

Capitolo 7

Esempi classici di Sistemi Integrabili

7.1 Il problema di Keplero

Uno degli eventi più importanti per la fisica, e per la scienza in generale, fu sicuramente la soluzione, ottenuta da Newton, del cosiddetto problema di Keplero, ovvero la determinazione del moto di un punto materiale soggetto ad una forza centrale la cui intensità varia con l'inverso del quadrato della distanza dal centro attrattore¹. Ad una tale schematizzazione si può ricondurre il moto di un pianeta attorno al Sole (quando si trascurino le influenze degli altri pianeti), ed anche il moto di due corpi elettricamente carichi (quando si trascurino l'irraggiamento e l'effetto della velocità finita di propagazione delle forze elettriche).² Questo secondo ambito è di fondamentale importanza per la fisica atomica, perché permise di interpretare gli esperimenti di Rutherford del 1911 sulla diffusione delle particelle alfa da parte di una sottile lamina d'oro, come processi dovuti alla presenza di un nucleo carico

¹È questo in effetti il cosiddetto *problema diretto*: determinare il moto dato il campo di forze. Si ha anche il *problema inverso*: determinare il campo di forze quando siano dati i movimenti. Anche questo problema fu risolto da Newton, che fu capace di risalire alla forza gravitazionale partendo dalle leggi fenomenologiche di Keplero. Si tratta di un punto assai rilevante, perché naturalmente le forze che si esercitano tra i corpi celesti non vengono misurate direttamente. Si noti anche come l'ipotesi della forza gravitazionale, indotta dalle leggi di Keplero riguardanti i moti ellittici, conduca poi, mediante la soluzione del problema diretto, anche ai moti iperbolici (oltre a quelli parabolici), che non erano stati osservati. Si ha dunque, proprio in questa svolta cruciale della storia della fisica, un esempio in cui le osservazioni portano ad indurre una legge matematica che permette di prevedere una nuova fenomenologia.

²In effetti, anche la gravità si propaga, secondo la teoria della relatività, con velocità finita, uguale a quella della luce. Risulta tuttavia che, almeno nel trattare i moti planetari, l'approssimazione di trasmissione istantanea è adeguata.

essenzialmente puntiforme posto al centro dell'atomo.³ In effetti, in entrambi i casi (Kepleriano e Coulombiano) si avrebbe a che fare con un *problema a due corpi*. Come mostrato nel Capitolo 1, questo problema si riduce a un problema ad un corpo per il moto relativo, pur di prendere come massa m il valore della massa ridotta del sistema (definita da $1/m = 1/m_1 + 1/m_2$, ovvero $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$).⁴

Incominceremo con il discutere le soluzioni limitate (dette *stati legati*) del problema di Keplero, cioè le soluzioni che descrivono i moti dei pianeti. In seguito, nella seconda parte, daremo una descrizione del processo di diffusione (*stati d'urto o di scattering*) con il calcolo della cosiddetta *sezione d'urto differenziale*.

Dal punto di vista matematico, si tratta di trovare le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$m\ddot{\mathbf{q}} = K \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3}, \quad (7.1.1)$$

dove \mathbf{q} è il vettore posizione del punto considerato rispetto al centro di attrazione, m la massa del punto, mentre la costante K dipende dal problema considerato: nel caso gravitazionale $K = -GmM_S$, dove G è la costante di gravitazione universale ed M_S la massa del Sole, mentre nel caso Coulombiano (cioè nel caso di corpi carichi elettricamente) K è pari al prodotto delle cariche elettriche dei due corpi (e quindi in particolare è positivo nel caso di cariche di segno opposto).⁵ Le (7.1.1) sono le equazioni di Lagrange relative alla Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{K}{|\mathbf{q}|}.$$

La trattazione può essere svolta in modo simile a quanto visto nel Capitolo 1: essendo la forza di tipo centrale, il momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{q} \wedge m\dot{\mathbf{q}}$ si conserva (è una costante del moto), per cui il moto si svolge in un piano (ortogonale al vettore costante \mathbf{L}). Se introduciamo in tale piano le coordinate polari (r, θ) aventi il polo coincidente con il centro del campo di forze, la Lagrangiana diviene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r}, \quad (7.1.2)$$

³In effetti, il nucleo ha dimensioni dell'ordine di 10^{-13} cm, 10^5 volte più piccole di quelle dell'atomo.

⁴In particolare, per il caso planetario, m differisce realmente poco dalla massa M_P del pianeta. Anche nel caso della diffusione di Rutherford, il moto del nucleo di oro si può trascurare in prima approssimazione, perché la sua massa è circa 50 volte la massa della particella alfa incidente. Un riscontro più accurato con le misure sperimentali, richiederebbe di considerare il moto di rinculo del nucleo bersaglio, ma questo problema non verrà affrontato in queste note. Per una discussione vedi Landau, Lifschitz, *Corso di Fisica Teorica*, Vol. 1, Meccanica.

⁵Per il caso Coulombiano, usiamo qui e nel seguito il sistema di unità di Gauss, che è il sistema tradizionale della fisica teorica.

che mostra subito che l'energia ed il momento coniugato a θ si conservano, in quanto la Lagrangiana non dipende né dal tempo né da θ . Abbiamo quindi i due integrali del moto seguenti

$$l = mr^2\dot{\theta}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}, \quad (7.1.3)$$

essendo l ed E rispettivamente l'intensità del momento angolare e l'energia. Si noti che nell'espressione dell'energia cinetica (ovvero $(1/2)m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2]$, come al solito, è stata usata per $\dot{\theta}$ l'espressione ricavata dalla conservazione del momento angolare. Notiamo che $l/(2m)$ è la classica velocità areolare, cioè la derivata temporale dell'area spazzata dal raggio vettore,⁶ e quindi la costanza di l implica la seconda legge di Keplero o legge delle aree.

