H\}$ , che è una ben definita variabile dinamica, sia identicamente nulla. Vedremo più sotto come in casi significativi questa verifica possa essere compiuta in maniera facilissima, che tra l'altro viene poi trasportata sostanzialmente inalterata in meccanica quantistica.

**Osservazione.** Si noti la forma significativa che assume la definizione di parentesi di Poisson quando si faccia riferimento a quella che abbiamo chiamato matrice simplettica standard  $\mathbb{E}$  (2.2.26). Infatti evidentemente si ha

$$\{f, g\} = \left( \text{grad } f, \mathbb{E} \text{ grad } g \right), \quad (2.3.5)$$

dove  $(\cdot, \cdot)$  denota l'ordinario prodotto scalare euclideo in  $\mathbb{R}^{2n}$  e  $\text{grad } f(\mathbf{x})$  è l'ordinario gradiente in  $\mathbb{R}^{2n}$ , con  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

### 2.3.2 Proprietà della parentesi di Poisson

La parentesi di Poisson, come applicazione che per ogni coppia ordinata di variabili dinamiche produce una nuova variabile dinamica, soddisfa alle seguenti quattro proprietà (con  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \{f, g\} = -\{g, f\} \\
 2) \quad & \{f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\} = \alpha_1 \{f, g_1\} + \alpha_2 \{f, g_2\} \\
 3) \quad & \{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\} \\
 4) \quad & \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.3.6}$$

che vengono dette rispettivamente *antisimmetria*, *linearità* (a destra), *regola di Leibniz* e *identità di Jacobi*.

La quarta proprietà, o identità di Jacobi (si osservi l'ordine ciclante delle tre funzioni in gioco) è non banale, e viene dimostrata in appendice, mentre le prime tre sono di verifica immediata. La prima è evidente dalla definizione, e comporta in particolare  $\{f, f\} = 0$  per ogni  $f$ .<sup>22</sup> <sup>23</sup> La relazione di linearità 2) traduce la analoga proprietà di linearità della derivazione, e vale, evidentemente, non solo per  $g$  ma anche per  $f$  (linearità a sinistra)<sup>24</sup>, ovvero la parentesi di Poisson è una operazione *bilineare*. Infine, la proprietà 3) corrisponde alla regola di Leibniz per la derivata di un prodotto.<sup>25</sup>

### 2.3.3 Esempi

È del tutto evidente che se consideriamo come variabili dinamiche le funzioni  $q_i, p_i$  (funzioni coordinate), ad esempio  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = q_1$ ,<sup>26</sup> allora per le

<sup>22</sup>E dunque in particolare comporta  $\{H, H\} = 0$ , sicché, coerentemente con la proprietà precedentemente dimostrata, si ha  $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}$ .

<sup>23</sup>Più in generale, è immediato verificare che se (ad esempio)  $g$  dipende da  $f$ , cioè si ha  $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = G(f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t))$ , dove  $G$  è una funzione da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , allora risulta  $\{f, g\} = 0$ .

<sup>24</sup>Come si verifica direttamente, oppure usando la proprietà di antisimmetria 1).

<sup>25</sup>A secondo membro, si poteva evidentemente scrivere anche  $g_2 \{f, g_1\} + \{f, g_2\} g_1$ , perché l'ordine è irrilevante nel prodotto di funzioni a valori reali o complessi. L'ordine tenuto sopra è invece essenziale nelle analoghe proprietà che si presentano nel caso in cui la parentesi di Poisson sia sostituita dal commutatore tra operatori lineari, che interessa in meccanica quantistica. Può quindi essere utile, come indicazione mnemonica, mantenere questo ordine anche nel caso delle parentesi di Poisson.

<sup>26</sup>Consideriamo il semplice esempio in cui lo spazio delle fasi è uno spazio vettoriale  $V = \mathbb{R}^m$ , i cui punti sono vettori  $\mathbf{x}$  che, avendo scelto una base, sono individuati da una  $m$ -upla:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ . Allora l'analogo delle variabili dinamiche sono le funzioni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e le funzioni definite da  $f_i(\mathbf{x}) = x_i$  vengono dette *funzioni coordinate*. Con abuso di linguaggio si denota poi  $f_i \equiv x_i$ . Come ulteriore commento, ricordiamo che le funzioni coordinate (a valori reali, e quindi dette *funzionali*) agiscono linearmente su  $V$ , e costituiscono in effetti una base nello spazio vettoriale dei funzionali lineari agenti su  $V$ . Tale spazio viene detto spazio duale a  $V$  e viene denotato con  $V^*$ . Se  $V = \mathbb{R}^n$ , anche  $V^*$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . La base di  $V^*$  così ottenuta viene detta base duale alla base scelta in  $V$ . Su questi punti ritorneremo nel secondo capitolo di relatività.

corrispondenti parentesi di Poisson si ha

$$\{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{q_i, p_k\} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n; \quad (2.3.7)$$

queste vengono chiamate **parentesi di Poisson fondamentali**.

Si constata poi immediatamente che le equazioni di Hamilton si possono scrivere per mezzo delle parentesi di Poisson nella forma<sup>27</sup>

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (2.3.8)$$

coerentemente con la relazione (2.3.3)  $\dot{f} = \{f, H\}$ , che vale per ogni variabile dinamica indipendente dal tempo.

Veniamo ora al caso in cui il sistema è *un punto materiale nello spazio*, e consideriamone le componenti cartesiane della quantità di moto e del momento angolare  $\mathbf{L}$ . Usando le proprietà 2), 3) della parentesi di Poisson, e le parentesi di Poisson fondamentali, si mostra immediatamente che si ha (si ricordi  $L_z = xp_y - yp_x$  e così via, ciclando)

$$\{p_x, L_z\} = -p_y, \quad \{p_y, L_z\} = p_x, \quad \{p_z, L_z\} = 0, \quad (2.3.9)$$

con analoghe relazioni per  $L_y$  e  $L_x$ . Così si trova anche

$$\{L_x, L_y\} = L_z, \quad (2.3.10)$$

assieme alle analoghe relazioni che si ottengono ciclando gli indici. Infine, si ha anche

$$\{L_x, L^2\} = \{L_y, L^2\} = \{L_z, L^2\} = 0. \quad (2.3.11)$$

**Osservazione.** Si noti bene che le relazioni sopra scritte possono essere verificate usando esplicitamente la definizione di parentesi di Poisson. Ma è di grande interesse il fatto che esse possono essere verificate senza fare uso diretto della definizione, facendo invece uso delle proprietà 2) e 3) e delle parentesi di Poisson fondamentali. Infatti tale procedimento può essere allora esteso ad altri ambiti, come quello degli operatori lineari in spazi vettoriali, che si presenta in meccanica quantistica. In tal caso, si ha una operazione (il commutatore) che presenta le medesime proprietà formali delle parentesi di Poisson, e inoltre il procedimento di quantizzazione si basa proprio sul postulare proprietà analoghe a quelle delle parentesi di Poisson fondamentali. Dunque in ambito quantistico varranno per i commutatori proprietà analoghe a quelle che sono state dimostrate valide per le parentesi di Poisson in ambito classico.

*Compiamo dunque concretamente il calcolo*, ad esempio nel caso della prima delle relazioni sopra indicate, ovvero  $\{p_x, L_z\} = -p_y$ . Si ha

$$\begin{aligned} \{p_x, L_z\} &= \{p_x, xp_y - yp_x\} = \{p_x, xp_y\} - \{p_x, yp_x\} \\ &= x\{p_x, p_y\} + \{p_x, x\}p_y - y\{p_x, p_x\} - \{p_x, y\}p_x \\ &= -p_y \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

<sup>27</sup>Si noti in particolare come con questa scrittura scompaia la dissimmetria dovuta alla presenza di un segno meno nelle equazioni di Hamilton.

Un ruolo fondamentale nella dinamica del *moto centrale* è svolto dalla proprietà indicata nel seguente

**Esercizio.** Si consideri un punto materiale in un potenziale centrale a simmetria sferica. Utilizzando il fatto che in coordinate sferiche si ha  $L_z = p_\varphi$ , cioè  $L_z$  coincide con il momento coniugato alla coordinata  $\varphi$  (longitudine), si mostri che  $L_z$  è un integrale del moto. Usando poi l'arbitrarietà della scelta dell'asse  $z$ , si concluda che anche  $L_x$  e  $L_y$  (e quindi anche  $L^2$ ) sono integrali del moto. Quindi si ha

$$\{\mathbf{L}, H\} = 0, \quad \{L^2, H\} = 0. \quad (2.3.13)$$

**Esercizio.** Si determinino in maniera analoga gli integrali del moto per il problema dei due corpi.

**Esercizio.** Usando l'identità di Jacobi, si verifichi che la parentesi di Poisson di due integrali del moto è pure un integrale del moto (*teorema di Jacobi*). In particolare, se due componenti del momento angolare sono costanti del moto, allora è costante del moto anche la terza componente.

**Osservazione.** Due variabili dinamiche la cui parentesi di Poisson sia nulla si dicono *in involuzione*; con un linguaggio un po' improprio, ispirato a quello della meccanica quantistica, si dice anche che *commutano*. In generale, hanno grande importanza gli integrali del moto in involuzione, specialmente quando ne esiste un numero pari al numero dei gradi di libertà. In tal caso si dice che si ha un *sistema completo di integrali in involuzione*.<sup>28</sup> Ad esempio, per il moto centrale si trova che  $H$ ,  $L^2$  e  $L_z$  costituiscono un sistema completo di integrali in involuzione.

### 2.3.4 Parentesi di Poisson e regole di quantizzazione

È interessante mettere in luce un aspetto algebrico che si presenta in relazione alle parentesi di Poisson e che svolge un ruolo essenziale nel procedimento di quantizzazione. Si tratta del fatto che l'insieme delle variabili dinamiche nello spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  di un sistema dinamico, munito della legge di prodotto definita dalla parentesi di Poisson, costituisce un'algebra e più precisamente un *algebra di Lie*.

**Richiami sulle algebre di Lie.** Si dice algebra di Lie uno spazio vettoriale munito di una opportuna relazione di prodotto che sarà precisata qui sotto. A tal fine occorre dunque anzitutto ricordare che le funzioni a valori reali definite su un dominio (nel nostro caso le funzioni sono le variabili dinamiche, aventi per dominio lo spazio delle fasi  $\mathcal{F}$ ) costituiscono uno spazio vettoriale (di dimensione infinita). Infatti, esse possono essere sommate tra loro (per componenti, ovvero mediante la regola<sup>29</sup>  $(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ ) e moltiplicate per gli scalari (ancora

<sup>28</sup>In meccanica quantistica gioca un ruolo molto importante l'analoga nozione di *sistema completo di osservabili che commutano*, e che siano eventualmente integrali del moto.

<sup>29</sup>Leggi: il valore della funzione  $(f + g)$  in  $\mathbf{x}$  è uguale alla somma dei valori che le funzioni  $f$  e  $g$  assumono in  $\mathbf{x}$ . Questa definizione di somma è l'analoga di quella (ancora

per componenti, cioè mediante la regola  $(\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x})$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Dunque, per compiere il salto di pensare alle funzioni come vettori, l'idea centrale che si deve avere in mente è di pensare al valore  $f(\mathbf{x})$  (il valore che la funzione  $f$  assume in  $\mathbf{x}$ ) come al valore della  $\mathbf{x}$ -esima componente del "vettore"  $f$ .<sup>30</sup> Una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è caratterizzata dall'insieme delle sue  $\mathbf{x}$ -esime componenti  $\{f(\mathbf{x})\}$  con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , allo stesso modo in cui un vettore  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$  in  $\mathbb{R}^m$  è caratterizzato dall'insieme delle sue  $i$ -esime componenti  $\{v_i\}$ , con  $i = 1, \dots, m$ .<sup>31</sup> Dunque **le variabili dinamiche costituiscono uno spazio vettoriale (di dimensione infinita)**.

D'altra parte le variabili dinamiche possono essere anche moltiplicate tra di loro in maniera ovvia (ancora "per componenti", cioè con la regola  $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ ), fornendo in tal modo per ogni coppia di variabili dinamiche una nuova variabile dinamica, che può essere chiamata il loro prodotto.

Tuttavia la struttura più significativa e propriamente intrinseca per l'insieme delle variabili dinamiche (funzioni sullo spazio delle fasi) si ottiene quando la legge di prodotto viene definita come la legge che ad ogni coppia di funzioni  $f, g$  associa la nuova funzione  $\{f, g\}$ , definita dalla parentesi di Poisson di  $f$  e  $g$ . Ora, se si ha un insieme che è uno spazio vettoriale ed è munito di una operazione di prodotto tra coppie di elementi dell'insieme che soddisfa le proprietà di 1) antisimmetria, 2) bilinearità e 3) identità di Jacobi, allora si dice che l'insieme è una **algebra di Lie**. Dunque concludiamo che **l'insieme delle variabili dinamiche su uno spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  è un'algebra di Lie rispetto al prodotto definito dalla parentesi di Poisson**.<sup>32</sup>

Il punto che a noi qui interessa è che la struttura di algebra di Lie appare anche in un ambito ben diverso,<sup>33</sup> ovvero nell'ambito delle matrici in uno spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  di dimensione arbitraria  $n$  (che rappresentano operatori lineari di  $\mathbb{R}^n$  in sé, quando sia fissata una base). Infatti le matrici possono essere evidentemente sommate tra loro (per componenti) e moltiplicate per gli scalari (cioè costituiscono uno spazio vettoriale). Inoltre possono essere moltiplicate tra di loro (per composizione, cioè facendole agire l'una dopo l'altra<sup>34</sup>, il che corrisponde alla nota regola di prodotto riga per colonna. Ma la struttura algebrica più significativa si ottiene quando come operazione di

---

per componenti) che si usa per i vettori in  $\mathbb{R}^m$  definiti come  $m$ -uple: se  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ , allora si definisce  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, \dots, v_m + w_m)$ .

<sup>30</sup>Questa idea centrale è chiarissimamente espressa – e proprio in questa forma – nei primi libri in cui i grandi matematici introducevano l'analisi funzionale. Si veda ad esempio J. von Neumann, *I fondamenti matematici della meccanica quantistica*, ed H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover (New York, 1931).

<sup>31</sup>In entrambi i casi si ha un insieme  $I$  indici ( $I = \{1, 2, \dots, m\}$  in un caso,  $I = \mathbb{R}^n$  nell'altro), e in entrambi i casi un vettore viene definito mediante una legge – una applicazione, come si dice – che per ogni indice fornisce un numero reale. L'unica differenza sta nel fatto che l'insieme degli indici è finito in un caso, mentre è un continuo nell'altro.

<sup>32</sup>Le parentesi di Poisson soddisfano inoltre alla proprietà di Leibniz (che è detta proprietà di derivazione).

<sup>33</sup>Un altro esempio di algebra di Lie è lo spazio euclideo tridimensionale, con il prodotto tra vettori definito mediante la regola del prodotto vettore. L'identità di Jacobi viene immediatamente verificata usando la nota regola del doppio prodotto vettore.

<sup>34</sup>Una operazione non commutativa!



prodotto tra matrici si prende il commutatore. Se  $A, B$  sono due matrici, allora il corrispondente **commutatore**, denotato con  $[A, B]$  è definito da

$$[A, B] := AB - BA . \quad (2.3.14)$$

È un facilissimo esercizio verificare che le proprietà analoghe alle (2.3.6) (ovvero antisimmetria, linearità a destra, regola di Leibniz e identità di Jacobi) sono soddisfatte. In particolare, la verifica della identità di Jacobi, non banalissima nell'ambito delle variabili dinamiche (funzioni sullo spazio delle fasi  $\mathcal{F}$ ), è ora immediata. Dunque **l'insieme degli operatori lineari in  $\mathbb{R}^n$  (o quello delle corrispondenti matrici che si ottengono fissando una base), quando venga munito dell'operazione di prodotto mediante il commutatore, costituisce un'algebra di Lie**, e soddisfa anche la regola di Leibniz.