Come già discusso nel capitolo sulle equazioni di Lagrange, l'energia E a la stessa forma di quella di un punto materiale che si muove su una semiretta ($r > 0$), soggetto all'azione di un'energia potenziale efficace $V_{eff}(r)$ (dipendente parametricamente da l , e denotato con $V_l^*(r)$ nel capitolo sulle equazioni di Lagrange), data da

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{K}{r},$$

il cui grafico è riportato in Figura 7.1 per il caso Kepleriano (cioè il caso con $K < 0$, che descrive anche il caso Coulombiano attrattivo, con cariche di segno opposto). Si vede chiaramente che i moti risultano illimitati per $E \geq 0$ (si tratta dei cosiddetti *stati d'urto*), mentre sono confinati (*stati legati*), precisamente in una corona circolare $r_m < r < r_M$, per energie comprese tra un ben definito valore minimo⁷ e zero. Negli istanti in cui il raggio r assume il valore massimo r_M oppure minimo r_m , la derivata \dot{r} deve naturalmente annullarsi (condizione necessaria per l'esistenza di un estremo), per cui (come si vede dalla seconda delle (7.1.3)) r_M ed r_m possono essere determinati come soluzioni dell'equazione

$$E = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{K}{r};$$

in altri termini, si tratta dei punti in cui l'energia potenziale efficace coincide con l'energia totale. Moltiplicando entrambi i membri per r^2 si ottiene una

⁶Infatti in un tempuscolo dt , il punto si sposta di una quantità pari a $d\mathbf{r}$, e l'area dA spazzata dal raggio vettore per la definizione di prodotto vettoriale risulta essere

$$dA = |\mathbf{q} \wedge d\mathbf{q}|/2 = r^2 d\theta, \quad r = |\mathbf{q}|.$$

Dividendo per dt si ottiene il risultato.

⁷Tale minimo è determinato dal valore costante di l , a sua volta determinato dallo stato iniziale.

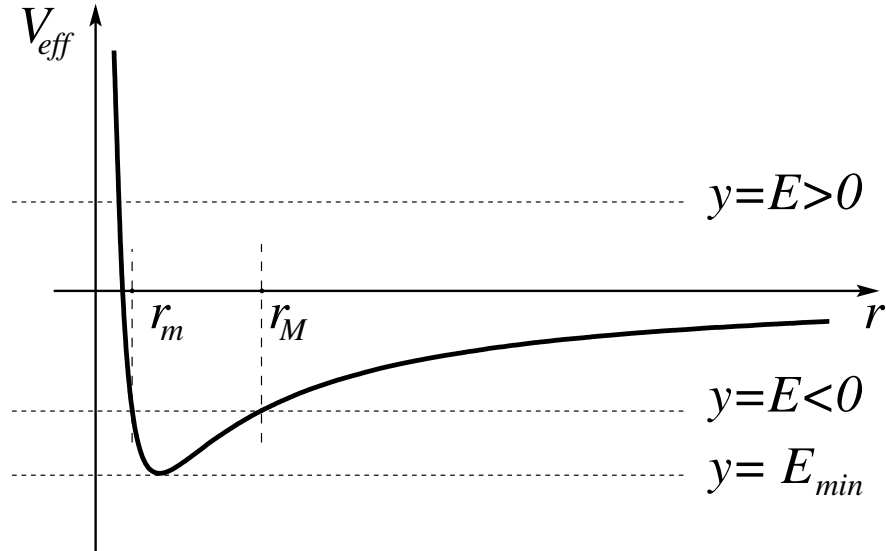


Figura 7.1: Grafico del potenziale efficace nel caso in cui $K < 0$, per $l \neq 0$.

equazione di secondo grado nell'incognita r , sicché le note relazioni tra radici e coefficienti dell'equazione si traducono nelle relazioni

$$r_M r_m = \frac{-l^2}{2mE}, \quad r_M + r_m = \frac{K}{E}, \quad (7.1.4)$$

che saranno utilizzate nel seguito.

Per completezza di informazione, accenniamo ora a come si perviene a determinare la forma delle orbite seguendo un procedimento del tutto generale, valido nel caso di dipendenza arbitraria della forza dalla distanza. Vedremo poi come nel nostro caso particolare la trattazione venga di fatto semplificata, facendo uso del fatto che allora esiste una ulteriore costante del moto (integrale di Laplace–Runge–Lenz). Si osserva anzitutto che l'espressione (7.1.3) dell'energia può essere riguardata come una equazione differenziale del primo ordine per r (ovviamente non posta in forma normale), una volta che siano assegnati i valori di E ed l , cioè una volta che si siano assegnati i dati iniziali. Infatti ricavando \dot{r} dalla seconda di (7.1.3) otteniamo (supponiamo ad esempio che sia inizialmente $\dot{r}_0 > 0$)

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}},$$

che è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Come è noto⁸, la soluzione è fornita (in forma implicita, cioè a meno di una inversione)

⁸Consideriamo l'equazione $\frac{dx}{dt} = f(x)$ in un intervallo in cui sia $f(x) \neq 0$. Allora la funzione $x = x(t)$ è monotona, ed è dunque definita la funzione inversa $t = t(x)$, e per la formula della derivata della funzione inversa si ha allora $\frac{dt}{dx} = 1/f(x)$.

dall'espressione

$$t(r) - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dx}{\sqrt{E - l^2/(2mx^2) - K/x}}. \quad (7.1.5)$$

Questa espressione ha dei problemi per $r = r_m$ o per $r = r_M$, in quanto l'integrando diverge, coerentemente con il fatto che \dot{r} si annulla in tali punti. Lo studio del problema dell'inversione degli integrali costituisce un capitolo molto bello dell'analisi complessa, ma noi non ne avremo bisogno, perché nel seguito troveremo la legge oraria come soluzione della cosiddetta equazione di Keplero, da lui trovata già nel 1610 (prima cioè della formulazione della legge di gravitazione universale da parte di Newton e dunque dell'equazione del moto). Naturalmente a tale equazione si perviene anche calcolando l'integrale precedente, ma tale calcolo di forza bruta oscurerebbe le ragioni del risultato che si ottiene.

Analogamente, l'orbita $r = r(\theta)$ si può ottenere risolvendo l'equazione differenziale

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{2m} r^2}{l} \sqrt{E - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}},$$

che si ottiene ricordando⁹ che $dr/d\theta = \dot{r}/\dot{\theta}$, ed usando per $\dot{\theta}$ l'espressione che si ricava dalla conservazione del momento angolare, e per \dot{r} l'espressione trovata più sopra utilizzando la conservazione dell'energia. Anche questa equazione differenziale è a variabili separabili, e la soluzione è data implicitamente dall'espressione

$$\theta - \theta_0 = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dx}{x^2 \sqrt{E - l^2/(2mx^2) - K/x}}.$$

Calcolando l'integrale ed invertendo la relazione ottenuta, si trova che l'orbita è una sezione conica. In particolare, nel caso attrattivo (caso gravitazionale o caso Coulombiano con cariche di segno opposto) si ha un'ellisse (in particolare un cerchio) o una parabola o un'iperbole secondo il valore dell'energia (rispettivamente, $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$).