Infine, per il passaggio alla meccanica quantistica il caso interessante è quello degli operatori lineari in uno spazio vettoriale di dimensione infinita, munito di un prodotto scalare (spazio di Hilbert). Diamo qui un cenno di questo problema solo ai fini di mettere in luce come sia rilevante l'analogia con lo spazio delle variabili dinamiche classiche munito del prodotto definito dalla parentesi di Poisson.<sup>35</sup>

Consideriamo un sistema fisico, e chiamamo con il nome di **osservabili** le corrispondenti quantità di interesse fisico (energia, momento angolare, coordinate di una particella, ...). Nel modello classico, il sistema è descritto da uno spazio delle fasi  $\mathcal{F}$ , e le osservabili sono rappresentate da variabili dinamiche, cioè da funzioni (a valori reali) aventi per dominio  $\mathcal{F}$ ; tra queste, vi sarà in particolare l'hamiltoniana, che determina la dinamica.

Il salto cruciale compiuto da Heisenberg e Schrödinger nel 1925 consistette nel comprendere che, per un fissato sistema dinamico, la nuova meccanica (il nuovo modello che essi stavano costruendo) richiedeva che le osservabili non fossero più descritte da variabili dinamiche (funzioni a valori reali su uno spazio delle fasi  $\mathcal{F}$ ), bensì da operatori lineari in uno spazio di Hilbert<sup>36</sup> di dimensione infinita e quindi, sostanzialmente, da matrici con infiniti elementi (con indici discreti, come di consueto, o addirittura continui). Un salto tanto grande poté essere compiuto solo attraverso una illuminazione, ed infatti è proprio in questi termini (*Erleuchtung*) che venne descritto da Heisenberg stesso.<sup>37</sup>

Si deve poi avere una corrispondenza (detta **regola di quantizzazione**) che associa ad ogni variabile dinamica classica  $f$  un operatore lineare  $\hat{f}$ , e

<sup>35</sup>Una discussione precisa richiederebbe di tenere conto del problema dei domini in cui sono definiti gli operatori, mentre ci limitiamo qui ad una trattazione puramente formale.

<sup>36</sup>Uno spazio di Hilbert è per definizione uno spazio vettoriale complesso munito di un prodotto interno (analogo del prodotto scalare), e completo rispetto alla topologia naturalmente indotta dal prodotto interno.

<sup>37</sup>Si veda l'introduzione di van der Waerden, *Sources of quantum mechanics*, Dover (New York, 1968), pag. 25.

si trattava di trovare la regola con cui determinare tale associazione. La regola fu determinata indipendentemente in un fondamentale lavoro di Born, Heisenberg e Jordan e in un altro di Dirac<sup>38</sup>, e consiste sostanzialmente in quanto segue: gli operatori sono definiti attraverso i loro mutui commutatori, e d'altra parte i commutatori fondamentali devono soddisfare certe proprietà analoghe a quelle delle parentesi di Poisson fondamentali, in cui deve entrare la costante di Planck.

Ad esempio, consideriamo il caso di una particella nello spazio, sicché le variabili dinamiche fondamentali sono  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $p_1 = p_x$ ,  $p_2 = p_y$ ,  $p_3 = p_z$ , e le parentesi di Poisson fondamentali sono

$$\{x_j, x_k\} = 0, \quad \{p_j, p_k\} = 0, \quad \{x_j, p_k\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (2.3.15)$$

Allora la regola di quantizzazione inventata da Born, Heisenberg e Jordan, e indipendentemente da Dirac, è la seguente: si devono trovare operatori lineari  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$  tali che si abbia<sup>39</sup>

$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_k] = 0, \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (2.3.16)$$

dove  $i = \sqrt{-1}$ , mentre  $\hbar = h/(2\pi)$  è la costante ridotta di Planck.<sup>40</sup> Tra l'altro, con un argomento generale semplicissimo Born, Heisenberg e Jordan stabiliscono subito che le regole di commutazione (2.3.16) possono essere soddisfatte solo per operatori lineari agenti su spazi vettoriali di dimensione *infinita*.

Vediamo ora come questa prescrizione viene concretamente realizzata con opportuni operatori in uno spazio di Hilbert, nel caso di una particella. Ci limitiamo qui a un breve accenno al procedimento di Schrödinger, rinviando al corso di meccanica quantistica per una trattazione più generale. Schrödinger considera lo spazio di Hilbert delle funzioni complesse<sup>41</sup> aventi per dominio  $\mathbb{R}^3$  (cioè lo spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ ), ovvero funzioni complesse del tipo  $\psi(x, y, z)$  (lettera greca psi). Allora è evidente che si soddisfa la regola di quantizzazione realizzando gli operatori  $\hat{x}_j, \hat{p}_j$  nel modo

<sup>38</sup>Si tratta del celebre *dreimännerarbeit*: M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, *Zur Quantenmechanik*, *Zeitschr. für Physik* **35** 557–615 (1926); traduzione inglese in van der Waerden, *Sources of quantum mechanics*, Dover (New York, 1968), pag. 321. Si veda anche P.A.M. Dirac, *The fundamental equations of quantum mechanics*, *Proc. Royal Soc. A* **109**, 642–653 (1926), riprodotto in van der Waerden, pag. 307.

<sup>39</sup>Nel caso di un solo grado di libertà,  $n = 1$ , le prime due relazioni sono ovvie, perché ogni operatore commuta con se stesso. Il cuore di tutto è quindi la terza relazione. Il modo in cui Born, Heisenberg e Jordan vi pervennero, connesso alle cosiddette *regole di somma*, appare ancor oggi stupefacente.

<sup>40</sup>Si noti che il commutatore  $[\hat{x}_j, \hat{p}_k]$  ha le dimensioni di una azione (energia  $\times$  tempo), perché, come già osservato, il prodotto  $p\dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}$  ha le dimensioni della lagrangiana  $L$ , cioè di una energia. Invece, la parentesi di Poisson  $\{f, g\}$  di due generiche funzioni ha le dimensioni del prodotto  $fg$ , divise per una azione: in particolare dunque la parentesi di Poisson  $\{q_j, p_k\}$  è un puro numero.

<sup>41</sup>Con la proprietà di normalizzazione  $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 dx dy dz = 1$ .

seguinte:

$$\begin{aligned}\hat{x}_j \psi(x, y, z) &= x_j \psi(x, y, z) , \\ \hat{p}_j \psi(x, y, z) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x, y, z) .\end{aligned}\tag{2.3.17}$$

Infatti, consideriamo per semplicità un sistema costituito da un punto su una retta. Denotando  $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ , si ha ad esempio  $\partial_x(x\psi) = \psi + x\partial_x\psi$  ovvero  $x\partial_x\psi - \partial_x(x\psi) = -\psi$ ; dunque, per l'arbitrarietà di  $\psi$ , si ha l'identità operatoriale

$$\hat{x}\partial_x - \partial_x\hat{x} = -I ,$$

dove  $I$  denota l'operatore identità. Pertanto, moltiplicando per  $-i\hbar$  e definendo  $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$ , questa relazione di commutazione diventa

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar I$$

che è proprio quella richiesta da Born, Heisenberg, Jordan e Dirac. Analogamente per le altre relazioni di commutazione per una particella nello spazio.

In tal modo, l'operatore corrispondente all'hamiltoniana classica

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

diventa

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) .\tag{2.3.18}$$

Analogamente, per una particella nello spazio riferita a coordinate cartesiane ortogonali, all'hamiltoniana classica

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z)$$

viene a corrispondere l'operatore

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) ,\tag{2.3.19}$$

dove

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

è l'operatore laplaciano.

Si capisce così come sia possibile trasportare agli operatori quantistici tutte le proprietà che, per le variabili dinamiche classiche, sono state dimostrate facendo uso della struttura algebrica delle parentesi di Poisson (cioè senza fare riferimento alla particolare realizzazione di quella struttura mediante la definizione di parentesi di Poisson, che coinvolge nozioni relative allo spazio delle fasi classico),

**Esercizio.** Osserviamo che, poiché la componente  $L_z$  del momento angolare di una particella è definita classicamente da

$$L_z = xp_y - yp_x ,$$

il corrispondente operatore quantistico risulta definito da<sup>42</sup>

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x ,$$

e analogamente per le altre componenti. Si controlli allora che si ha

$$\begin{aligned} [\hat{p}_x, \hat{L}_z] &= -i\hbar \hat{p}_y , & [\hat{p}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar p_x , & [\hat{p}_z, \hat{L}_z] &= 0 \\ [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z & & & & \\ [\hat{L}_x, \hat{L}^2] &= [\hat{L}_y, \hat{L}^2] = [\hat{L}_z, \hat{L}^2] &= 0 . & & & \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Usando le relazioni classiche (2.3.13) si constata poi che, per una particella in un potenziale a simmetria sferica, si ha

$$[\hat{\mathbf{L}}, \hat{H}] = 0 , \quad [\hat{L}^2, \hat{H}] = 0 . \quad (2.3.21)$$

Si constata pertanto che vale la seguente<sup>43</sup>

**Regola di quantizzazione:** per ottenere il commutatore di due operatori quantistici, basta considerare la parentesi di Poisson delle corrispondenti variabili dinamiche classiche, moltiplicarla per la costante  $i\hbar$  e sostituire le variabili dinamiche con i corrispondenti operatori (cioè aggiungere il cappuccio).

Si osservi che questa è proprio la regola con cui sono stati ottenuti i commutatori fondamentali a partire dalle parentesi di Poisson fondamentali. In effetti, ciò è dimensionalmente consistente, perché è già stato osservato in una nota che il commutatore e la parentesi di Poisson di quantità corrispondenti differiscono dimensionalmente per una azione.

## 2.4 Le trasformazioni canoniche

### 2.4.1 Il problema

In ambito lagrangiano avevamo considerato cambiamenti di coordinate nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , ovvero  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})$ , o equivalentemente  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q})$ , poiché si assume che le trasformazioni siano invertibili. Naturalmente

<sup>42</sup>Si noti che nel passare dalla variabile dinamica classica al corrispondente operatore non si hanno ambiguità, perché l'ordine dei fattori è irrilevante, dato che gli operatori che intervengono commutano.

<sup>43</sup>In effetti, le cose sono più complicate, perché il procedimento appena descritto non risulta univoco quando nella variabile dinamica classica che si deve quantizzare si presenta un prodotto (come  $xp_x$ ) di due quantità che non commutano. Si usano allora dei *procedimenti di simmetrizzazione*. Ad esempio,  $xp_x$  viene sostituito da  $(xp_x + p_x x)/2$ .

questi cambiamenti di coordinate comportano corrispondenti cambiamenti di coordinate per le velocità  $\dot{\mathbf{q}}$  e per i momenti  $\mathbf{p}$ . Per quanto riguarda le velocità abbiamo infatti

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbb{J}\dot{\mathbf{Q}}, \quad \text{ovvero} \quad \dot{q}_i = \sum_k \mathbb{J}_{ik}\dot{Q}_k, \quad (2.4.1)$$

dove

$$\mathbb{J} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}} \quad (2.4.2)$$

è la matrice jacobiana della trasformazione.<sup>44</sup> Per quanto riguarda i momenti si trova invece una legge di trasformazione meno immediata, precisamente

$$\mathbf{P} = \mathbb{J}^T \mathbf{p}, \quad \text{ovvero} \quad P_i = \sum_k \mathbb{J}_{ki}p_k, \quad (2.4.3)$$

(dove  $T$  indica trasposizione). Infatti, usando la formula di derivata di funzione composta, e usando anche  $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{Q}}$  (che segue da (2.4.1) e (2.4.2)), si ha

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} p_k.$$

**Esempio: riscaldamento.** Per un sistema a un solo grado di libertà, consideriamo il riscaldamento

$$q = aQ, \quad (a \neq 0).$$

Si ha allora evidentemente

$$\dot{q} = a\dot{Q},$$

ma si ha invece

$$p = \frac{1}{a}P.$$

Infatti i momenti sono definiti attraverso un'operazione di derivazione, derivando la lagrangiana rispetto alle velocità, e d'altra parte si ha (per il teorema di derivata di funzione composta)

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}},$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}},$$

---

<sup>44</sup>Abbiamo considerato ripetutamente l'esempio del passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari nel piano,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

in cui si ha (si pensi  $r = r(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ )

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

vale a dire  $p = (1/a)P$ , coerentemente con quanto affermato sopra in generale.

**Applicazione: “raddrizzamento” dell’oscillatore armonico.** Abbiamo già visto che per l’oscillatore armonico l’hamiltoniana è data da

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + kq^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2 \right),$$

dove si è introdotta la frequenza angolare  $\omega$  definita da  $\omega^2 = k/m$  (ovvero  $k = m\omega^2$ ). L’hamiltoniana presenta una forma più simmetrica se si fattorizza  $\omega$ , perchè essa assume allora la forma

$$H(q, p) = \frac{\omega}{2} \left( \frac{p^2}{m\omega} + m\omega q^2 \right). \quad (2.4.4)$$

È pertanto spontaneo introdurre la nuova variabile  $Q = \sqrt{m\omega} q$ , sicché, come appena visto, il nuovo momento  $P$  deve essere riscaloato con il fattore inverso, ovvero si deve prendere

$$Q = \sqrt{m\omega} q, \quad P = p/\sqrt{m\omega}. \quad (2.4.5)$$

D’altra parte sappiamo a priori, per il modo in cui abbiamo dedotto le equazioni di Hamilton, che nelle nuove variabili si hanno ancora le equazioni di Hamilton con una hamiltoniana che è nient’altro che quella vecchia espressa in termini delle nuove coordinate e dei nuovi momenti. Nel nostro caso si ha dunque

$$H(P, Q) = \frac{\omega}{2} (P^2 + Q^2), \quad (2.4.6)$$

sicché le curve di livello dell’energia nelle nuove variabili sono state raddrizzate, cioè sono dei cerchi invece che delle ellissi.

Cambiamenti di variabili sulle  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ( o sulle  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  ) di questo tipo, ovvero “naturalmente” indotti da cambiamenti di variabili sulle sole  $\mathbf{q}$ , vengono dette **trasformazioni puntuali estese**.<sup>45</sup> Sappiamo allora che nelle nuove variabili le equazioni hanno ancora la forma di Lagrange o di Hamilton, con riferimento a nuove funzioni di Lagrange e di Hamilton che si ottengono da quelle originali semplicemente per sostituzione di variabili (funzioni composte).

Tuttavia, è spesso utile considerare cambiamenti di variabili di tipo più generale, in cui le variabili  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  vengano mescolate liberamente,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

ed allora in generale avviene che le equazioni nelle nuove variabili non hanno più forma hamiltoniana.

**Esempio.** Consideriamo l’oscillatore armonico monodimensionale con hamiltoniana (denotiamo qui con  $p, q$  le variabili che avevamo denotato con  $P, Q$  in (2.4.6))

$$H(p, q) = \frac{\omega}{2} (p^2 + q^2), \quad \omega = \text{costante}. \quad (2.4.7)$$

<sup>45</sup>Il nome è dovuto al fatto che le trasformazioni sullo spazio delle fasi sono indotte a partire da cambiamenti effettuati soltanto sulle coordinate  $\mathbf{q}$  che individuano un *punto* dello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ .

Sembrerebbe molto spontaneo operare un cambiamento di variabili a coordinate polari nel piano delle variabili  $q, p$  (spazio delle fasi), precisamente

$$\begin{aligned} q &= r \sin \varphi \\ p &= r \cos \varphi , \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

ovvero

$$r^2 = p^2 + q^2 , \quad \varphi = \arctan (q/p)$$

(si noti  $r^2 = 2E/\omega$ ). Ora, si potrebbe ingenuamente immaginare che nelle nuove variabili le equazioni di moto abbiano ancora forma hamiltoniana, con una nuova hamiltoniana  $K(r, \varphi)$  ottenuta dalla vecchia per sostituzione di variabili, ovvero

$$K(r, \varphi) = \frac{\omega}{2} r^2 . \tag{2.4.9}$$

Ma ciò non è vero. Infatti, se così fosse, allora le equazioni di moto sarebbero

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial K}{\partial r} , \quad \dot{r} = -\frac{\partial K}{\partial \varphi} ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= \omega r , \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

mentre sappiamo che per l'oscillatore armonico le equazioni di moto nelle variabili  $r, \varphi$  sono

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= \omega . \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Infatti, l'equazione  $\dot{r} = 0$  esprime la conservazione dell'energia, mentre l'equazione  $\dot{\varphi} = \omega$  (=costante) descrive il fatto che i movimenti sono *isocroni*, cioè hanno tutti il medesimo periodo, indipendente dall'ampiezza. In altri termini, il flusso è una rotazione uniforme con velocità angolare  $\omega$ .<sup>46</sup>

Si controlla immediatamente che la corretta variabile coniugata a  $\varphi$  non è  $r = \sqrt{p^2 + q^2}$ , ma bensì la quantità  $I := \frac{r^2}{2} \equiv \frac{p^2 + q^2}{2} = \frac{E}{\omega}$ , che ha le dimensioni di una azione (come sappiamo che deve essere, perché il prodotto  $pq$  ha le dimensioni di una azione, e qui  $q$  è un angolo, che è adimensionale). Ovvero, il corretto cambiamento di variabili è  $(q, p) \rightarrow (\varphi, I)$ , dove

$$I = \frac{p^2 + q^2}{2} , \quad \varphi = \arctan \frac{q}{p} ,$$

---

<sup>46</sup>Più direttamente, le equazioni di moto

$$\dot{q} = \omega p , \quad \dot{p} = -\omega q$$

hanno per soluzione del problema di Cauchy

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + p_0 \sin \omega t , \quad p(t) = -q_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t .$$

con inversa

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{2I} \sin \varphi \\ p &= \sqrt{2I} \cos \varphi . \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Infatti, se si usano le nuove variabili  $(I, \varphi)$  definite da (2.4.12), la hamiltoniana  $K$  che si ottiene da  $H$  per sostituzione di variabili assume la forma  $K(r, \varphi) = \omega I$ , cui corrispondono le equazioni di Hamilton  $\dot{I} = 0$  (e dunque  $\dot{r} = 0$ ),  $\dot{\varphi} = \omega$ , che sono le corrette equazioni del moto. Questo fatto verrà confermato nel prossimo paragrafo usando la tecnica della funzione generatrice.

In questo caso abbiamo dunque determinato un interessante cambiamento di variabili che non è del tipo puntuale esteso, ma tuttavia ha la proprietà che le equazioni sono ancora in forma di Hamilton, e per di più con la nuova hamiltoniana che coincide con quella originale (a meno di sostituzione di variabili). Ciò però è avvenuto perché la scelta delle variabili è stata compiuta in una maniera ben particolare.

**Generalizzazione: il problema delle variabili angolo-azione.** Nell'esempio dell'oscillatore armonico siamo riusciti a determinare quale è la giusta variabile coniugata alla variabile angolare  $\varphi$  nel piano delle fasi: si tratta dell'azione  $I$  (si ricordi che in generale il prodotto  $p_i q_i$  ha le dimensioni di una azione, e quindi  $I$  è una azione, perché è coniugata all'angolo, che è adimensionale). Il fatto più interessante è però che in tal modo la nuova hamiltoniana, che chiameremo ancora  $H$ , che a priori era una funzione delle due variabili  $\varphi, I$ , in effetti dipende solo da una delle due variabili, ovvero dall'azione:  $H = H(I)$ . Una situazione di questo genere realizza l'ideale massimo che si può ottenere mediante cambiamenti di variabili, perché mette subito in rilievo che la  $I$  stessa è una costante del moto (infatti,  $\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$ .)

Più in generale, per un sistema a  $n$  gradi di libertà ci si pone il problema se sia possibile trovare un cambiamento di coordinate tale che le nuove equazioni siano ancora in forma hamiltoniana, inoltre metà delle variabili siano angoli  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  (sicché le restanti variabili  $I = (I_1, \dots, I_n)$  coniugate agli angoli sono azioni) e infine la nuova hamiltoniana dipenda solo dalle azioni:

$$H = H(I) .$$

Se ciò avviene si dice che il sistema ammette *variabili angolo-azione*. In tal caso i movimenti sono particolarmente semplici, perché si ha

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) \quad \text{dove} \quad \omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I} , \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

e dunque

$$I(t) = I_0 , \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \quad \text{dove} \quad \omega_0 = \omega(I_0) . \quad (2.4.14)$$

Si noti che nelle relazioni precedenti sia le azioni  $I$  sia gli angoli  $\varphi$  sono  $n$ -uple,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ,  $I = (I_1, \dots, I_n)$ , e così anche la frequenza,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , con  $\omega_k = \frac{\partial H}{\partial I_k}$ .



Si ha dunque anzitutto il problema di caratterizzare delle “buone” trasformazioni di variabili coinvolgenti liberamente le  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Si pone la

**Definizione:** Siano date, nello spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  di un sistema hamiltoniano, delle coordinate  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ottenute “naturalmente” a partire da arbitrarie coordinate  $\mathbf{q}$  nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ . Si considerino poi tutte le possibili trasformazioni di coordinate  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  nello spazio delle fasi, coinvolgenti liberamente le coordinate  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , eventualmente dipendenti parametricamente dal tempo. Tra tutte queste trasformazioni vengono dette **trasformazioni canoniche** quelle caratterizzate dalla proprietà che, **qualunque sia la hamiltoniana originale  $H = H(\mathbf{x}, t)$ , le equazioni di moto nelle nuove coordinate abbiano ancora forma di Hamilton con una opportuna hamiltoniana  $K = K(\mathbf{X}, t)$ .**

Le trasformazioni canoniche sono particolarmente utili sotto molti punti di vista, ad esempio per i calcoli che si incontrano nella teoria delle perturbazioni. Così, alcuni teoremi fondamentali della teoria delle perturbazioni si ottengono in maniera abbastanza semplice in ambito hamiltoniano, mentre hanno richiesto sforzi enormi a grandissimi studiosi come Lagrange e Laplace, che non erano ancora in possesso di tale formalismo. Lo studio delle trasformazioni canoniche può essere compiuto in maniera compatta e brillante se si dispone degli strumenti geometrici sottostanti il formalismo hamiltoniano cui si è già fatto riferimento. In queste note ci limitiamo a una presentazione delle trasformazioni canoniche che fa riferimento alla tecnica tradizionale delle funzioni generatrici, illustrato nel prossimo paragrafo.

## 2.4.2 La tecnica delle funzioni generatrici

Vi sono diversi modi equivalenti di caratterizzare le trasformazioni canoniche: mediante ciascuno di tali modi, data una particolare trasformazione, è in linea di principio possibile *controllare* se la trasformazione è canonica. Esiste invece una caratterizzazione che è anche di tipo costruttivo, cioè permette in concreto di generare trasformazioni canoniche convenienti. Si tratta del cosiddetto **metodo della funzione generaltrice**, che ora passiamo ad esporre.

Nel capitolo sui Principi Variazionali verrà mostrato che le trasformazioni canoniche si costruiscono in maniera esplicita mediante una funzione generatrice  $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Precisamente, si dimostra che affinché la trasformazione  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  sia canonica, deve esistere, per ogni hamiltoniana  $H$ , una nuova hamiltoniana  $K$  tale che si abbia

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - (H - K)dt = dF, \quad (2.4.15)$$

con una opportuna funzione  $F$  (detta funzione generatrice). In altri termini, deve essere possibile determinare una funzione  $K$  tale che la forma differenziale del primo ordine (o 1-forma) definita dal primo membro della (2.4.15) sia un differenziale esatto. La condizione (2.4.15) viene detta **condizione di**

**Lie.** Mostriamo ora come questa condizione permetta di costruire concretamente le trasformazioni mediante operazioni di derivazione (più inversione) su una “arbitraria” funzione.

Naturalmente, nella (2.4.15) si intende che le variabili indipendenti siano  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , e le altre quantità (come  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, H, K$  ed  $F$ ) siano funzioni di queste. D'altra parte, si osserva che la struttura stessa della (2.4.15) “invita” a prendere in considerazione quella sottoclasse di trasformazioni in cui si possono scegliere  $(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$  come variabili indipendenti in luogo di  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

Per comprendere cosa questo significhi, consideriamo l'esempio del passaggio dalle coordinate cartesiane a quelle polari nel piano. Per un punto generico del piano (diverso dall'origine delle coordinate) passano le linee coordinate  $x, y$  (retta orizzontale, retta verticale) e le linee coordinate  $r, \varphi$  (raggio, cerchio). Ora, affinché due variabili costituiscano un buon sistema di coordinate in un aperto  $D$ , l'unica proprietà che si richiede è che in ogni punto di  $D$  le linee coordinate non siano tangenti (perché si vuole che muovendosi liberamente lungo le due linee si possa esplorare un dominio bidimensionale). È quindi evidente che le coordinate  $(x, y)$  sono buone coordinate in tutto il piano (sono *globali*, come si dice), mentre esistono aperti in cui sono buone coordinate anche le coordinate  $(x, \varphi)$  oppure le coordinate  $(x, r)$ . Infatti, considerando ad esempio le prime, è evidente che, tranne che sulla retta  $x = 0$ , le linee coordinate  $x$  e  $\varphi$  si tagliano trasversalmente.<sup>47</sup> Dal punto di vista analitico, la possibilità di prendere  $(x, \varphi)$  come variabili indipendenti in luogo di  $(r, \varphi)$  corrisponde al fatto che nell'espressione del cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

si ha  $\frac{\partial x}{\partial r} \neq 0$  (per  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ , cioè fuori dall'asse  $x = 0$ ), per cui si può invertire la prima delle (2.4.16) ottenendo  $r = \frac{x}{\cos \varphi}$ , e la seconda diviene allora, per sostituzione,  $y = x \tan \varphi$ .

Tornando alla (2.4.15), con riferimento al cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

<sup>47</sup>Un disegno delle linee coordinate mostra a colpo questo fatto. Diamone comunque anche una verifica formale. Con le notazioni del capitolo sulle equazioni di Lagrange, la formula di immersione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, \varphi)$  è data da  $\mathbf{x} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}x \tan \varphi$  (si ricordi  $y = x \tan \varphi$ ). Dunque i vettori coordinati sono

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \tan \varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \mathbf{j} \frac{x}{\cos^2 \varphi}.$$

Per controllare se le linee coordinate si tagliano trasversalmente, basta controllare che sia non nullo il prodotto vettore dei due vettori coordinati. D'altra parte tale prodotto vettore è dato da

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \frac{x}{\cos^2 \varphi} \mathbf{k},$$

e quindi si annulla solo sull'asse  $x = 0$ .

ammetteremo che esista un aperto in cui si possano prendere  $(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$  come variabili indipendenti in luogo di  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Ciò è equivalente a richiedere che in tale aperto sia

$$\det \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \neq 0, \quad (2.4.18)$$

sicché dalla seconda delle (2.4.17) si ottiene

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t). \quad (2.4.19)$$

Infine denotiamo

$$F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) := F(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}), t), \quad (2.4.20)$$

dove  $F$  è la funzione la cui esistenza è garantita dall'ipotesi che sia soddisfatta la condizione di Lie (2.4.15). La condizione di Lie assume dunque la forma

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - (H - K)dt = dF_1. \quad (2.4.21)$$

Da tale condizione, scrivendo

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} + \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}} \cdot d\mathbf{Q} + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt,$$

per confronto con la (2.4.21) si ottiene subito

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = - \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (2.4.22)$$

In questo modo, eseguendo delle derivate sulla funzione  $F_1$  si ottiene  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ , ovvero si ottiene la trasformazione canonica considerata, a meno dell'inversione  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ; la possibilità di questa inversione è garantita in virtù della (2.4.18) perché  $\det \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}} = \left( \det \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} \right)^{-1}$ . Inoltre la condizione (2.4.18) si esprime, in termini della "funzione generatrice"  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  nella forma

$$\det \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{Q}} \neq 0. \quad (2.4.23)$$

Viceversa, se si sceglie una arbitraria funzione  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  (detta funzione generatrice) soddisfacente la condizione di nondegenerazione (2.4.23), allora la condizione di Lie (2.4.15) è evidentemente soddisfatta per costruzione. Abbiamo così dimostrato il

**Teorema 2** *Per ogni funzione  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  soddisfacente la proprietà di nondegenerazione (2.4.23), la trasformazione  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , definita (ad ogni tempo  $t$ ) da*

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{P} = - \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{Q}}, \quad (2.4.24)$$

più inversione, è canonica, e ad ogni hamiltoniana  $H$  corrisponde una nuova hamiltoniana  $K$  definita da

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} .$$

In particolare, la nuova hamiltoniana  $K$  si ottiene dalla vecchia  $H$  per semplice sostituzione di variabili se la trasformazione non dipende dal tempo ( $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$ ).

**Esercizio: l'azione come variabile coniugata all'angolo nel piano delle fasi di un oscillatore armonico.** Per l'oscillatore armonico abbiamo osservato che, avendo già effettuato il riscaldamento che porta l'hamiltoniana nella forma simmetrica o "raddrizzata" (2.4.8),  $H = (\omega/2)(p^2 + q^2)$ , è spontaneo introdurre nel piano nelle fasi  $(q, p)$  due nuove coordinate  $(Q, P)$ , delle quali una (diciamo  $Q$ ) coincida con l'angolo  $\varphi$  definito nel piano delle fasi da

$$\frac{p}{q} = \cot \varphi . \quad (2.4.25)$$

Dunque poniamo  $Q \equiv \varphi$ . Il problema è allora come debba essere scelta la "buona" variabile  $P$  coniugata alla  $Q \equiv \varphi$ . Già sappiamo che  $P$  deve avere le dimensioni di una azione.<sup>48</sup>

Per determinare l'azione  $P$ , osserviamo che la definizione (2.4.25) di  $Q \equiv \varphi$  può essere scritta come

$$p = q \cot Q ,$$

che ha proprio la forma della prima delle (2.4.24),

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} , \quad F_1 = F_1(q, Q) .$$

La funzione  $F_1$  risulta dunque determinata, e si ha <sup>49</sup>

$$F_1(q, Q) = \frac{q^2}{2} \cot Q .$$

Resta allora determinata  $P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$ , ovvero

$$P = \frac{1}{2} q^2 (1 + \cot^2 Q) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) . \quad (2.4.26)$$

**Osservazione: l'analogo classico degli operatori di creazione e di distruzione.** È ben noto che il numero complesso  $z = x + iy$  corrisponde al vettore di componenti cartesiane  $(x, y)$  in un piano (piano di Argand–Gauss), e che il prodotto di un numero complesso  $z$  per il numero  $e^{i\alpha}$  corrisponde a ruotare il vettore di angolo  $\alpha$ . Quindi la rappresentazione dei punti di un piano cartesiano mediante

<sup>48</sup>Perché il prodotto  $PQ$  ha le dimensioni di una azione, e l'angolo  $Q \equiv \varphi$  è adimensionale.

<sup>49</sup>Si avrebbe in effetti la possibilità di aggiungere a  $F_1$  una arbitraria funzione  $G = G(Q)$ . Si vede immediatamente che si ottiene in tal modo una nuova azione  $\tilde{P} = P + f(\varphi)$ , dove  $f$  è una arbitraria funzione dell'angolo  $\varphi$ .

numeri complessi è particolarmente utile quando si abbia a che fare con rotazioni nel piano,<sup>50</sup> come avviene per l'oscillatore armonico. Infatti abbiamo già osservato che per l'oscillatore armonico raddrizzato, ovvero con hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2), \quad (2.4.27)$$

il flusso nel piano delle fasi è una rotazione uniforme di velocità angolare  $\omega$ .

Nello studio dell'oscillatore armonico è dunque spontaneo introdurre la variabile complessa

$$z = \frac{p + iq}{\sqrt{2}}.$$

Si pone allora il problema di completare la trasformazione scegliendo opportunamente la variabile  $w$  coniugata alla  $z$ .