Si ha dunque il risultato che, nel caso di forze attrattive che decrescono come il quadrato della distanza, per energie negative tutte le orbite sono **periodiche**. Si noti che si tratta di un caso eccezionale, l'unico altro caso essendo quello dell'oscillatore armonico. Infatti si dimostra che, tranne che in tali due casi (kepleriano e armonico), per forze centrali a simmetria sferica si trovano orbite dense nella corona circolare $r_m < r < r_M$. Andiamo dunque ad illustrare la ragione di tale comportamento eccezionale, con un argomento che al contempo ci fornirà anche un metodo per determinare l'orbita, senza dovere fare ricorso al calcolo di alcun integrale.

Osserviamo anzitutto che se (avendo fissato i valori dell'energia e del momento angolare) l'orbita risulta essere periodica, ciò significa che deve esserci un'altra costante del moto. Infatti, avendo fissato un certo valore di θ (cioè una semiretta nel piano in cui si svolge il moto) devono allora risultare

⁹Vale forse la pena di ricordare che la conservazione del momento angolare implica, quando esso sia diverso da zero, che la velocità angolare $\dot{\theta}$ è sempre diversa da zero, cioè θ è una funzione monotona del tempo e dunque può essere invertita a dare $t = t(\theta)$.

univocamente determinati i valori di r e di \dot{r} ¹⁰ mentre le informazioni della conservazione dell'energia e del momento angolare ci direbbero soltanto che una di quelle due variabili è funzione dell'altra. Fissato θ , si ha dunque che r ed \dot{r} devono soddisfare un altro vincolo, oltre la conservazione dell'energia e del momento angolare, in modo che il loro valore risulti univocamente determinato. Ma l'esistenza di un altro vincolo tra posizione e velocità significa che esiste un altro integrale del moto oltre a quelli già trovati. Mostriamo ora che infatti esiste un certo vettore, detto vettore di Runge–Lenz (o di Laplace) che è una costante del moto indipendente dall'energia e dal momento angolare. Si tratta del vettore \mathbf{C} definito da

$$\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} K \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} - \mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{q}}, \quad (7.1.6)$$

Per dimostrare che \mathbf{C} si mantiene costante lungo le soluzioni dell'equazione di Newton, l'idea centrale consiste nel seguire l'evoluzione temporale del versore $\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ diretto verso il punto mobile, osservando che si ha l'identità (si usi $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}$)

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{\dot{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|} - \mathbf{q} \frac{\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|^3} = \frac{(\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3} = (\mathbf{q} \wedge \dot{\mathbf{q}}) \wedge \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3},$$

dove si è usata la nota formula del doppio prodotto vettore

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Usando l'equazione di moto (7.1.1) ricordando che $\mathbf{L} = \mathbf{q} \wedge m \dot{\mathbf{q}}$, la relazione precedente si scrive come

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{1}{K} \mathbf{L} \wedge \ddot{\mathbf{q}},$$

e dunque, essendo \mathbf{L} costante del moto, si trova

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} - \frac{1}{K} \mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{q}} \right) = 0.$$

Il vettore \mathbf{C} ovviamente giace nel piano del moto, e si vede inoltre facilmente che è nullo nel caso in cui il moto sia circolare. Nei punti in cui $\dot{r} = 0$, cioè nei punti di massima e minima distanza dal centro di forze (ovvero all'afelio ed al perielio nel caso dei pianeti), la velocità è puramente tangenziale, per cui $\mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{q}}$ è un vettore puramente radiale, ovvero diretto come $\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$, e dunque la direzione di \mathbf{C} coincide con quella di $\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ nei punti di massima o minima distanza. Viceversa, i punti aventi distanza massima r_M e quelli aventi distanza minima r_m dal centro delle forze, che a priori potrebbero giacere su rette (passanti per il centro di forze) aventi una direzione qualsiasi nel piano, devono invece giacere sulla retta diretta come il vettore \mathbf{C} che è un vettore costante. In altri termini, esiste una retta passante per il centro delle forze (la retta diretta come \mathbf{C}) avente la proprietà che le orbite la attraversano in soli due punti; dunque le orbite sono chiuse (e i moti

¹⁰Si considerano orbite periodiche semplici, che compiono un solo giro attorno all'origine.

periodici). Vedremo che le orbite sono coniche, con asse disposto lungo il vettore \mathbf{C} .

Per quanto riguarda il modulo C del vettore \mathbf{C} , ovviamente si ha (si ricordi che abbiamo denotato con l l'intensità del vettore \mathbf{L} , e che \mathbf{L} è ortogonale a $\dot{\mathbf{q}}$)

$$\begin{aligned} C^2 &= K^2 + l^2 \dot{\mathbf{q}}^2 - \frac{2K}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{q}}) = \\ &= K^2 + \frac{2l^2}{m} \left(E - \frac{K}{|\mathbf{q}|} \right) + \frac{2K}{m|\mathbf{q}|} l^2 \end{aligned}$$

ovvero

$$C^2 = K^2 + \frac{2El^2}{m}, \quad (7.1.7)$$

dove si è usata la costante dell'energia per esprimere $\dot{\mathbf{q}}^2$ in funzione dell'energia E e del potenziale, e la proprietà del doppio prodotto misto $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{L} \cdot (\dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{q})$.

Ora l'equazione dell'orbita si ottiene direttamente senza bisogno di alcuna integrazione. Infatti scriviamo la (7.1.6) nella forma

$$\mathbf{L} \wedge \dot{\mathbf{q}} = K \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} - \mathbf{C};$$

prendendo il modulo al quadrato di entrambi i membri ed usando, come sopra, l'espressione di $\dot{\mathbf{q}}^2$ in funzione dell'energia E e del potenziale, si trova

$$\frac{2}{m} l^2 \left(E - \frac{K}{|\mathbf{q}|} \right) = C^2 + K^2 - 2CK \cos(\theta - \theta_0),$$

dove θ e θ_0 sono gli angoli che il vettore posizione \mathbf{q} e il vettore \mathbf{C} formano con la semiretta $\theta = 0$. Usando l'espressione (7.1.7) per C^2 si ottiene

$$-\frac{Kl^2/m}{r} = K^2 \left(1 - \frac{C}{K} \cos(\theta - \theta_0) \right)$$

che si scrive anche come

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (7.1.8)$$

dove le costanti p ed ε hanno le espressioni seguenti in termini delle costanti del moto l ed E (oppure C), e dei parametri m e K :

$$\begin{aligned} p &= -\frac{l^2}{mK} \\ \varepsilon &= -\frac{C}{K}, \quad \varepsilon^2 = \frac{C^2}{K^2} = 1 + \frac{2El^2}{mK^2}. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

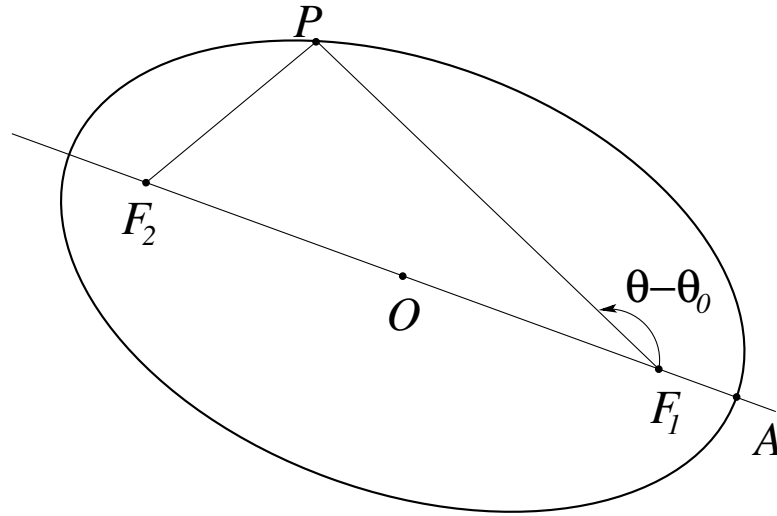


Figura 7.2: Deduzione dell'equazione dell'ellisse in coordinate polari.

7.1.1 Moti ellittici ed equazione di Keplero

Cominciamo col mostrare che la (7.1.8) definisce effettivamente una conica. Diamo la dimostrazione nel caso dell'ellisse (nel caso dell'iperbole la dimostrazione è analoga). Con riferimento alla Figura 7.2, l'ellisse è il luogo dei punti P per cui, assegnati due punti F_1 ed F_2 detti fuochi, vale $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ (con $\overline{PF_1}$ denotiamo il vettore spostamento dal punto P al punto F_1 , e con $\overline{PF_1}$ la sua lunghezza). Preso F_1 come polo delle coordinate polari, allora vale $\overline{PF_1} = r$; introduciamo anche la costante c definita come semidistanza tra i due fuochi, ovvero da $2c \stackrel{\text{def}}{=} \overline{F_1F_2}$. Ora quadrando la relazione che definisce l'ellisse¹¹ si trova

$$\overline{PF_2}^2 = r^2 + 4a^2 - 4ar .$$

D'altra parte, per il teorema di Carnot si ha anche¹²

$$\overline{PF_2}^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc \cos(\theta - \theta_0) ,$$

e si perviene in tal modo alla relazione

$$4a^2 - 4ar = 4c^2 + 4rc \cos(\theta - \theta_0) , \quad (7.1.10)$$

¹¹Nel caso dell'iperbole cambia solo il segno del termine $4ar$.

¹²Se $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, allora si ha $c^2 \equiv \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

che fornisce¹³

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} ,$$

in cui figurano le quantità p (parametro) ed ε (eccentricità) definiti da

$$\varepsilon = c/a , \quad p = a(1 - \varepsilon^2) .$$

Ricordiamo qui per inciso dei fatti ben noti. Si riconosce immediatamente che l'ellisse è simmetrica rispetto all'asse focale e anche rispetto all'asse normale all'asse focale per il punto medio O del segmento F_1F_2 (centro). È quindi spontaneo introdurre un sistema di coordinate avente O per origine, con l'asse x lungo l'asse focale. Si riconosce subito che a (semiasse maggiore) ha il significato di ascissa dell'intersezione dell'ellisse con l'asse delle x , mentre le intersezioni con l'asse delle y hanno ordinate $\pm b$ con $b^2 + c^2 = a^2$ e dunque si ha $b < a$ e anche $c < a$, da cui segue in particolare che per l'ellisse si ha $\varepsilon < 1$. In termini dei semiassi a , b , l'eccentricità ε e il parametro p hanno le espressioni

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} , \quad p = \frac{b^2}{a} .$$

Notiamo che dalla seconda delle (7.1.9) si trova che, per energie E negative, l'eccentricità risulta minore di 1, come deve essere se la conica è un'ellisse. Inoltre da $p = a(1 - \varepsilon^2)$, usando le espressioni per p ed ε in termini del momento angolare e dell'energia si trova la relazione notevole

$$E = \frac{K}{a} ,$$

che mostra come il semiasse a della conica dipenda solamente dal valore dell'energia.

Infine, poiché il modulo del vettore \mathbf{C} determina (a parte la costante K) l'eccentricità dell'orbita, e la sua direzione determina l'asse della conica, talvolta tale vettore viene anche chiamato *vettore eccentricità*.

Vi è un'altra familiare parametrizzazione dell'ellisse (vedi Figura 7.3), cioè quella riferita a coordinate cartesiane la cui origine coincida con il centro O dell'ellisse. Se P è un punto sull'ellisse, di coordinate (cartesiane) (x, y) , allora vale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

sicché evidentemente esiste un angolo u tale che valga

$$x = a \cos u , \quad y = b \sin u .$$

¹³Si osservi che scegliendo $\theta_0 = 0$ o $\theta_0 = \pi$ si ha rispettivamente

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} , \quad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta} .$$

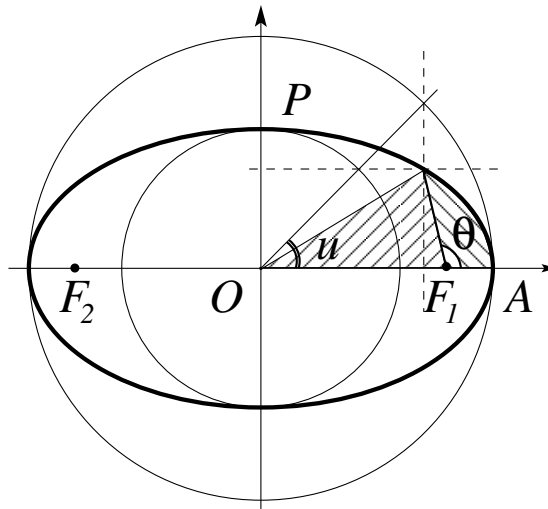


Figura 7.3: Deduzione dell'equazione di Keplero per l'anomalia eccentrica.