**Esercizio.** Si dimostri che il cambiamento di variabili  $(q, p) \rightarrow (z, w)$  con

$$z = \frac{p + iq}{\sqrt{2}}, \quad w = -i \frac{p - iq}{\sqrt{2}} = -i \bar{z} \quad (2.4.28)$$

(dove  $\bar{z}$  è il complesso coniugato di  $z$ ) è canonico. Si trova quindi che nelle nuove variabili le equazioni sono ancora in forma di Hamilton, con hamiltoniana ottenuta da quella originale (2.4.27) semplicemente per sostituzione di variabili

$$H = i\omega zw \quad (\equiv \omega z\bar{z}).$$

**Svolgimento.** In analogia con l'esercizio precedente, si fa svolgere a  $z$  il ruolo di  $Q$ , e quindi conviene invertire la definizione di  $z$ , ottenendo

$$p = \sqrt{2} z - iq.$$

Per confronto con  $p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$  si ottiene allora<sup>51</sup>

$$F_1(q, z) = i\left(\frac{z^2}{2} - \frac{q^2}{2}\right) + \sqrt{2} zq.$$

Si trova allora per  $w = -\frac{\partial F_1}{\partial z}$  l'espressione  $w = -iz - \sqrt{2}q$  ovvero

$$w = \frac{-ip - q}{i\sqrt{2}} = -i\bar{z}.$$

**Osservazione.** Nei testi di meccanica quantistica, a partire da quello classico di Dirac, si introducono (a meno di una costante moltiplicativa) le variabili

$$a \equiv z, \quad a^\dagger \equiv \bar{z}.$$

<sup>50</sup>È un utile esercizio ritrovare le note formule per le componenti radiale e trasversa della velocità e dell'accelerazione, rappresentando il moto  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  come moto nel piano complesso

$$x(t) + iy(t) = z(t) = \rho(t)e^{i\vartheta(t)}.$$

<sup>51</sup>Si è scelta la costante arbitraria come data da  $iz^2/2$ .

Ovviamente, questa trasformazione non è canonica, e le equazioni di moto, come subito si controlla, sono ora della forma<sup>52</sup>

$$\dot{a} = i \frac{\partial H}{\partial a^\dagger}, \quad \dot{a}^\dagger = -i \frac{\partial H}{\partial a}.$$

Le variabili  $a^\dagger$  ed  $a$ , quando vengono quantizzate, svolgono il ruolo rispettivamente di operatori di creazione e di distruzione, in un senso che qui non possiamo spiegare.

**Osservazione.** Si noti che la trasformazione a variabili complesse (2.4.28) viene impiegata non soltanto in connessione con la meccanica quantistica, ma anche molto comunemente in ambito puramente meccanico, come passaggio preliminare per la teoria delle perturbazioni,

Abbiamo dunque trovato una classe di trasformazioni canoniche che vengono concretamente costruite in termini di una arbitraria funzione generatrice  $F_1 = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ . La classe di trasformazioni canoniche così definita è interessante, ma non contiene le trasformazioni più significative per la teoria delle perturbazioni, ovvero le “trasformazioni prossime all’identità”. Infatti non vi appartiene neppure la trasformazione identica  $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{p}$ , perché per essa si ha  $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} = 0$ , ed è dunque violata la condizione di nondegenerazione. Si tratta allora di trovare anzitutto una funzione generatrice per la trasformazione identità, e ciò si ottiene osservando che per tale trasformazione è invece  $\det \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} \neq 0$ , perché  $\frac{\partial P_i}{\partial p_k} = \delta_{ik}$ . Dunque per generare la trasformazione identità sarà conveniente assumere  $(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  anziché  $(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$  come coppia di variabili indipendenti in luogo delle originarie  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . L’esperienza che abbiamo sulla trasformata di Legendre ci mostra subito come procedere partendo dalla condizione di Lie (2.4.15). Volendo sostituire  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  come variabile indipendente, si utilizza l’identità

$$\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) - \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P}, \quad (2.4.29)$$

sicché la condizione di Lie prende la forma

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P} - (H - K)dt = dF_2, \quad F_2 = F + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}. \quad (2.4.30)$$

È allora evidente, per analogia con quanto visto sopra, che si ha il

**Teorema 3** Per ogni funzione  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  soddisfacente la proprietà di nondegenerazione

$$\det \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}} \neq 0, \quad (2.4.31)$$

la trasformazione  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , definita (ad ogni tempo  $t$ ) da

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}} \quad (2.4.32)$$

<sup>52</sup>Qui abbiamo denotato

$$\dot{a}^\dagger \equiv \frac{da^\dagger}{dt}.$$

più inversione, è canonica, e la nuova hamiltoniana  $K$  è data da

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} .$$

In particolare, la nuova hamiltoniana  $K$  si ottiene dalla vecchia  $H$  per semplice sostituzione di variabili se la trasformazione non dipende dal tempo ( $\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$ ).

Il primo importante esempio è il seguente.

**Esempio: la trasformazione identica e quella di riscaldamento.** La funzione generatrice

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q} \quad (2.4.33)$$

produce la trasformazione identica  $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{p}$ . Questo è un caso particolare della trasformazione di riscaldamento

$$\mathbf{Q} = a \mathbf{q} , \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}/a ,$$

che è pure canonica (si prenda la funzione generatrice  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = a \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}$ ).

L'esempio seguente svolge un ruolo fondamentale nella teoria delle perturbazioni. Ricordiamo che una trasformazione generale della forma

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q} + \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P} + \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) , \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

con  $\epsilon$  "piccolo", e funzioni (vettoriali)  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  arbitrarie, viene detta *trasformazione prossima all'identità*. Si ha allora il *problema* di generare le trasformazioni prossime all'identità che siano canoniche.

**Esempio: trasformazioni canoniche prossime all'identità.** Dato che la funzione generatrice  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q}$  produce la trasformazione identità (corrispondente a  $\epsilon = 0$ ), prenderemo

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q} + \epsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad (2.4.35)$$

con  $G$  "arbitraria". Le (2.4.32) forniscono allora la trasformazione canonica definita implicitamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{q} + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{P} + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) . \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

Si noti che, essendo  $\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \delta_{ij} + \epsilon \frac{\partial G_i}{\partial p_j}$ , banalmente per continuità si deduce che si ha  $\det \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}} \neq 0$  per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo (operando in un dominio limitato). Dunque si può invertire la seconda delle (2.4.36). Facendo anche uso di

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = G(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + O(\epsilon) ,$$

si ottiene infine

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \mathbf{q} + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + O(\epsilon^2) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p} - \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + O(\epsilon^2) .\end{aligned}\tag{2.4.37}$$

Confrontiamo ora la trasformazione canonica generata dalla funzione  $G(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ , con la trasformazione indotta al tempo  $\epsilon$  dalle soluzioni delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Ciò vuol dire che si considerano le equazioni di Hamilton  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}$ ,  $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}$ , e poi si considera la soluzione  $\mathbf{q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$ ,  $\mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$  corrispondente al dato iniziale  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{p}_0$ , e la si valuta al tempo  $t = \epsilon$ . Coerentemente con la terminologia che verrà impiegata nei prossimi paragrafi, questa famiglia di trasformazioni (dipendente dal parametro  $\epsilon$ ) viene detta *flusso (nello spazio delle fasi) generato da  $G$* , e viene denotata con  $\Phi_G^\epsilon$ . Allora si ha evidentemente

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \epsilon) &= \mathbf{q}_0 + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + O(\epsilon^2) , \\ \mathbf{p}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \epsilon) &= \mathbf{p}_0 - \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) + O(\epsilon^2)\end{aligned}\tag{2.4.38}$$

Confrontando la (2.4.37) e la (2.4.38) si ottiene allora la seguente

**Proposizione 1** *Per ogni funzione  $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , ed  $\epsilon$  sufficientemente piccolo, la trasformazione canonica ottenuta dalla funzione generatrice (2.4.35) mediante la (2.4.36) coincide, a meno di termini dell'ordine di  $\epsilon^2$ , con il flusso al tempo  $\epsilon$  generato dalla hamiltoniana  $G$ .*

Il fatto appena dimostrato suggerisce che, ad ogni tempo  $t$ , la trasformazione indotta dalle soluzioni delle equazioni da Hamilton con una qualsiasi hamiltoniana  $H$  sia esattamente una trasformazione canonica (con una opportuna funzione generatrice). Detto concisamente, si suggerisce che il flusso  $\Phi_H^t$  sia una famiglia di trasformazioni canoniche. Ciò sarà dimostrato nel capitolo sui principi variazionali. Si darà pure una caratterizzazione della corrispondente funzione generatrice, che risulterà coincidere con la azione hamiltoniana  $S$ .

Notiamo che il procedimento che genera le trasformazioni canoniche prossime all'identità mediante flussi al tempo  $\epsilon$  di un sistema hamiltoniano ha il vantaggio, rispetto a quello tradizionale della funzione generatrice, di non richiedere l'inversione di un sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite. Esso è stato adottato recentemente nella teoria delle perturbazioni hamiltoniane.<sup>53</sup> Il corrispondente metodo viene talvolta chiamato metodo di Lie.

In appendice viene riportata una discussione dei sistemi integrabili, dell'equazione di Hamilton–Jacobi e della teoria delle perturbazioni.<sup>54</sup>

<sup>53</sup>Si veda ad esempio G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J. M. Strelcyn, *A proof of Kolmogorov's theorem by the Lie method*, Nuovo Cimento 1985.

<sup>54</sup>Non ancora disponibile nella presente versione delle note.



## 2.5 Simmetrie e costanti del moto: il teorema di Noether. Gruppi di trasformazioni nello spazio delle fasi e loro generatori

### 2.5.1 Motivazione

Abbiamo già osservato, nei richiami sulle equazioni di Newton, e poi nel capitolo sulle equazioni di Lagrange, come la presenza di costanti del moto sia legata a proprietà di simmetria del sistema considerato. Infatti, dalle equazioni di Lagrange  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  (dove  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  è il momento coniugato a  $q_i$ ) segue che ad esempio la proprietà  $\dot{p}_1 = 0$  è equivalente a  $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$ . In altri termini, il momento coniugato alla variabile  $q_1$  è una costante del moto se e solo se la lagrangiana non dipende da  $q_1$ .<sup>55</sup> D'altra parte, la circostanza che si abbia  $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$  può anche esprimersi dicendo che la funzione  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  è invariante per traslazioni lungo l'asse  $q_1$  (il valore di  $L$  non cambia se si incrementa la variabile  $q_1$  lasciando invariate tutte le altre) o anche che la lagrangiana è simmetrica per traslazioni della variabile  $q_1$ . In questo senso si ha una relazione evidente tra esistenza di costanti del moto e proprietà di simmetria della lagrangiana.

**Osservazione.** Conviene qui ricordare che una trasformazione

$$\mathbf{Q} = f(\mathbf{q})$$

sulle variabili  $\mathbf{q}$ , come ad esempio la traslazione lungo  $q_1$  (ovvero la trasformazione  $Q_1 = q_1 + h$ ,  $Q_i = q_i$  per  $i = 2, \dots, n$ , con  $h \in \mathbb{R}$ ) induce naturalmente una corrispondente trasformazione sulle velocità  $\dot{\mathbf{q}}$ , ottenuta semplicemente con la regola di derivazione di funzione composta, ovvero

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

(ad esempio, semplicemente la trasformazione identica  $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{q}}$  nel caso sopra citato della traslazione lungo  $q_1$ ). In modo analogo si induce naturalmente una trasformazione sui momenti  $\mathbf{p}$ . Tale trasformazione nello spazio degli stati (variabili  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ ) o nello spazio delle fasi (variabili  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ) naturalmente indotta da una trasformazione  $\mathbf{Q} = f(\mathbf{q})$  nello spazio delle configurazioni si dice talvolta *estensione o sollevamento o prolungamento* della corrispondente trasformazione nello spazio delle configurazioni. Il nome classico è *trasformazione puntuale estesa*.

Esempi tipici per una particella nello spazio.

- Invarianza della lagrangiana per traslazioni lungo l'asse delle  $x$ , Riferendosi a coordinate cartesiane ortogonali, ammettiamo che l'energia potenziale  $V(x, y, z)$  non dipenda da  $x$ :

$$V = V(y, z) \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 .$$

<sup>55</sup>Si usa anche dire, in tal caso, che la variabile  $q_1$  è *ciclica*.

Allora la lagrangiana è data da

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(y, z) .$$

Dunque la lagrangiana è invariante per traslazioni lungo l'asse delle  $x$ , ovvero si ha  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ . Ciò comporta  $\dot{p}_x = 0$ , ovvero si conserva (è costante del moto)  $p_x \equiv m\dot{x}$  (la quantità di moto lungo l'asse  $x$ ).

- Invarianza della lagrangiana per rotazioni attorno a un asse fisso, ad esempio l'asse  $z$ . Usando coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$  riferite all'asse  $z$ , ammettiamo che l'energia potenziale sia invariante per rotazioni all'asse  $z$ , cioè si abbia

$$V = V(r, z) \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 .$$

Si ha pertanto

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r, z) ,$$

e dunque  $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ , ovvero la lagrangiana è invariante per rotazioni attorno all'asse  $z$ . Ciò comporta  $\dot{p}_\varphi = 0$ , ovvero si conserva (è costante del moto) la variabile dinamica  $p_\varphi \equiv mr^2\dot{\varphi} \equiv L_z \equiv m(y\dot{z} - z\dot{y})$  (proiezione del momento angolare lungo l'asse  $z$ ).<sup>56</sup>

Dunque, per una particella nello spazio la simmetria della lagrangiana sotto traslazioni lungo un asse è equivalente alla conservazione della proiezione della quantità di moto lungo quell'asse, mentre la simmetria della lagrangiana sotto rotazioni attorno a un asse è equivalente alla conservazione della proiezione del momento angolare lungo quell'asse. Analogamente, avevamo mostrato che per un sistema lagrangiano generale la conservazione dell'energia generalizzata (ovvero dell'hamiltoniana) è equivalente al fatto che si abbia  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , cioè, nella terminologia ora adottata, al fatto che si abbia simmetria della lagrangiana per traslazioni lungo l'asse temporale.

Si vede dunque da questi esempi che l'esistenza di una costante del moto è equivalente a una corrispondente simmetria della lagrangiana nello spazio degli stati (con coordinate  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ); in effetti, nel caso dell'energia, abbiamo addirittura considerato la generalizzazione in cui tra le variabili si include anche il tempo). Intendiamo ora precisare queste nozioni ed enunciare delle precise relazioni tra esistenza di simmetrie ed esistenza di leggi di conservazione (o di costanti del moto). Questi fatti vengono illustrati nella maniera più semplice facendo riferimento alla formulazione della dinamica in forma

<sup>56</sup>Si ha

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} p_x + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\varphi}} p_y , \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

e dalla trasformazione a coordinate polari si ottiene  $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} = -y$ ,  $\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\varphi}} = x$ .

hamiltoniana nello spazio delle fasi (variabili  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ , eventualmente includendo tra le variabili anche il tempo  $t$ ).

### 2.5.2 Gruppi (a un parametro) di trasformazioni nello spazio delle fasi e loro generatori

Consideriamo un sistema fisico con il suo spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  riferito a coordinate canoniche  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{x}$ , e sia assegnata una hamiltoniana  $H = H(\mathbf{x})$ . Sappiamo allora che questa hamiltoniana induce dei corrispondenti movimenti  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  come soluzioni delle corrispondenti equazioni di Hamilton  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{E} \text{grad} H$  dove  $\mathbb{E}$  è la matrice simplettica standard definita più sopra, ovvero, più concretamente, le equazioni

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}.$$

Più, in generale, per ogni variabile dinamica  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , pensata come funzione composta del tempo, si ha allora

$$\dot{f} = \{f, H\}.$$

In particolare si osservi come, prendendo  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p_i$  oppure  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = q_i$ , si ottiene

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

sicché si trova che le equazioni di moto stesse assumono forma più simmetrica.

Se è assegnato un dato iniziale  $\mathbf{x}_0$ , sappiamo dunque che esiste una unica soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  che soddisfa la condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Qui abbiamo fissato il dato iniziale  $\mathbf{x}_0$  e seguito la corrispondente soluzione (il corrispondente “movimento”) man mano che scorre il tempo  $t$ . È significativo ora riguardare alla medesima situazione da un altro punto di vista, in qualche modo complementare. Si mette l’accento sul fatto che l’evoluzione è definita per tutti i possibili dati iniziali  $\mathbf{x}_0$ , cioè per tutti i punti dello spazio delle fasi  $\mathcal{F}$ . Man mano che scorre il tempo, tutti i punti dello spazio delle fasi si muovono insieme, similmente al modo in cui fluiscono i punti costituenti la superficie di un fiume. In altri termini, pensando al tempo  $t$  come a un parametro, si osserva il fluido ad ogni tempo  $t$  e si può fare l’analogo di una fotografia (una *istantanea*, come direbbe Einstein), che ci mostra dove sono finiti, a quel tempo, tutti i punti della superficie del fiume. In altri termini, ad ogni tempo  $t$  è determinata (mediante le soluzioni delle equazioni del moto in corrispondenza di tutti i punti iniziali possibili) una trasformazione dello spazio delle fasi in sé

$$\Phi^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

e si ha in tal modo (facendo variare il parametro  $t$ ) una *famiglia a un parametro* di trasformazioni (*mappings*) dello spazio delle fasi in sé, famiglia

indotta dalle equazioni di moto individuate dalla hamiltoniana  $H$  (ovvero, generata da  $H$ ). Anzi, per mettere in luce il fatto che questa famiglia  $\Phi^t$  è generata dall'hamiltoniana  $H$ , la denoteremo con

$$\Phi_H^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \quad (t \in \mathbb{R}) ,$$

e la chiameremo **flusso nello spazio delle fasi generato da  $H$** . Diremo anche che  $H$  è il generatore del flusso  $\Phi_H^t$ .

Osserviamo per inciso che, se  $H$  è indipendente dal tempo, si ha la fondamentale conseguenza<sup>57</sup> che il flusso generato da  $H$  è in effetti *un gruppo* (rispetto al tempo), cioè si ha

$$\Phi_H^{t+s} = \Phi_H^s \circ \Phi_H^t , \quad \Phi_H^0 = \text{Id}$$

(ovvero  $\Phi_H^{t+s}(\mathbf{x}) = \Phi_H^s(\Phi_H^t(\mathbf{x}))$ ).

Abbiamo dunque illustrato come, per un sistema fisico con un suo spazio delle fasi  $\mathcal{F}$ , ogni fissata hamiltoniana  $H$  genera un corrispondente flusso  $\Phi_H^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , o gruppo a un parametro di trasformazioni dello spazio delle fasi in sé. La generalizzazione cui veniamo ora consiste nell'osservare che il medesimo procedimento si può compiere quando in luogo di una fissata hamiltoniana  $H$  si considera una arbitraria *variabile dinamica*, ovvero una funzione  $G : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  a valori reali definita nello spazio delle fasi. La variabile dinamica  $G = G(\mathbf{x}) = G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  induce (o genera) una corrispondente equazione differenziale di tipo hamiltoniano  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{E} \text{grad } G$ , ovvero

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} , \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} ,$$

e un corrispondente flusso

$$\Phi_G^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Si dice che  $G$  è il generatore del gruppo a un parametro di trasformazioni  $\Phi_G^t$ .

**Osservazione: simmetrie e canonicità.** Nel capitolo sui principi variazionali mostreremo che, per il flusso  $\Phi_H^t$  generato da una hamiltoniana  $H$ , ogni trasformazione della famiglia, corrispondente a un valore fissato di  $t$ , è una trasformazione canonica. Dunque abbiamo che **il flusso generato da una hamiltoniana è un gruppo a un parametro di trasformazioni canoniche**. In conseguenza, anche i flussi generati da una arbitraria variabile dinamica  $G$  che svolge il ruolo di hamiltoniana, sono gruppi a un parametro di trasformazioni canoniche.

Esempi per una particella nello spazio (cioè con spazio delle configurazioni  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^3$ , e dunque con spazio delle fasi  $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ).

<sup>57</sup>Si tratta di un facilissimo esercizio, che sostanzialmente ammonta a dimostrare (denotando con  $t_0$  il generico tempo iniziale) che la soluzione  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  dipende dai due tempi  $t, t_0$  solo attraverso la loro differenza  $t - t_0$ , ovvero si ha  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t - t_0, \mathbf{x}_0)$ .

- Si prenda  $G(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = p_x$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} \dot{p}_x = \{p_x, p_x\} = 0, \dot{p}_y = \{p_y, p_x\} = 0, \dot{p}_z = \{p_z, p_x\} = 0, \\ \dot{x} = \{x, p_x\} = 1, \dot{y} = \{y, p_x\} = 0, \dot{z} = \{z, p_x\} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

sicché il gruppo  $\Phi_{p_x}^t$  è dato da

$$\Phi_{p_x}^t(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (x + t, y, z, p_x, p_y, p_z) .$$

Dunque il momento  $p_x$  genera le traslazioni lungo l'asse delle  $x$ .

- Si prenda  $G(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = L_z = (xp_y - yp_x)$ . Abbiamo già osservato che si ha

$$L_z \equiv p_\varphi ,$$

con riferimento a coordinate cilindriche rispetto all'asse  $z$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} \dot{p}_\varphi = \{p_\varphi, L_z\} = \{p_\varphi, p_\varphi\} = 0, \dot{p}_r = \{p_r, p_\varphi\} = 0, \dot{p}_z = \{p_z, p_\varphi\} = 0, \\ \dot{\varphi} = \{\varphi, p_\varphi\} = 1, \dot{r} = \{r, p_\varphi\} = 0, \dot{z} = \{z, p_\varphi\} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Dunque il gruppo  $\Phi_{p_\varphi}^t$  è dato da

$$\Phi_{p_\varphi}^t(r, \varphi, z, p_r, p_\varphi, p_z) = (r, \varphi + t, z, p_r, p_\varphi, p_z) .$$

e pertanto il momento angolare  $L_z \equiv p_\varphi$  genera le rotazioni attorno all'asse  $z$ .

### 2.5.3 Simmetrie e leggi di conservazione

Abbiamo ottenuto una completa analogia tra esistenza di costanti del moto ed esistenza di simmetrie, perché si tratta soltanto di due nomi diversi per una medesima proprietà: invarianza (o simmetria) di una variabile dinamica rispetto a un gruppo di trasformazioni.

Infatti, se pensiamo alla evoluzione “fisica” prodotta dalle forze, ovvero “generata” (nello spazio delle fasi) da una hamiltoniana  $H$ , allora diciamo che una variabile dinamica  $f = f(\mathbf{x})$  è una costante del moto se essa mantiene lo stesso valore lungo ogni soluzione delle corrispondenti equazioni di Hamilton, ovvero se si ha

$$f(\Phi_H^t \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \forall t$$

e questo è equivalente a  $\dot{f}_H = 0$ , dove si è denotato

$$\dot{f}_H = \{f, H\} .$$

Allo stesso modo possiamo avere che una variabile dinamica  $f$  sia costante del moto rispetto all'evoluzione indotta da una variabile dinamica  $G$ , cioè rispetto al gruppo  $\Phi_G^t$  generato da  $G$ :

$$f(\Phi_G^t \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \forall t$$

e in tal caso diciamo che  $f$  è invariante sotto tale gruppo di trasformazioni, ovvero che  $f$  è simmetrica rispetto al gruppo  $\Phi_G^t$ , ovvero che il gruppo  $\Phi_G^t$  è un gruppo di simmetria per  $f$ . Ovviamente tale proprietà è equivalente a  $\dot{f}_G = 0$ , dove si è denotato

$$\dot{f}_G = \{f, G\} .$$

Dunque per una variabile dinamica i nomi costante del moto o funzione simmetrica descrivono la medesima proprietà di invarianza rispetto a un gruppo a un parametro di trasformazioni; nel primo caso ci si riferisce di consueto al gruppo di evoluzione temporale generato da  $H$ , nel secondo caso al gruppo generato da una generica variabile dinamica  $G$ .

Osserviamo ora che si ha

$$\dot{f}_H = \{f, H\} = -\{H, f\} = -\dot{H}_f .$$

Consideriamo allora il caso in cui  $f$  è una costante del moto rispetto alla dinamica generata da  $H$  (rispetto al flusso  $\Phi_H^t$ ) e dunque si ha

$$\{f, H\} = 0 .$$

Allora necessariamente si ha anche  $\dot{H}_f = 0$ , cioè  $H$  è simmetrica rispetto al gruppo generato da  $f$ . Abbiamo dunque la

**Proposizione.** Sia dato un sistema dinamico, con hamiltoniana  $H$  indipendente dal tempo, e sia  $f$  una variabile dinamica (indipendente dal tempo). Allora condizione necessaria e sufficiente affinché  $f$  sia costante del moto (rispetto alla dinamica generata da  $H$ ) è che  $H$  sia simmetrica rispetto al gruppo di trasformazioni generato da  $f$ .

#### 2.5.4 I generatori come operatori differenziali

Abbiamo già accennato al fatto che in meccanica quantistica ad ogni variabile dinamica classica viene associato un operatore lineare agente in un opportuno spazio di funzioni. Vogliamo qui mettere in luce come una circostanza molto simile si presenta in ambito classico.<sup>58</sup> L'osservazione base è che la parentesi di Poisson è una applicazione bilineare. Pertanto, se si fissa una delle due variabili dinamiche su cui essa agisce, diciamola  $G$ , risulta allora che la parentesi di Poisson agisce sull'altra in maniera lineare e quindi definisce un operatore lineare agente nello spazio delle variabili dinamiche. Risulta in tal modo definito un operatore lineare  $\hat{G}$ , univocamente associato alla variabile dinamica fissata  $G$ . Inoltre è ovvio che si tratta di un operatore differenziale.

<sup>58</sup>Si veda M. Born e P. Jordan, *Elementare Quantenmechanik*, Springer (Berlin, 1930), pag. 91.

**Esempio.** Si consideri una particella nello spazio, e si fissi la variabile dinamica  $G(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = p_x$ . Il corrispondente operatore, agente su una generica variabile dinamica  $f$ , è allora definito da

$$\{f, p_x\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

In tal modo, alla variabile dinamica  $p_x$  è associato l'operatore differenziale  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

Più in generale risulta che, per una fissata variabile dinamica  $G$ , la parentesi di Poisson  $\{f, G\}$  non è altro che la derivata direzionale delle funzione  $f$  nella direzione del campo vettoriale indotto da  $G$ . Questo argomento, cui abbiamo qui appena accennato, è più approfonditamente discusso in appendice.

Come già accennato in una nota, la considerazione dello spazio i cui elementi sono le variabili dinamiche, e degli operatori differenziali agenti in tali spazi, fu introdotta da Koopman (e poi studiata anche da Von Neumann) intorno al 1928, in una serie di lavori in cui veniva messo in luce come anche in ambito classico sia utile introdurre degli spazi funzionali e considerare operatori lineari agenti in essi, in analogia con quanto era avvenuto pochissimi anni prima nell'ambito della formulazione matematica della meccanica quantistica. Si è anche accennato alla analogia con la descrizione di Heisenberg della meccanica quantistica.

### 2.5.5 Costanti del moto e simmetrie in ambito lagrangiano: il teorema di Noether

In ambito lagrangiano, la relazione tra costanti del moto e simmetrie non è altrettanto semplice che in ambito hamiltoniano. Il motivo sta nel fatto che il flusso  $\Phi_G^t$  generato da una funzione  $G = G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  dello spazio delle fasi (mediante le soluzioni delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana  $G$ ) in generale non risulta essere associato a soluzioni delle equazioni di Lagrange con una opportuna funzione che svolge il ruolo di lagrangiana. Si ha però una proprietà, che si presenta come una generalizzazione della ben nota proprietà: *condizione necessaria e sufficiente affinché un momento, ad esempio  $p_1$ , sia costante del moto rispetto alla dinamica indotta da una lagrangiana  $L$  è che sia  $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$ , ovvero che la lagrangiana  $L$  sia invariante rispetto alla traslazione della variabile  $q_1$ .* Qui, invece di considerare traslazioni lungo una coordinata  $q$ , più in generale si considera una famiglia di trasformazioni (dipendente da un parametro che ora chiamiamo  $\epsilon$ ) nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ , che si riduca all'identità per  $\epsilon = 0$ . Risulta che, invece della famiglia di trasformazioni  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \epsilon)$ , è più comodo considerare la famiglia di trasformazioni inverse  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \epsilon)$ . Si ha la

**Proposizione.** Sia data una famiglia a un parametro ( $\epsilon$ ) di trasformazioni nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ ,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \epsilon), \quad \mathbf{q}(\mathbf{Q}, 0) = \mathbf{Q}.$$

Consideriamo poi la corrispondente famiglia di trasformazioni (puntuali estese) naturalmente indotta sulle  $\dot{\mathbf{q}}$  (mediante la matrice jacobiana delle trasformazioni). Per una assegnata lagrangiana  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , si consideri poi la funzione composta (si sottintende la dipendenza da  $\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}$ , considerati come parametri)

$$L(\epsilon) = L(\mathbf{q}(\epsilon), \dot{\mathbf{q}}(\epsilon), t).$$

Allora si ha

$$\frac{dL}{d\epsilon} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon} \right). \quad (2.5.4)$$

**Dimostrazione.** Per la formula di derivazione di una funzione composta si ha

$$\frac{dL}{d\epsilon} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{d\epsilon} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{d\epsilon}.$$

dove si è fatto uso della definizione dei momenti  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  e delle equazioni di Lagrange  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ . D'altra parte si ha anche<sup>59</sup>

$$\frac{d\dot{\mathbf{q}}}{d\epsilon} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon}.$$

Si ha dunque

$$\frac{dL}{d\epsilon} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon} + \mathbf{p} \cdot \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon} \right).$$

**Q.E.D.**

In particolare, dalla (2.5.4) si ha che  $\frac{dL}{d\epsilon} = 0$  è equivalente a  $\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon} \right) = 0$ , e quindi si ha il

**Corollario.** Condizione necessaria e sufficiente affinché la lagrangiana  $L$  sia invariante sotto la famiglia di trasformazioni indotta nello spazio degli stati da una famiglia di trasformazioni (prossime all'identità)  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \epsilon)$  nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$  è che sia costante del moto la variabile dinamica

$$F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} := \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

dove

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \left. \frac{d\mathbf{q}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad \left( \equiv \sum_i p_i \left. \frac{dq_i}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right).$$

è il campo di velocità che genera la famiglia di trasformazioni  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \epsilon)$ .

<sup>59</sup>Si ha qui uno scambio di derivate, rispetto a  $t$  e rispetto ad  $\epsilon$ . La dimostrazione è del tutto analoga a quella che si è compiuta nel dedurre le equazioni di Lagrange, quando si è provato il Lemma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}}.$$



## 2.6 Lo spazio delle fasi e la meccanica statistica. L'equazione di continuità come condizione di compatibilità tra dinamica e probabilità. Il teorema di Liouville

Nel primo paragrafo di questo capitolo abbiamo già accennato al fatto che esiste un problema di compatibilità tra la dinamica, generata dalle equazioni di Hamilton per una certa Hamiltoniana  $H$ , e una probabilità definita sui dati iniziali. Vogliamo qui discutere più ampiamente questo problema.<sup>60</sup>

### 2.6.1 La nozione di stato statistico, ovvero gli insiemi (*ingl. ensembles*) statistici

Finora abbiamo considerato la nozione di “stato” in relazione alla dinamica, ovvero come descrizione di un sistema “meccanico” mediante delle quantità (“posizioni e velocità” o “posizioni e momenti”, e non soltanto “posizioni”) che permettono di determinarne completamente il movimento quando siano assegnate le forze (l'hamiltoniana). Lo stato di un sistema meccanico è dunque definito da un punto nello spazio delle fasi, e l'assegnazione delle forze (ovvero della hamiltoniana) induce in maniera deterministica l'evoluzione del sistema (ovvero del punto nello spazio delle fasi), quando sia assegnato uno stato (punto) iniziale. Con una banalissima generalizzazione, possiamo pensare a un sistema come definito da una varietà (nel caso più semplice lo spazio  $\mathbb{R}^m$ ) sulla quale sia data una equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

attraverso un campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  assegnato sulla varietà. Il caso meccanico (caso hamiltoniano) corrisponderà poi al caso particolare in cui è  $m = 2n$ , e il campo vettoriale ha struttura hamiltoniana:

$$\mathbf{v} = \mathbb{E} \text{ grad } H ,$$

con una fissata hamiltoniana  $H$ . Tale campo di velocità risulta allora essere solenoidale, cioè avere la proprietà

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 .$$

---

<sup>60</sup>NOTA PER GLI AUTORI: Dire più semplicemente la faccenda dell'invariante integrale. Dato che i singoli punti hanno in generale misura nulla, si dà la compatibilità (tra probabilità e dinamica) sugli insiemi (misurabili): la probabilità di un insieme è uguale alla probabilità dell'insieme da cui proviene. Poi passare al caso in cui la misura ammette densità, e il problema è allora di tradurre la condizione di compatibilità in termini della densità. Teorema: la condizione di compatibilità è l'equazione di continuità. Infine, prima di dimostrare quest'ultima come nella presente versione, premettere la dimostrazione più semplice che si riferisce a un insieme fisso arbitrario, e fa uso del teorema di Gauss, che gli studenti conoscono.