Il valore dell'angolo u è legato al valore dell'area S del settore di ellisse AOP dalla relazione¹⁴

$$S = \frac{ab}{2} u ,$$

che è l'analogia della relazione che esiste nel cerchio tra area del settore circolare ed angolo al centro. In astronomia, l'angolo θ viene chiamato *anomalia vera*, mentre l'angolo u viene chiamato *anomalia eccentrica*. Il punto A dell'orbita più vicino al centro di forze (il fuoco assunto come origine delle coordinate polari) viene chiamato *perielio* (dal greco vicino al sole –elio), e l'angolo ϕ definito dal rapporto $\phi \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi t/T$, dove t è il tempo necessario a percorrere l'arco \widehat{AP} e T il periodo di rivoluzione, viene detto *anomalia media* (perché evidentemente cresce con velocità costante). La relazione tra anomalia eccentrica ed anomalia vera è di tipo puramente geometrico e viene determinata molto semplicemente osservando che $r \cos \theta = x - c$ (vedi Figura 7.3) mentre, in virtù dell'equazione dell'ellisse nella forma (7.1.10), vale $ar = b^2 - cr \cos \theta$. Sostituendo ad $r \cos \theta$ l'espressione precedente segue $ar = a^2 - cx$, cioè

$$r = a(1 - \varepsilon \cos u) .$$

¹⁴Infatti, come si vede dalla Figura 7.3, l'angolo u non coincide con l'angolo al centro come nel caso del cerchio. Il calcolo dell'area del settore AOP si effettua agevolmente calcolando l'integrale di $(y dx - x dy)/2$ sulla frontiera di AOP . Ora, sui segmenti OA ed OP in cui $y = \alpha y$, vale $y dx - x dy = 0$ come un semplice calcolo mostra, mentre sull'arco \widehat{AP} vale $y dx - x dy = ab du$, come si verifica semplicemente usando la parametrizzazione dell'ellisse indicata.

Usando l'equazione dell'ellisse in coordinate polari

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} ,$$

si giunge infine, eguagliando le due diverse espressioni per r , alla seguente relazione tra θ ed u

$$(1 + \varepsilon \cos \theta)(1 - \varepsilon \cos u) = (1 - \varepsilon^2) .$$

La legge oraria del movimento viene espressa mediante una relazione tra anomalia eccentrica ed anomalia media che è equivalente ad effettuare esplicitamente l'integrale che compare nella (7.1.5). Abbiamo detto che l'area del settore ellittico POA vale $(ab/2)u$; tale area risulta somma dell'area del triangolo OF_1P pari a $cb/2 \sin u$, e dell'area PF_1A che, per la seconda legge di Keplero (o equivalentemente per la conservazione del momento angolare), è pari a $\pi ab t/T$. Si ottiene dunque l'equazione di Keplero

$$\frac{2\pi}{T}t = u - \varepsilon \sin u ,$$

che è la relazione che lega anomalia media ed anomalia eccentrica. Invertendo questa relazione si ottiene l'angolo u come funzione del tempo e dunque la legge oraria del movimento.

7.1.2 Scattering di Rutherford

Per discutere la diffusione di un fascio di particelle incidenti, da parte di un centro diffusore, bisogna introdurre un concetto nuovo: la cosiddetta *sezione d'urto differenziale*. Si deve pensare che il fascio di particelle provenga dall'infinito, tutte con la medesima velocità asintotica \mathbf{v} , mentre le posizioni iniziali siano distribuite uniformemente. In termini del parametro d'urto b , definito come la distanza tra il centro di forze F_1 (vedi la Figura 7.4) e la retta su cui giace la velocità asintotica, si suppone che i valori di b relativi alle varie particelle siano distribuiti uniformemente. L'intensità I del fascio è definita come il numero dn di particelle che nell'unità di tempo attraversa un certa areola da posta perpendicolarmente al fascio, e viene assunta essere la stessa in tutti i punti del fascio.

Le particelle incidono sul centro di forza e la loro velocità \mathbf{u} dopo l'urto (cioè la velocità asintotica delle particelle per $t \rightarrow +\infty$) sarà in generale diversa da \mathbf{v} , anche se, nel caso che stiamo considerando di *collisione elastica*, sarà eguale in modulo. L'angolo χ che la direzione di \mathbf{u} forma con la direzione di incidenza del fascio viene detto *angolo di diffusione*, o angolo di *scattering*. Il numero di particelle dn' che dopo l'urto avranno velocità \mathbf{u} con direzione giacente in un determinato angolo solido $d\Omega$,¹⁵ sarà evi-

¹⁵Naturalmente se siamo sufficientemente lontani dal centro diffusore, come avviene negli usuali esperimenti di fisica atomica e nucleare, le particelle che hanno $\mathbf{u} \in d\Omega$, sono quelle che effettivamente vengono rivelate nell'angolo solido $d\Omega$.

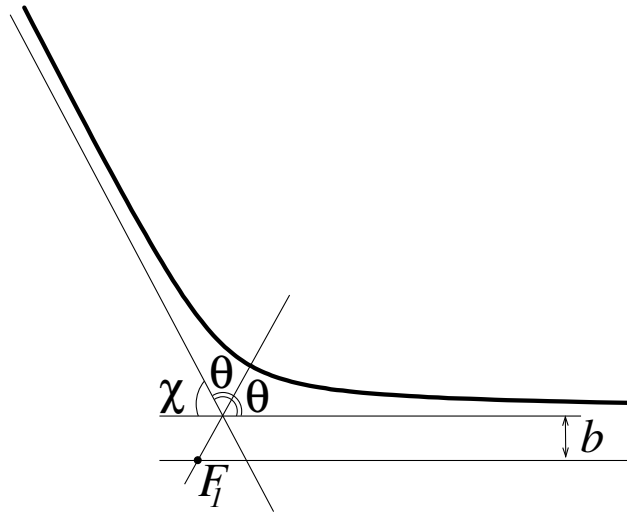


Figura 7.4: Descrizione cinematica dei processi di urto.

dentemente proporzionale (oltre che a $d\Omega$) all'intensità del fascio incidente (lo dimostreremo tra breve), e la costante di proporzionalità viene appunto detta *sezione d'urto differenziale*. Dunque definiamo la sezione d'urto differenziale σ come

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dn'}{I d\Omega} .$$

Se assumiamo che il centro diffusore agisca sulle particelle incidenti mediante un forza centrale, allora il problema è simmetrico per rotazioni aventi come asse la direzione di incidenza del fascio, per cui la sezione d'urto differenziale dipenderà solo dall'angolo χ di scattering (e dall'energia delle particelle incidenti, ovviamente). Integrando σ su tutto l'angolo solido otterrò la sezione d'urto totale, cioè il numero di particelle che viene diffuso per questo processo di collisione elastica. Questo processo è l'unico che può avvenire nella situazione semplicissima in cui ci siamo messi. Negli esperimenti reali, gli urti eccitano anche i gradi di libertà interni del centro diffusore, sicché in tal caso l'energia finale delle particelle potrà essere diversa dall'energia iniziale: si realizza così un processo *anelastico* a cui corrisponderà una determinata sezione d'urto (differenziale o totale).