Chiameremo **stato microscopico** uno stato concepito nel senso appena descritto.

In generale, tuttavia, per sistemi costituiti da un numero enorme di particelle, come tipicamente un gas, risulta che lo stato microscopico così concepito non è concretamente accessibile o controllabile. In tali condizioni è necessario fare ricorso a una nozione più debole di stato. Ovviamente, questo “indebolimento” viene compiuto, e in maniera drastica, in termodinamica, nella quale un sistema non è più descritto mediante un modello microscopico “meccanico” con un numero di gradi di libertà dell’ordine del numero di Avogadro ( $n \simeq 10^{23}$ ), e si pensa invece allo stato come a qualcosa di empiricamente accessibile: ad esempio lo stato di un gas viene definito dall’assegnazione di due sole variabili (invece di  $10^{23}$ ), ovvero la temperatura e il volume in cui esso è racchiuso. Parleremo in tal caso di **stato macroscopico**.

Lo scopo fondamentale della **meccanica statistica** è quello di costruire un ponte tra tali due nozioni di stato, introducendo concetti di tipo probabilistico o statistico. Si assume dunque ancora che sia assegnato un **modello microscopico**, in cui il sistema è descritto come un “sistema meccanico”, con un suo spazio delle fasi (con  $n$  enorme) e una sua hamiltoniana, e quindi una dinamica deterministica. Tuttavia si prende atto del fatto che le informazioni contenute nello stato microscopico non soltanto non sono accessibili o controllabili, ma soprattutto sono ridondanti (sono troppe): vi sono infiniti stati microscopici che corrispondono a un medesimo stato macroscopico, ad esempio, vi è un numero enorme di stati microscopici diversi di un gas, che corrispondono a una medesima pressione, pensata in qualche modo come *forza media* (per unità di superficie) sulla parete.

Attraverso i lavori di Maxwell, di Boltzmann e poi di Gibbs<sup>61</sup> (1902),<sup>62</sup> si è infine giunti a concepire che la nozione di stato più adatta per costruire tale ponte tra stato microscopico e stato macroscopico è quella di **stato statistico**. Si tratta di “assegnare una probabilità ai dati iniziali nello spazio delle fasi”, e poiché tale spazio è un insieme continuo si è costretti a procedere nel modo familiare della teoria delle probabilità o della statistica, introducendo nello spazio delle fasi una **densità di probabilità**  $\rho_0(\mathbf{x})$ , con le proprietà di positività e normalizzazione,

$$\rho_0 \geq 0, \quad \int \rho_0 dV = 1,$$

sicché la probabilità che il punto rappresentativo del sistema si trovi inizial-

<sup>61</sup>W. Gibbs, *Elementary principles of statistical mechanics*, Yale Univ. Press (Yale, 1902); ristampato da Dover (New York).

<sup>62</sup>Si veda anche A.I. Khinchin, *Mathematical foundations of statistical mechanics*, Dover (New York, 1949).

mente in un arbitrario dominio  $D_0 \subset \mathcal{F}$  è data da

$$\text{pr}(\mathbf{x} \in D_0) = \int_{D_0} \rho_0(\mathbf{x}) dV .$$

Più in generale, per una qualsiasi variabile dinamica  $f = f(\mathbf{x})$  si potrà definire il **valore medio** (detto anche *valore atteso* o *valore di aspettazione*)  $\langle f \rangle \equiv \langle f \rangle_{\rho_0}$  come la ovvia generalizzazione della media pesata su tutti i possibili stati microscopici iniziali, ovvero<sup>63</sup>

$$\langle f \rangle_{\rho_0} = \int \rho_0(x) f(\mathbf{x}) dV \quad (2.6.1)$$

e si potrà anche calcolare la corrispondente varianza o la distribuzione di probabilità della funzione  $f$ , nel senso consueto nella teoria della probabilità.<sup>64</sup>

**Terminologia “fisica”: insiemi o “ensembles”** Nei manuali di meccanica statistica, seguendo Gibbs uno stato statistico viene chiamato **insieme**, o piuttosto con la corrispondente parola francese *ensemble*, che da lungo tempo viene utilizzata universalmente. La ragione è che si pensa di avere una collezione (appunto, un insieme) di tanti sistemi fisici identici, differenti soltanto per i dati iniziali, che evolvono indipendentemente l’uno dall’altro. Prendendo un volumetto  $dV$  nello spazio delle fasi, la densità  $\rho$  viene determinata dalla condizione che  $\rho dV$  sia uguale alla frazione di sistemi che si trovano entro quel volumetto.

**Terminologia “fisica”: Spazio Gamma e spazio mu.** In quasi tutti i manuali di meccanica statistica, lo spazio delle fasi del sistema globale (che noi abbiamo denotato con la lettera  $\mathcal{F}$ ) viene chiamato **spazio Gamma**, e denotato con la lettera greca maiuscola  $\Gamma$ . Se il sistema è costituito di  $N$  sottosistemi che possono essere considerati in prima approssimazione indipendenti (si pensi a un gas costituito di  $N$  molecole), allora lo spazio delle fasi di un singolo sottosistema viene chiamato **spazio mu**, e denotato con la lettera greca minuscola  $\mu$ . La ragione sta nel fatto che Boltzmann, nei suoi classici lavori (particolarmente in quello dl 1884) denota con  $\mu$  il numero dei gradi di libertà di un sottosistema (ad esempio, di una molecola) e con  $q_1 \dots q_\mu$  le corrispondenti coordinate nello spazio delle configurazioni del sottosistema.

**Aspetto matematico: gli stati statistici come funzionali lineari (definiti positivi) sullo spazio vettoriale delle variabili dinamiche.** Gli stati statistici hanno una interessante descrizione matematica. Avevamo già osservato che l’insieme delle variabili dinamiche sullo spazio delle fasi  $\mathcal{F}$  costituisce uno spazio

<sup>63</sup>In particolare, si trova

$$\text{pr}(\mathbf{x} \in D_0) = \langle f \rangle$$

se si prende come variabile dinamica  $f$  proprio la funzione caratteristica  $\chi_{D_0}$  dell’insieme  $D_0$ , definita da

$$\begin{aligned} \chi_D(\mathbf{x}) &= 1 \quad \text{se } \mathbf{x} \in D \\ \chi_D(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{se } \mathbf{x} \notin D . \end{aligned}$$

<sup>64</sup>Nella teoria delle probabilità le variabili dinamica (o osservabili) vengono chiamate **variabili casuali** o **variabili aleatorie** (ingl. random variables)

vettoriale (di dimensione infinita), anzi un'algebra di Lie. Avendo ora fissato uno stato statistico  $\rho_0$ , possiamo riguardare alla definizione di valore medio (2.6.1) come ad una legge (una funzione) che associa un numero reale ad *ogni* variabile dinamica  $f$ . Si tratta evidentemente di una applicazione lineare sullo spazio delle variabili dinamiche. Ricordiamo che le applicazioni lineari a valori reali definite su uno spazio vettoriale vengono chiamate **funzionali lineari** su quello spazio. Dunque ogni stato stititico, quando sia pensato come agente su tutte le variabili dinamiche, è un funzionale lineare (positivo, normalizzato e continuo<sup>65</sup>).

**Aspetto matematico: la teoria della misura e gli insiemi (nel senso di regioni o domini dello spazio delle fasi) misurabili.** Nella teoria delle probabilità si considera solitamente un insieme di “eventi elementari”, che nel nostro caso sono i punti dello spazio delle fasi (spazio  $\Gamma$ ). Si assegna poi una probabilità a ogni sottoinsieme di eventi elementari (nel nostro caso, a regioni (o domini) dello spazio delle fasi). Più precisamente si considerano solo le regioni (o domini) che sono **misurabili** nel senso classico della teoria della misura di Lebesgue. Non insisteremo su questo punto, e sottintenderemo sempre che le regioni (o domini) dello spazio delle fasi che si considerano siano misurabili nel senso di Lebesgue.

### 2.6.2 Il problema della compatibilità tra probabilità e dinamica: la probabilità come invariante integrale.

Abbiamo già osservato come si ponga un problema di compatibilità tra probabilità e dinamica. Infatti, anzitutto si dovrà ovviamente ammettere che il sistema sia descritto a ogni tempo  $t$  (e non solo al tempo iniziale) da uno stato statistico, cioè da una densità di probabilità

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) ,$$

con una interpretazione analoga a quella relativa al tempo iniziale, ovvero che l'integrale  $\int_D \rho(\mathbf{x}, t) dV$  rappresenti la probabilità che il sistema si trovi al tempo  $t$  nel dominio  $D$ . E poiché ci troviamo a trattare con modelli in cui si ha un'evoluzione deterministica, è evidente che lo stato statistico al tempo  $t$  debba essere connesso in un modo ben determinato allo stato statistico al tempo 0. In altri termini, si richiede di trovare una legge di evoluzione temporale per lo stato statistico, ovvero per la densità  $\rho(\mathbf{x}, t)$ .

Ora, la legge di evoluzione temporale è ovvia nel caso degenerare in cui inizialmente la probabilità sia concentrata su un numero *finito* di punti (o anche su un insieme numerabile), perché allora la compatibilità tra dinamica e probabilità si deve ridurre ad ammettere che ognuno dei punti iniziali su cui è concentrata la probabilità trasporti inalterata, durante il suo movimento, la corrispondente probabilità. Questo corrisponde al seguente evidente principio:<sup>66</sup>

“due stati fisici di cui l'uno è l'effetto necessario dell'altro sono ugualmente probabili”.

<sup>65</sup>Quando si introduca la norma del sup nello spazio delle variabili dinamiche.

<sup>66</sup>H. Poincaré, *Dernières pensées*, Flammarion (Parigi, 1913), pag.122.

Si potrebbe forse immaginare che nel caso continuo la condizione di compatibilità si riduca alla più semplice concepibile generalizzazione della legge relativa al caso discreto, ovvero a richiedere che la densità di probabilità  $\rho$  venga anch'essa trasportata inalterata lungo i movimenti (cioè sia una costante del moto). Ma una più profonda riflessione mostra che la soluzione è in generale diversa. La ragione è la seguente. Nel caso in cui la probabilità sia distribuita su un continuo, cioè sia definita mediante una densità di probabilità (che sia una funzione nonsingolare), allora ogni singolo punto ha probabilità nulla (l'integrale di una funzione non singolare esteso a un solo punto è nullo, come è nullo il volume di un punto), e il principio generale sopra citato ci dice soltanto che la probabilità del singolo punto evoluto deve continuare a essere nulla (cioè che la probabilità ammetta a tutti i tempi una densità che sia una funzione regolare). Il principio svolge invece un ruolo significativo per quanto riguarda l'evoluzione dei domini, perché in generale è diverso da zero un integrale esteso a un dominio. Dunque la più naturale generalizzazione della condizione di compatibilità tra dinamica e probabilità consiste nel richiedere che siano uguali la probabilità di trovarsi al tempo 0 in un dominio  $D_0$  e la probabilità di trovarsi al tempo  $t$  nel dominio  $D(t)$  evoluto (mediante la dinamica) del dominio  $D_0$ , e questo per ogni dominio  $D_0$ .

Sia  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la densità di probabilità al tempo  $t$ , con la condizione di ricordo  $\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x})$ , e sia  $D(t) = \Phi_H^t D_0$  il dominio evoluto del dominio iniziale  $D_0$  (con  $D(0) = D_0$ ) secondo la dinamica generata da  $H$  (attraverso il corrispondente flusso  $\Phi_H^t$  precedentemente discusso). Allora abbiamo stabilito che *la condizione di compatibilità tra dinamica e probabilità si enuncia richiedendo che per ogni regione  $D_0$  si abbia, ad ogni tempo  $t$ ,*

$$\int_{D(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{D_0} \rho_0(\mathbf{x}) dV . \quad (2.6.2)$$

Equivalentemente, si deve avere, ad ogni tempo  $t$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 , \quad \forall D_0 .$$

Abbiamo già detto che ogni funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  che mantenga inalterato il suo valore lungo una qualunque soluzione dell'equazione differenziale considerata si dice *costante del moto, o integrale del moto, o funzione invariante*. Seguendo Poincaré, si dice invece **invariante integrale** una quantità che si esprima come l'integrale di una certa funzione (la corrispondente densità  $\rho$ ), e che mantenga inalterato il suo valore quando l'integrale venga calcolato ad ogni tempo  $t$  su un dominio  $D(t)$  evoluto di un dominio iniziale  $D_0$ , per ogni  $D_0$ . Dunque possiamo dire che:

**la condizione di compatibilità tra dinamica e probabilità si esprime con la condizione che la probabilità sia un invariante integrale.**

### 2.6.3 L'equazione di continuità e l'equazione di Liouville

Si mostra infine che, per una dinamica definita da un'equazione  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ , la condizione di compatibilità tra probabilità e dinamica, espressa sopra in forma integrale, può essere espressa equivalentemente come una condizione di tipo differenziale sull'evoluzione della densità di probabilità  $\rho(\mathbf{x}, t)$ . Precisamente, si mostra (si veda più sotto) che **la densità deve soddisfare una equazione differenziale che non è nient'altro che l'equazione di continuità**<sup>67 68</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.6.3)$$

la quale costituisce la naturale estensione (ad  $\mathbb{R}^m$ ) della classica equazione di continuità ben nota dalla teoria dei fluidi nel caso di un campo di velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  in  $\mathbb{R}^3$  (in effetti, la trattazione che qui diamo fornisce appunto, nel caso  $m = 3$ , la dimostrazione dell'equazione di continuità per i fluidi; basta interpretare  $\rho$  come densità di massa anziché come densità di probabilità). D'altra parte si ha la identità<sup>69</sup>

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho. \quad (2.6.5)$$

Pertanto, nel caso particolare dei sistemi hamiltoniani, in cui il campo vettoriale è del tipo  $\mathbf{v} = \mathbb{E} \operatorname{grad} H$  e quindi ha la proprietà  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , l'equazione di continuità prende la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0, \quad (2.6.6)$$

ovvero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0.$$

Dunque **nel caso hamiltoniano l'equazione di compatibilità tra probabilità e dinamica per la densità  $\rho$  (ovvero l'equazione di continuità) si riduce semplicemente alla condizione che la densità sia**

<sup>67</sup>Nella letteratura russa, questa equazione viene chiamata *equazione di Liouville*. Essa è in un certo senso semplicemente una versione debole dell'equazione  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Un nome tradizionale per una soluzione dell'equazione di continuità è *moltiplicatore di Jacobi*.

<sup>68</sup>Si presenta qui un problema delicato riguardante l'esistenza di soluzioni dell'equazione di continuità (2.6.10). Infatti, si mostra che non si incontrano difficoltà nel trovare soluzioni, ma non è detto che tali soluzioni soddisfino l'ulteriore requisito (di tipo globale)

$$\rho \geq 0$$

in tutto lo spazio delle fasi, che evidentemente è essenziale per interpretare  $\rho$  come densità di probabilità (o di massa). Il soddisfare una condizione di questo tipo costituisce una restrizione sul campo di velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Risulta che questa condizione può venire soddisfatta nel caso hamiltoniano.

<sup>69</sup>Basta ricordare la regola di Leibniz per la derivata di un prodotto,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (2.6.4)$$

e poi sommare su  $i$ .

**una costante del moto** (in generale dipendente dal tempo). Questo avviene proprio perché nel caso dei sistemi hamiltoniani il campo  $\mathbf{v}$  nello spazio delle fasi risulta essere solenoidale ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ). È questo il motivo per cui in meccanica statistica si fa riferimento al formalismo hamiltoniano nello spazio delle fasi (in cui le coordinate sono le posizioni e i momenti), anziché al formalismo lagrangiano nello spazio degli stati (in cui le coordinate sono le posizioni e le velocità). Quando viene pensata in relazione agli stati statistici anziché alle variabili dinamiche, l'equazione che esprime la condizione di essere una costante del moto viene usualmente chiamata con il nome di **equazione di Liouville**.

Veniamo dunque a dimostrare come la condizione che la probabilità sia un invariante integrale è equivalente alla proprietà che la densità  $\rho$  soddisfi l'equazione di continuità.

**Lemma 1** *Si consideri l'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  in  $\mathbb{R}^m$ . Sia  $\Phi^t = \Phi^t(\mathbf{x})$  il corrispondente flusso<sup>70</sup> e sia  $\mathbb{J}(t) \equiv d\Phi^t$  la corrispondente matrice jacobiana.<sup>71</sup> Allora si ha*

$$|\det \mathbb{J}(t)| = 1 + t \operatorname{div} \mathbf{v} + O(t^2) . \quad (2.6.7)$$

**Dimostrazione.** Per tempi  $t$  piccoli, per la definizione stessa di flusso di un'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  abbiamo

$$\Phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + t \mathbf{v}(\mathbf{x}) + O(t^2)$$

e dunque

$$\mathbb{J}_{ik}(t) = \delta_{ik} + t \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + O(t^2) . \quad (2.6.8)$$

Ora, ben sappiamo che il determinante di una matrice è la somma di termini, ciascuno dei quali è il prodotto di elementi che stanno su colonne diverse, uno per ciascuna riga. Poiché gli elementi diagonali sono tutti della forma  $1 + O(t)$ , precisamente

$$\mathbb{J}_{11} = 1 + t \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + O(t^2) \quad \dots \quad \mathbb{J}_{mm} = 1 + t \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + O(t^2) ,$$

mentre quelli fuori diagonale sono tutti di ordine  $O(t)$ , è chiaro allora che gli unici contributi proporzionali a  $t$  sono quelli che provengono dal termine che è il prodotto di tutti e soli gli elementi diagonali. La conclusione è allora ovvia. **Q.E.D.**

Si ha poi il

---

<sup>70</sup>Che è definito mediante la soluzione dell'equazione differenziale considerata:  $\Phi^t(\mathbf{x})$  è nient'altro che l'evoluto al tempo  $t$  del dato iniziale  $\mathbf{x}$ .

<sup>71</sup>Si sottintende la dipendenza da  $\mathbf{x}$ .

**Teorema 4 (di Liouville, o dell'equazione di continuità.)** Si consideri l'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  in  $\mathbb{R}^m$ . Allora condizione necessaria e sufficiente affinché la quantità  $\int \rho dV$  sia un invariante integrale, cioè si abbia

$$\int_{D(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dx_1 \dots dx_m = \int_{D(0)} \rho(\mathbf{x}, 0) dx_1 \dots dx_m . \quad (2.6.9)$$

per tutti i tempi, e per ogni dominio  $D(0)$ , dove  $D(t)$  denota l'evoluto di  $D(0)$ , è che  $\rho$  soddisfi l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (2.6.10)$$

In particolare, per i sistemi hamiltoniani, in cui il campo vettoriale è del tipo  $\mathbf{v} = \mathbb{E} \operatorname{grad} H$  e quindi ha la proprietà  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , l'equazione di continuità si riduce all'equazione

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 , \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0 ,$$

ovvero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0 , \quad (2.6.11)$$

ovvero alla condizione che  $\rho$  sia una costante del moto (in generale dipendente dal tempo).

**Dimostrazione.** Nell'integrale a primo membro della (2.6.9) eseguiamo il cambiamento di variabili che associa al punto  $\mathbf{x} \in D(t)$  il punto  $\mathbf{y} = \Phi^{-t}\mathbf{x} \in D(0)$  da cui esso "proviene". In tal modo, per la nota formula del cambiamento di variabili negli integrali, l'integrale a primo membro si scrive

$$\int_{D(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dx_1 \dots dx_m = \int_{D(0)} \rho(\Phi^t(\mathbf{y}), t) |\det \mathbb{J}(t)| dy_1 \dots dy_m .$$

Dunque la condizione per aversi un invariante integrale (conservazione della probabilità) diviene (si cambia *nome* alle variabili di integrazione a secondo membro della (2.6.9) )

$$\int_{D(0)} \left( \rho(\Phi^t(\mathbf{y}), t) |\det \mathbb{J}(t)| - \rho(\mathbf{y}, 0) \right) dy_1 \dots dy_m = 0 .$$

Ma poiché questa relazione deve valere per ogni dominio  $D(0)$ , si ha che deve essere nullo l'integrando, e dunque la condizione (2.6.9) prende la forma di una "condizione puntuale" (valida per ogni punto, ovvero per ogni  $\mathbf{y}$ )

$$\rho(\Phi^t(\mathbf{y}), t) |\det \mathbb{J}(t)| - \rho(\mathbf{y}, 0) = 0 , \quad (2.6.12)$$



Ma questa relazione deve valere a tutti i tempi  $t$ , e quindi deve essere nulla la derivata del primo membro rispetto al tempo. Equivalentemente, proprio per la definizione di derivata, deve essere nullo il coefficiente del termine del primo ordine dello sviluppo in  $t$ . Ma, per la definizione del flusso  $\Phi^t$  si ha

$$\rho(\Phi^t(\mathbf{y}), t) = \rho(\mathbf{y} + \mathbf{v}t + O(t^2), t) ,$$

ovvero, mediante sviluppo della funzione  $\rho$  rispetto a  $t$ ,

$$\rho(\Phi^t(\mathbf{y}), t) = \rho(\mathbf{y}, 0) + t \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{y}, 0) + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho(\mathbf{y}, 0) \right) + O(t^2) .$$

Usando il lemma per esprimere la matrice jacobiana (formula (2.6.7)), la condizione di annullamento del termine di primo ordine in  $t$  diviene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0 ,$$

ovvero, per l'identità (2.6.4), l'equazione di continuità.

**Q.E.D.**

È interessante osservare che l'argomento centrale usato per questa dimostrazione presenta una profonda analogia con quello usato nel 1905 da Einstein per dimostrare l'equazione di diffusione con argomenti probabilistici. L'analogia sta nel cambiamento di variabile  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ . Qui si ha  $\mathbf{y} = \Phi^{-t}(\mathbf{x})$  (ogni punto proviene deterministicamente da un solo punto). Invece, nel caso di Einstein, un punto può provenire, con corrispondenti probabilità di transizione, da ogni altro punto.

**Esercizio (Sul significato della divergenza).** Si dimostri la seguente<sup>72</sup>

**Proposizione.** Sia

$$V(t) = \int_{D(t)} dx_1 \dots dx_m$$

il volume di un dominio  $D(t)$  che evolve secondo un'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Allora si ha

$$\frac{d}{dt} V(t) = \int_{D(t)} \text{div} \mathbf{v} dx_1 \dots dx_m .$$

N.B. Questo risultato può essere presentato, nella maniera più intuitiva, nel modo seguente. Si considerino i movimenti soluzione dell'equazione differenziale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Allora si ha

$$\text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} \delta V ,$$

dove  $\delta V$  è un qualunque "volume infinitesimo centrato in  $\mathbf{x}$ ".

Si ha allora il

**Corollario (teorema di Liouville in senso stretto).** Per ogni sistema hamiltoniano, il volume nello spazio delle fasi è un invariante integrale. Ovvero, ogni

<sup>72</sup>Si tratta sostanzialmente del caso particolare in cui si ha  $\rho(\mathbf{x}, 0) = 1$ .

dominio che evolva nello spazio delle fasi secondo le soluzioni delle equazioni di Hamilton con una qualunque hamiltoniana mantiene inalterato il suo volume:

$$V(t) = V(0) \quad \forall D(0) .$$

**Aspetto matematico: il flusso hamiltoniano come famiglia di trasformazioni che conservano la misura; la teoria ergodica.** Il teorema di Liouville (in senso stretto) ci dice dunque che durante l'evoluzione temporale, qualunque sia la hamiltoniana, si conservano i volumi dei domini. Dunque il flusso  $\Phi_H^t$  che descrive l'evoluzione nello spazio delle fasi indotto dalle equazioni di Hamilton si presenta come una famiglia di trasformazioni (dello spazio delle fasi in sé), ciascuna delle quali conserva il volume dei domini trasformati.

Più in generale, si può considerare una dinamica descritta nel modo seguente. È assegnata una varietà  $M$  munita di una misura  $\mu$  (l'analogo dello spazio delle fasi munito della misura di Lebesgue), ed è assegnata una famiglia a un parametro  $\Phi^t$  di trasformazioni di  $M$  in sé, invertibili, con la proprietà di conservare la misura:

$$\mu(\Phi^t D) = \mu(D)$$

per ogni dominio (misurabile)  $D \subset M$  (*ingl. measure preserving transformations*). Lo studio della dinamica per i sistemi dinamici che conservano una misura, trascurando gli insiemi di misura nulla, e riguardando particolarmente alle proprietà asintotiche nel tempo per  $t \rightarrow +\infty$ , viene detta **teoria ergodica**.

Nel caso dei sistemi hamiltoniani di sistemi di particelle, lo spazio ambiente, cioè lo spazio delle fasi  $\mathcal{F}$ , ha misura di Lebesgue infinita. D'altra parte, nel caso comune di hamiltoniane indipendenti dal tempo, sappiamo che l'hamiltoniana stessa è una costante del moto, ed è dunque significativo fare svolgere il ruolo di varietà  $M$  non a tutto lo spazio delle fasi  $\mathcal{F}$ , ma a una superficie di livello dell'energia  $H = E_0$ . Risulta che, nei casi più significativi, tale superficie è compatta, e dunque la misura di Lebesgue vi induce in maniera naturale una misura finita. Un'altra scelta possibile è quella di prendere per  $M$  uno "strato" tra due superfici di livello dell'energia, con valori  $E_0$  ed  $E'_0$  vicini. In tale caso, la misura di Lebesgue della varietà  $M$  è finita e può essere banalmente normalizzata, in modo da soddisfare la proprietà  $\mu(M) = 1$ . Il teorema della ricorrenza di Poincaré, che verrà discusso nel corso di Meccanica Razionale 2, è proprio ambientato con riferimento a trasformazioni che conservano una misura finita.

## 2.6.4 Gli insiemi di equilibrio e la termodinamica statistica

Limitiamoci ora ai sistemi hamiltoniani, in cui le densità di probabilità (o insiemi statistici) evolvono come soluzioni dell'equazione di Liouville, cioè sono costanti del moto, in generale dipendenti dal tempo. Ora, come sempre nella dinamica, così anche nella dinamica degli stati statistici (insiemi) le soluzioni più semplici, e le prime da studiarsi, sono le **soluzioni di equilibrio**, ovvero quelle indipendenti dal tempo. Nel nostro caso si tratta quindi delle densità che sono costanti del moto indipendenti dal tempo; esse sono dette **soluzione di equilibrio dell'equazione di Liouville**.<sup>73</sup> La più sem-

<sup>73</sup>Nel caso generale (non hamiltoniano) si tratta delle densità  $\rho$  che soddisfano l'equazione

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 .$$

plice scelta che si può compiere come soluzione di equilibrio per la densità  $\rho$  è addirittura la funzione  $\rho = \text{costante}$  (positiva).

In conseguenza, si trova che è consistente con la dinamica assumere come probabilità a priori nello spazio delle fasi quella uniforme,<sup>74</sup> quella cioè in cui la probabilità che un punto si trovi in un dominio  $D \subset \mathcal{F}$  è proporzionale al volume  $V(D)$  di quel dominio, quando l'elemento di volume sia definito nel modo che avevamo anticipato, cioè attraverso la formula  $dV = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$ , ovvero *come se le coordinate canoniche fossero cartesiane ortogonali*.

Venendo poi alle soluzioni di equilibrio non uniformi, è spontaneo prendere per  $\rho$  una qualsiasi funzione delle costanti del moto (indipendenti dal tempo) del sistema considerato. D'altra parte sappiamo che, nel caso significativo in cui  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo, l'hamiltoniana  $H$  stessa è una costante del moto (indipendente dal tempo). Vi è poi un argomento generale risalente a Poincaré, al quale fu dato un contributo significativo anche da Fermi (nel 1923), secondo il quale in generale (con qualche precisazione che qui omettiamo) l'unica costante del moto è proprio l'hamiltoniana  $H$ . Dunque sarà significativo prendere per  $\rho$  una qualunque funzione di  $H$ .

La più celebre di queste soluzioni di equilibrio è la famiglia di densità, detta **insieme di Gibbs, o insieme canonico**. Si tratta della famiglia parametrizzata dal numero  $\beta > 0$  data da

$$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}. \quad (2.6.13)$$

La funzione  $Z(\beta)$  è detta **funzione di partizione** (ingl. *partition function*)<sup>75</sup>, ed è un fattore di normalizzazione che si introduce per imporre  $\int \rho dV = 1$ , e che quindi è definito da

$$Z(\beta) = \int e^{-\beta H(\mathbf{q}, \mathbf{p})} dV.$$

Questo insieme viene ottenuto dalla densità uniforme imponendo la condizione che sia fissato il valore medio  $\langle H \rangle$  dell'energia (che viene identificato con l'energia termodinamica  $U$ ), e il parametro  $\beta$  svolge il ruolo di

---

Una densità di questo tipo viene chiamata da Poincaré **ultimo moltiplicatore**. Si veda *Methodes nouvelles*. Vol. III, pag. 48.

<sup>74</sup>Si è già osservato sopra che si compie così una scelta in qualche modo impropria, perchè essa conduce a una probabilità non normalizzabile (nel caso di sistemi di particelle non vincolate, l'integrale di questa densità su tutto lo spazio delle fasi diverge). Ma questo non è un problema grave. Si pensi alla consueta definizione di volume (o piuttosto di area) nel piano euclideo, che è non normalizzabile, perchè il piano stesso ha volume infinito. Si veda a tale proposito A. Renyi, *Probability theory*, North-Holland (Amsterdam, 1970). Si veda anche R. Tolman, *The principles of statistical mechanics*, Oxford U.P. (Oxford, 1946).

<sup>75</sup>Il simbolo  $Z$  viene presumibilmente dal nome tedesco *Zustandsumme*, ovvero somma sugli stati. Anche in inglese spesso  $Z$  viene chiamata *sum over states*.

moltiplicatore di Lagrange nel fissare tale condizione. Si mostra poi (vedi più sotto) che si deve interpretare

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann, e  $T$  la temperatura assoluta,

Si trova poi, con un calcolo immediato,<sup>76</sup> che l'energia media viene espressa in termini della funzione di partizione mediante la formula fondamentale

$$U(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta) .$$

Più precisamente, nei casi significativi l'hamiltoniana  $H$  risulta dipendere da un ulteriore parametro "esterno", di cui il più tipico è il volume  $V$  del dominio di  $\mathbb{R}^3$  in cui è racchiuso il sistema fisico (si pensi a un gas racchiuso tra pareti, rappresentate da forze opportune).<sup>77</sup> Allora dipenderà da  $V$  anche la funzione di partizione,  $Z = Z(\beta, V)$ , e pertanto per l'energia media si avrà in generale una formula

$$U(\beta, V) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta, V) .$$

sicché anche l'energia media dipende da due parametri, temperatura e volume, come avviene per l'energia termodinamica. Questo è necessario se si vuole che l'energia media  $U(\beta, V)$  venga identificata con l'energia termodinamica. In tal modo, attraverso l'introduzione degli insiemi statistici, è stato così costruito un ponte tra il modello meccanico microscopico e la termodinamica macroscopica. Nella terminologia di Gibbs, si è costruita una **analogia termodinamica**.