Ci si può domandare quale sia l'interesse di studiare la sezione d'urto. Mentre è evidente che la sezione d'urto dipende dalle forze di interazione, per cui, come tra breve mostreremo, è possibile calcolare la sezione d'urto per tutte le energie e tutti gli angoli di diffusione, viceversa è anche possibile risalire dalla sezione d'urto alle forze di interazione. Questa fu proprio l'idea di Rutherford che riuscì a stabilire, misurando la sezione d'urto, che il potenziale di interazione tra atomi di oro e particelle alfa fosse con buonissima

approssimazione quello determinato da una carica positiva puntiforme. Si fu quindi forzati ad abbandonare l'idea che la carica positiva fosse distribuita come un continuo in tutto il volume dell'atomo, per adottare il cosiddetto modello planetario in cui tutta la carica positiva (ed essenzialmente anche la massa) dell'atomo è concentrata in un volume trascurabile al centro di questo. Solo in seguito, usando particelle di energia molto più alta di quelle disponibili all'epoca di Rutherford, si è cominciato a sondare la distribuzione di carica all'interno del nucleo atomico.

Tornando al calcolo della sezione d'urto, cominciamo preliminarmente ad osservare che ad ogni parametro d'urto b corrisponde una ben precisa traiettoria e quindi un ben preciso angolo di scattering $\chi = \chi(b)$. Allora il numero dn' di particelle che viene diffuso sotto un angolo tra χ e $\chi + d\chi$ sarà eguale al numero di particelle che incide con un parametro d'impatto tra b e $b + db$. Per la definizione di intensità del fascio tale numero è evidentemente $dn' = I 2\pi b db$, per cui dalla definizione di sezione d'urto, ricordando che $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$,¹⁶ si ottiene

$$\sigma = \frac{dn'}{I d\Omega} = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \quad (7.1.11)$$

Notiamo che, in questa formula, σ è intesa dipendente da b , per cui bisogna ancora invertire la relazione $\chi = \chi(b)$ per trovare $b = b(\chi)$ e poter quindi determinare σ in funzione di χ , che è proprio quello che effettivamente si misura negli esperimenti di diffusione. Tale inversione è assicurata se si ha $d\chi/db \neq 0$, come mostreremo che avviene nel caso di Rutherford.¹⁷

Per comprendere meglio il significato delle quantità introdotte, proviamo a considerare, come esercizio, la diffusione di una particella puntiforme da parte di una sfera rigida di raggio a .

Esercizio 1. (Diffusione da una sfera rigida). Calcolare la sezione d'urto $\sigma(\chi)$ differenziale e la sezione d'urto σ_T totale, per la diffusione da parte di una sfera rigida di raggio a .

Soluzione. L'interazione tra sfera e particella incidente avviene secondo la legge della riflessione, in modo cioè che l'angolo di riflessione sia eguale all'angolo di incidenza. Allora, come si vede dalla figura 7.5, detto χ l'angolo di diffusione e θ l'angolo di incidenza si ha $\pi - \chi = 2\theta$. Sempre dalla figura si vede che il legame tra il parametro d'urto b e l'angolo θ è dato da $b = a \sin \theta$, dove $a \stackrel{\text{def}}{=} \overline{OP}$ è il raggio della sfera. La relazione tra parametro d'urto ed angolo di diffusione è dunque data

¹⁶Abbiamo sfruttato la simmetria cilindrica del problema, andando a calcolare il numero di particelle che cadono nel cono $(\chi, \chi + d\chi)$. La distribuzione è ovviamente uniforme per rotazioni attorno all'asse del cono.

¹⁷Nel caso di potenziali generici questa condizione non è sempre verificata, per cui la funzione $b = b(\chi)$ risulterà in generale multivoca, cioè si avranno diversi valori b_i per ogni valore di χ . In questo caso la sezione d'urto si ottiene sommando i diversi contributi, dati dalla (7.1.11) calcolata per ogni ramo b_i .

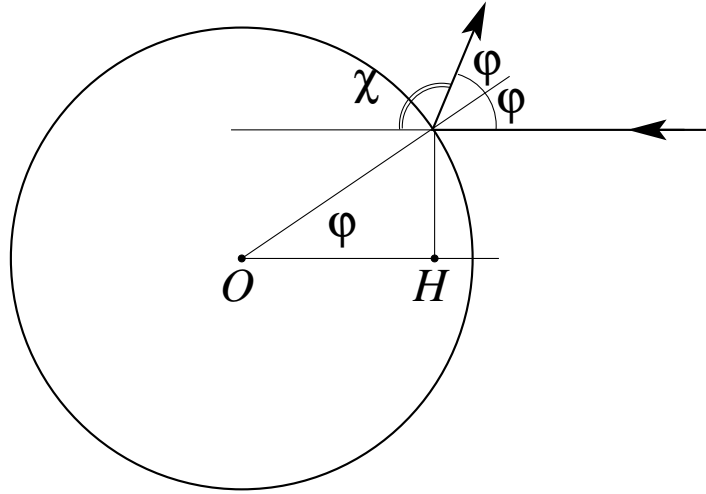


Figura 7.5: Diffusione da una sfera rigida.

da

$$b = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} .$$

Ora, la sezione d'urto si trova applicando la relazione (7.1.11), che fornisce immediatamente

$$\sigma = \frac{a^2 \cos \frac{\pi - \chi}{2} \sin \frac{\pi - \chi}{2}}{2 \sin \chi} = \frac{a^2}{4} ,$$

dove si è usata la formula di duplicazione per il seno a numeratore, e poi le proprietà del seno di angoli supplementari. Si trova quindi che la sezione d'urto differenziale è una costante, cioè il numero di particelle diffuse sotto ogni angolo è il medesimo. Sotto questo aspetto la sfera si comporta come una sorgente sferica di particelle. La sezione d'urto totale vale $\sigma_T = \pi a^2$ (la si trova semplicemente moltiplicando σ per 4π , l'angolo solido sotteso dalla sfera), cioè pari alla superficie della sezione del bersaglio, la sfera in questo caso. È per questo motivo che talvolta la sezione d'urto totale viene intesa come indicazione della "dimensione del bersaglio", anche quando il bersaglio interagisce con la particella incidente mediante un potenziale di interazione liscio, e non mediante un urto.

A differenza con quanto visto nell'esercizio, per lo scattering da un potenziale Coulombiano si ha una forte dipendenza della sezione d'urto dall'angolo di diffusione. Come mostreremo tra breve la sezione d'urto σ è data infatti da

$$\sigma = \frac{K^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} . \quad (7.1.12)$$

In particolare questo implica che la sezione d'urto totale risulta infinita, cioè vi è un numero infinito di particelle che vengono diffuse dalla forza Coulombiana. Questo è dovuto al fatto che σ diverge in maniera non integrabile

per $\chi \rightarrow 0$, ovvero per $b \rightarrow \infty$ (come mostra l'espressione per $b = b(\chi)$ data più avanti). In altri termini, nel caso Coulombiano non esiste una distanza tipica, oltre la quale la forza si possa considerare ininfluenza per il moto delle particelle. Per questo si usa dire che la forza Coulombiana è a lungo raggio d'azione (*long range* in inglese).

Per determinare b in funzione di χ nel caso Coulombiano, notiamo che, come si vede dalla Figura 7.4, l'angolo di scattering χ è legato all'angolo θ che l'asintoto dell'iperbole forma con l'asse della conica, dalla relazione

$$\chi = \pi - 2\theta .$$

Ora, dall'espressione in coordinate polari dell'iperbole

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta} , \quad \varepsilon > 1 ,$$

si vede che r diventa infinito per $\cos \theta = 1/\varepsilon$, e dunque l'angolo θ sarà proprio dato da $\theta = \arccos 1/\varepsilon$.¹⁸ L'eccentricità dell'iperbole risulta dunque legata all'angolo di diffusione dalla relazione seguente

$$\varepsilon = \frac{1}{\sin \frac{\chi}{2}} .$$

L'unica difficoltà che resta è di esprimere l'eccentricità in funzione del parametro d'urto b , ma questo si può fare agevolmente, come vedremo subito, e si trova

$$b = \frac{K}{2E} \cot \frac{\chi}{2} .$$

Infatti dalla definizione di parametro d'urto si ha

$$l = m|\mathbf{v}|b = \sqrt{2mE} b ,$$

da cui, tramite la (7.1.9), segue

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{4E^2}{K^2} b^2 ,$$

da cui si ricava

$$b = \frac{K}{2E} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} - 1} = \frac{K}{2E} \cot \frac{\chi}{2} ,$$

che è l'espressione data sopra.

Sostituendo questa espressione nella formula generale (7.1.11), si trova alla fine

$$\sigma = \frac{K^2 \cot \frac{\chi}{2}}{8E^2 \sin \chi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} ,$$

che è equivalente all'espressione (7.1.12) data sopra per la sezione d'urto.

¹⁸Nel caso di un generico potenziale centrale l'angolo θ è dato invece da

$$\theta = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_m}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{E - V_{eff}(x)}} ,$$

mentre il resto delle considerazioni rimane inalterato.

7.2 Piccole Oscillazioni

Se si dovesse seguire un percorso storico nello studio della meccanica, la primissima parte da studiare sarebbe la **statica**, cioè la scienza che studia sotto quali condizioni i corpi non si muovono. E' evidente poi l'importanza fondamentale di avere manufatti che siano stabili (dagli oggetti di uso comune, alle abitazioni, alle grandi opere pubbliche) e si comprende dunque come le condizioni per ottenere tale stabilità siano da sempre oggetto di indagine approfondita.

Meno evidente, e per lo più sconosciuto, è il fatto che da questo sforzo intellettuale è nata la dinamica, cioè lo studio dei corpi **in movimento**, che dalla statica ha preso ad esempio il concetto di forza, con il suo carattere vettoriale, oppure il principio dei lavori virtuali, e tutta l'impostazione generale che lo sottende. Un tentativo di elucidare questi rapporti sarà dato in un'altra parte di queste dispense,¹⁹ e ci limiteremo per ora ad alcuni cenni di come si possa, in un certo senso, recuperare la statica a partire dalla dinamica. Da un punto di vista logico, ad esempio, se un punto non si muove, vuol dire che la sua posizione è costante nel tempo, cioè è data da $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ per tutti i t . Da questo punto di vista un punto fermo rappresenta solo un particolare caso di un corpo in moto, il caso cioè di un corpo avente velocità sempre nulla. Come abbiamo cercato di avvertire più sopra, una tale visione rischia di banalizzare il problema, ma comunque, in questo modo, la statica si riduce allo studio delle soluzioni costanti delle equazioni di Lagrange. In un certo senso, è poi la matematica stessa a vendicare la statica, perché questi moti costanti risultano giocare un ruolo fondamentale per guidare la stessa evoluzione dinamica generica dei sistemi, come è illustrato ad esempio nel primo capitolo delle note di Meccanica Analitica II degli stessi autori.²⁰ In altri termini, anche rimanendo al solo livello matematico, questi moti costanti risultano avere un carattere distintivo e particolarmente rilevante, che giustifica il loro studio particolareggiato.

Nel prossimo paragrafo daremo una esposizione molto elementare della nozione di punto di equilibrio, e in quello successivo (ancora da scrivere) tratteremo alcuni esempi elementari e tuttavia significativi tratti dalla statica. Nel prossimo paragrafo si introduce il concetto di punto di equilibrio stabile (che risulta fondamentale per la statica) e si dà un criterio per la stabilità di un punto di equilibrio. Mediante esempi viene anche presentato il problema della linearizzazione delle equazioni di moto attorno al punto di equilibrio e di come si affronta lo studio delle piccole oscillazioni. Ad una trattazione sistematica di questo problema è dedicata l'ultimo paragrafo. Segue infine un paragrafo dedicato alle piccole oscillazioni di una catena li-

¹⁹ Ancora da scrivere.

²⁰ Il caso più impressionante è quello dei punti di equilibrio iperbolici che, attraverso le corrispondenti varietà stabili ed instabili, producono in generale punti omoclini che danno origine ai cosiddetti moti caotici.

neare di particelle, che è il più semplice tra una classe di problemi di notevole importanza ad esempio nella fisica statistica.