---

<sup>76</sup>Basta ricordare la definizione

$$\langle H \rangle = \frac{\int H e^{-\beta H} dV}{\int e^{-\beta H} dV} ,$$

ricordare

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

ed osservare

$$\frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta H} = -H e^{-\beta H} .$$

<sup>77</sup>Ad esempio, se le particelle sono contenute in una scatola cubica di lato  $L$ , la forza dovuta alle pareti può essere rappresentata da una energia potenziale  $V^{ext} = V^{ext}(x, y, z)$  che corrisponde a una "buca di potenziale" di profondità  $V_0$ , ovvero vale  $-V_0$  all'interno della scatola e 0 fuori. Si constata allora immediatamente che la funzione di partizione dipende dal volume  $V$ . Ad esempio, nel caso del gas perfetto, in cui  $H$  si riduce all'energia cinetica, l'integrale sulle variabili posizionali produce semplicemente il fattore  $V^N$ . Si noti che stiamo usando qui lo stesso simbolo  $V$  per il volume e per l'energia potenziale.

Mostriamo ora come si determinano le altre funzioni termodinamiche, come l'entropia  $S$  e l'energia libera (di Helmholtz)  $F = U - TS$ , e in particolare si confermi l'interpretazione per  $\beta$  come  $\beta = 1/k_B T$ . A tal fine bisogna anzitutto ottenere l'espressione del lavoro elementare  $\delta W$ . Si trova

$$\delta W = -\frac{1}{\beta} \partial_V \log Z \quad (\partial_V \equiv \frac{\partial}{\partial V}) .$$

Ciò deriva dal fatto che il lavoro della forza esterna agente sul sistema è data da<sup>78</sup>

$$\delta W = \langle \partial_V H \rangle dV ,$$

e il valore medio viene poi calcolato in analogia col calcolo compiuto appena sopra per l'energia media.

In conformità con il primo principio della termodinamica, si assume allora che l'espressione della quantità di calore assorbito  $\delta Q$  sia data da

$$\delta Q = dU - \delta W .$$

Avendo già a disposizione le espressioni per  $dU$  e  $\delta W$  si trova

$$\beta \delta Q = \beta dU + \partial_V \log Z dV ,$$

ovvero (usando  $\beta dU = d(\beta U) - U d\beta$ )

$$\beta \delta Q = d(\beta U) + \partial_\beta \log Z d\beta + \partial_V \log Z dV$$

e infine

$$\beta \delta Q = d(\beta U + \log Z) . \quad (2.6.14)$$

Per confronto con le note formule termodinamiche

$$\delta Q = T dS , \quad F = U - TS ,$$

abbiamo quindi le analogie termodinamiche

$$\beta = \frac{1}{k_B T} , \quad \beta F = -\log Z , \quad \frac{S}{k_B} = \beta U + \log Z . \quad (2.6.15)$$

<sup>78</sup>Si pensi al caso paradigmatico di un pistone cilindrico con una parete mobile. Allora la posizione del pistone è individuata dall'altezza  $l$  del cilindro, o dal suo volume  $V = lA$  se  $A$  è l'area della base del cilindro. Quindi l'hamiltoniana sarà funzione di  $l$ . Se  $P$  è la quantità di moto della base mobile del pistone, si avrà l'equazione di moto  $\dot{P} = -\partial_l H$ . Infatti, nello stesso modo in cui  $p_x = m\dot{x}$  è il momento coniugato alla coordinata cartesiana  $x$  di una particella, così  $P = M\dot{l}$  è il momento della base del pistone (di massa  $M$ ), la cui posizione è individuata dalla coordinata cartesiana  $l$ . Dunque  $-\partial_l H$  rappresenta la forza agente sul pistone, e pertanto, per il principio di azione e reazione,  $\partial_l H$  rappresenta la forza esterna che si deve esercitare per tenere fermo il pistone. Dunque la forza esterna media è data da  $\langle \partial_l H \rangle$ , e il lavoro della forza esterna è quindi dato da

$$\delta W = \langle \partial_l H \rangle dl = \langle \partial_V H \rangle dV .$$

### **2.6.5 Il problema del raggiungimento dell'equilibrio (legge zero della termodinamica). I paradossi della reversibilità e della ricorrenza**

Ancora da scriversi.

# Appendici

## A.1 Esempi di hamiltoniane

Riportiamo qui di seguito alcuni esempi elementari di sistemi hamiltoniani, in aggiunta a quello del punto materiale nello spazio, in coordinate cartesiane, dato nel testo . La presente appendice consiste sostanzialmente nel compiere una serie di esercizi.

### a) Punto materiale in vari sistemi di coordinate .

#### a1) Punto materiale in coordinate cilindriche $r, \varphi, z$ .

Si è già visto che si ha  $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$ . I momenti coniugati  $p_r, p_\varphi, p_z$  sono allora dati da  $p_r = m\dot{r}$ ,  $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ ,  $p_z = m\dot{z}$ , cosicché, ancora con banali inversioni, si ha  $T = \frac{1}{2m}(p_r^2 + p_\varphi^2/r^2 + p_z^2)$ . Indicando ancora con  $V$  l'energia potenziale, espressa però in funzione delle variabili  $r, \varphi, z$ , si ha allora

$$\begin{aligned} L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \varphi, z) \\ H(p_r, p_\varphi, p_z, r, \varphi, z) &= \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2) + V(r, \varphi, z) . \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

#### a2) Punto materiale in coordinate sferiche $\rho, \vartheta, \varphi$ .

Dalla definizione delle coordinate  $x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $z = \rho \cos \vartheta$ , si ottiene<sup>79</sup>

$$\begin{aligned} L(\rho, \vartheta, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\vartheta}^2 + (\rho^2 \sin^2 \vartheta) \dot{\varphi}^2) - V(\rho, \vartheta, \varphi) \\ H(p_\rho, p_\vartheta, p_\varphi, \rho, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2m}(p_\rho^2 + \frac{p_\vartheta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2 \sin^2 \vartheta}) + V(\rho, \vartheta, \varphi) . \end{aligned} \tag{A.1.2}$$

### Osservazioni.

---

<sup>79</sup>Si ricordi che esiste un modo banalissimo per dimostrarlo: basta scrivere gli spostamenti infinitesimi lungo le linee coordinate.

a) In questi esempi, l'energia cinetica non contiene termini misti (la matrice cinetica è diagonale), grazie al fatto che le linee coordinate si intersecano ortogonalmente; un esempio banale in cui ciò non avviene è quello delle coordinate cartesiane oblique.

b) In generale, in sistemi di coordinate ortogonali l'energia cinetica ha dunque la forma diagonale  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_i a_i(\mathbf{q}) \dot{q}_i^2$ ; corrispondentemente, è immediato constatare che si ha sempre  $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{p_i^2}{a_i(\mathbf{q})}$ , come negli esempi sopra riportati.

c) Si osservi il diverso significato fisico dei momenti coniugati nei tre sistemi di coordinate sopra considerati. Nel caso delle coordinate cartesiane essi rappresentano le componenti della quantità di moto; nel caso delle coordinate cilindriche, ciò resta vero per  $p_r$  e  $p_z$ , mentre  $p_\varphi$  è la componente del momento angolare lungo l'asse  $z$ , che è l'asse di rotazione associato alla coordinata angolare  $\varphi$ . Nel caso delle coordinate sferiche, si ha analogamente che  $p_\rho$  è la componente radiale della quantità di moto, e  $p_\varphi$  è ancora la componente  $z$  del momento angolare. In generale, dalla circostanza che il prodotto  $p_h q_h$  ha le dimensioni di una azione (energia · tempo<sup>80</sup>), segue subito che, se  $q_i$  ha le dimensioni di una lunghezza, allora  $p_i$  ha le dimensioni di una quantità di moto, mentre se  $q_i$  è un angolo,  $p_i$  ha le dimensioni di un momento angolare.

### b) Problema a due corpi.

Consideriamo il caso particolarmente significativo di forze interne centrali a simmetria sferica, e dunque provenienti da un'energia potenziale  $V(\rho)$ , con  $\rho^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ ; in coordinate cartesiane si ha allora  $L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - V(\rho)$ . È tuttavia conveniente passare dalle coordinate cartesiane dei due punti a nuove coordinate  $X, Y, Z, \rho, \vartheta, \varphi$ , ove  $X, Y, Z$  sono le coordinate cartesiane del baricentro, e  $\rho, \vartheta, \varphi$  le coordinate sferiche del vettore relativo  $P_2 - P_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ . Si verifica allora che  $L$  e  $H$  sono date da

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - V(\rho) \\ H &= \frac{1}{2m} (p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) + \frac{1}{2\mu} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\vartheta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(\rho), \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

ove  $m$  e  $\mu$  denotano la massa totale e la massa ridotta:  $m = m_1 + m_2$ ,  $1/\mu = (1/m_1) + (1/m_2)$ .

c) **Il pendolo e il pendolo sferico.** Per il pendolo semplice nel piano verticale  $xz$ , con l'asse  $z$  verticale ascendente, si usano coordinate polari piane  $r, \varphi$ , imponendo il vincolo  $r = l$ . Misurando, come è consueto in questo problema, l'angolo  $\varphi$  a partire dalla direzione negativa dell'asse  $z$ , l'energia potenziale della forza peso è allora  $V = mgz = -mgl \cos \varphi$ ; si ha

<sup>80</sup>È già stato osservato che il prodotto  $p \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  ha le dimensioni di una energia, perché  $L = T - V$  ha le dimensioni di una energia.



così

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \\ H &= \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi , \end{aligned} \tag{A.1.4}$$

dove si è denotato  $p = p_\varphi$ . Abbiamo già osservato che le equazioni di moto non si alterano se si moltiplica la lagrangiana per una costante. Qui è spontaneo dividere la lagrangiana per  $ml^2$ , e si ha quindi la nuova lagrangiana (che denotiamo ancora con  $L$ )

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \cos \varphi .$$

Si ha allora  $p = \dot{\varphi}$  e quindi

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \omega^2 \cos \varphi ,$$

con  $\omega^2 = g/l$ .

Venendo infine al pendolo sferico, usando coordinate polari, e imponendo il vincolo  $\rho = R$  si trova

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\vartheta}^2 + (\sin^2 \vartheta)\dot{\varphi}^2) + mgR \cos \vartheta \\ H &= \frac{1}{2mR^2}\left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}\right) - mgR \cos \vartheta , \end{aligned} \tag{A.1.5}$$

dove si è preso l'angolo  $\vartheta$  a partire dalla direzione negativa dell'asse  $z$ . È ancora conveniente dividere la lagrangiana per  $mR^2$ , ottenendo in tal modo

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + (\sin^2 \vartheta)\dot{\varphi}^2) + \omega^2 \cos \vartheta \\ H &= \frac{1}{2}\left(p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}\right) - \omega^2 \cos \vartheta , \end{aligned} \tag{A.1.6}$$

con  $\omega^2 = g/\rho$ .

## A.2 La parentesi di Poisson come operatore differenziale del primo ordine, e dimostrazione dell'identità di Jacobi

È significativo riguardare alla parentesi di Poisson nel modo seguente: avendo fissato una variabile dinamica  $f$ , la parentesi di Poisson è una applicazione che ad ogni variabile dinamica  $g$  associa la variabile dinamica  $\{f, g\}$ . Si tratta evidentemente di un operatore lineare, agente su ogni funzione  $g$ , che possiamo denotare con  $\mathcal{D}_f$ . Esso è dunque definito da<sup>81</sup>

$$\mathcal{D}_f g = \{g, f\} ,$$

ovvero da

$$\mathcal{D}_f = \sum_i \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \frac{\partial}{\partial q_i} - \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \right] .$$

È chiaro che più in generale possiamo considerare un operatore differenziale del primo ordine in  $\mathbb{R}^m$  associato a un campo vettoriale

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \left( v_1(\mathbf{x}), \dots, v_m(\mathbf{x}) \right)$$

e definito da

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Questo operatore differenziale prende il nome di *derivata di Lie* associata al campo vettoriale  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Il nostro è il caso particolare della derivata di Lie rispetto a un campo vettoriale hamiltoniano, in cui  $m = 2n$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e  $\mathbf{v} = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right) \equiv \mathbb{E} \text{grad } f$ : in altri termini,

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{L}_{\mathbb{E} \text{grad } f} .$$

Veniamo ora alla dimostrazione della identità di Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 .$$

Essa si esegue, senza ricorrere a calcoli piuttosto lunghi (benché elementari), semplicemente osservando che, se sviluppassimo il primo membro, troveremmo una somma di termini, ciascuno contenente almeno una derivata seconda di una delle funzioni  $f, g$  o  $h$ . Se allora proviamo che l'espressione al primo membro non può contenere derivate seconde di nessuna delle tre funzioni, ciò vuol dire che tutti questi termini si elidono, e pertanto la somma è nulla. Mostriamo dunque che non possono essere presenti, ad esempio,

<sup>81</sup>Qui la funzione  $f$  svolge il ruolo dell'hamiltoniana  $H$ , e  $g$  quello della variabile dinamica studiata.

derivate seconde di  $h$ . Queste non sono presenti, evidentemente, nell'ultimo termine; d'altra parte, è immediato verificare che il contributo dei primi due termini si scrive nella forma  $\mathcal{D}_f \mathcal{D}_g h - \mathcal{D}_g \mathcal{D}_f h = [\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g]h$ , avendo indicato con  $[\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g]$  il *commutatore* di  $\mathcal{D}_f$  e  $\mathcal{D}_g$ , ovvero la quantità

$$[\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g] := \mathcal{D}_f \mathcal{D}_g - \mathcal{D}_g \mathcal{D}_f .$$

Ora, è molto facile verificare che il commutatore di due qualsiasi derivate di Lie è ancora, del tutto in generale, una derivata di Lie, e dunque non contiene derivate seconde. Più precisamente, vale il seguente facile

**Lemma 2** *Per il commutatore  $[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_w]$  delle derivate di Lie  $\mathcal{L}_v$  e  $\mathcal{L}_w$  si ha*

$$[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_w] = \mathcal{L}_u ,$$

dove

$$u_i = \mathcal{L}_v w_i - \mathcal{L}_w v_i , \quad i = 1, \dots, m . \quad (\text{A.2.1})$$

**Dimostrazione.** Per ogni funzione  $g$  si ha

$$(\mathcal{L}_v \mathcal{L}_w - \mathcal{L}_w \mathcal{L}_v)g = \sum_{ij} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( w_j \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) - \sum_{ij} w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_j \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) .$$

Ma per il teorema di Schwarz i termini contenenti le derivate seconde di  $g$  si semplificano, e si resta con

$$\sum_{ij} \left( v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_j \left( u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) g .$$

**Q.E.D.**

L'identità di Jacobi è così dimostrata.

**Osservazione.** E' immediato verificare (usando l'antisimmetria della parentesi di Poisson) che nel linguaggio degli operatori di derivazione l'identità di Jacobi si riscrive equivalentemente  $\mathcal{D}_f \mathcal{D}_g h - \mathcal{D}_g \mathcal{D}_f h - \mathcal{D}_{\{f,g\}} h = 0$ , ovvero (per l'arbitrarietà di  $h$ )

$$[\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g] = \mathcal{D}_{\{f,g\}} .$$

Questa relazione altro non è che un caso particolare della relazione  $[\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_w] = \mathcal{L}_u$  sopra dimostrata, con  $u$  dato dalla (A.2.1). Pertanto questa relazione esprime il significato profondo della identità di Jacobi.