7.2.1 Punti di equilibrio

Cominciamo dunque a dare un nome alle cose, e per un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) ,$$

definiamo le **soluzioni di equilibrio** come le soluzioni costanti nel tempo, cioè del tipo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_o, \forall t \in \mathbb{R}$ (i punti non si muovono, nel linguaggio della dinamica). Naturalmente, affinché tali moti siano soluzioni occorre che \mathbf{x}_o abbia un valore ben determinato. Infatti, poiché abbiamo assunto $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$, deve essere

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) ,$$

cioè \mathbf{x}_o deve essere un punto in cui si annulla l'assegnato campo vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Tali punti vengono detti punti di equilibrio.

Nel caso delle equazioni di Newton, o più in generale nel caso lagrangiano, la situazione è leggermente più complicata, poiché le equazioni sono del secondo ordine e non del primo; comunque la definizione di soluzione di equilibrio rimane la medesima. Ci limiteremo a considerare il caso di Lagrangiane indipendenti dal tempo, in cui cioè si ha $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Definizione 1 Una soluzione costante delle equazioni di Lagrange, cioè della forma $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_o \forall t \in \mathbb{R}$, è detta soluzione di equilibrio.

Le soluzioni di equilibrio nel caso lagrangiano, sono caratterizzate da un valore \mathbf{q}_0 per cui vale

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\mathbf{q}_o, 0) = 0 \quad i = 1, \dots, n . \quad (7.2.1)$$

Infatti se nelle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

si sviluppa la derivata temporale al membro di sinistra in forma esplicita, si trova

$$\sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n , \quad (7.2.2)$$

per cui soluzioni $\mathbf{q}(t)$ statiche, cioè con tutte le derivate temporali nulle, rendendo identicamente nullo il membro di sinistra, devono necessariamente rendere nullo il membro di destra, cioè soddisfare la (7.2.1). Questo giustifica la definizione seguente

Definizione 2 Il punto \mathbf{q}_o si dice punto di equilibrio se risulta che la coppia $(\mathbf{q}_o, 0)$ è soluzione della (7.2.1).

Naturalmente nel caso di Lagrangiane naturale $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{q}$ non dipende dalle velocità (tranne nel caso del campo elettromagnetico), per cui comunemente si sottintende che la velocità debba essere nulla. Possiamo addirittura fare riferimento alla forma più generale delle equazioni di Lagrange, in cui si hanno forze attive \mathbf{F}_i ($i = 1, \dots, N$, dove N è il numero di punti materiali costituenti il sistema) che possono anche non ammettere energia potenziale. In tal caso si vede immediatamente che la condizione di equilibrio si esprime nella forma (si ammette che le reazioni vincolari siano perfette, cioè non lavorino per spostamenti conformi ai vincoli)

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{x}_k = 0, \quad (7.2.3)$$

per tutti gli spostamenti $d\mathbf{x}_k$ compatibili con i vincoli, cioè della forma

$$d\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_i} dq_i.$$

La relazione (7.2.3) esprime appunto il **Principio dei Lavori Virtuali**.

Tale principio, che appare ovvio a posteriori, fu invece conquistato comprendendo che esso sintetizza i risultati relativi alle macchine semplici, cioè a leve, piani inclinati e carrucole.²¹ In quest'ottica risulta notevole il teorema di Torricelli, che afferma la stabilità di un corpo pesante, se tutti i movimenti ammissibili provocano l'innalzarsi del baricentro. Risolveremo ora, sotto forma di esercizi, alcuni problemi elementari di statica. Il lettore non interessato alla statica, può saltare questa parte, e riprendere con la sezione successiva in cui si discute la stabilità dei punti di equilibrio.

7.2.2 Alcuni esempi tratti dalla statica

.....

7.2.3 Classificazione dei punti di equilibrio

Una classificazione interessante dei punti di equilibrio viene data mediante il concetto di stabilità. Intuitivamente una pallina ferma in fondo ad una scodella è in una situazione ben differente di una pallina in cima ad un colle. Infatti nel primo caso la pallina oscilla di poco se la spostiamo di poco dalla posizione di equilibrio, mentre nel secondo caso un piccolo spostamento causa grosse alterazioni del movimento. Nel primo caso diciamo che l'equilibrio

²¹Questo fatto è illustrato in maniera molto perspicua nei richiami portati da Lagrange, all'inizio della sua *Mécanique Analytique*.

è stabile. In realtà la nozione di equilibrio stabile, che ora formalizzeremo, è ancora più sottile, perché dice non solo che la soluzione si scosta di poco, a seguito di piccole perturbazioni dei dati iniziali, ma che ci può scostare di *arbitrariamente poco* pur di scegliere perturbazioni dei dati iniziali opportunamente piccole. La definizione di punto di equilibrio stabile recita infatti

Definizione 3 *Il punto di equilibrio $(\mathbf{q}_o, 0)$ si dice stabile se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se considero dati iniziali con $|\mathbf{q}_o - \mathbf{q}(0)| \leq \delta$ e $|\dot{\mathbf{q}}(0)| \leq \delta$, allora vale $|\mathbf{q}_o - \mathbf{q}(t)| \leq \varepsilon$ e $|\dot{\mathbf{q}}(t)| \leq \varepsilon$ per tutti i tempi.*

I punti di equilibrio che non sono stabili, vengono detti instabili. Per questi ultimi punti, comunque si fissi un δ positivo piccolo piacere, esiste un dato iniziale, a distanza dal punto di equilibrio minore di δ , che l'evoluzione seguente porta a distanza finita.

È possibile capire se un punto di equilibrio è stabile, senza dover conoscere le soluzioni dell'equazioni di moto per tutti i dati iniziali di un certo intorno del punto di equilibrio? Una risposta è data dall'importantissimo

Teorema 1 (di Dirichlet) *Per Lagrangiane naturali (indipendenti dal tempo), i punti \mathbf{q}_o di minimo per il potenziale $V(\mathbf{q})$, sono punti di equilibrio stabile.*

Una idea intuitiva della dimostrazione è la seguente: considero l'energia $E(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$, e le superfici Σ_h di energia costante $E(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = h$. In corrispondenza di $h_{min} = V(\mathbf{q}_o)$ la superficie $\Sigma_{h_{min}}$ si riduce al solo punto $(\mathbf{q}_o, 0)$ (essendo l'energia cinetica sempre non negativa). Per $h_{min} < h < h_o$ con h_o abbastanza piccolo, queste superfici (almeno localmente) delimitano degli intorni aperti del punto $(\mathbf{q}_o, 0)$ che sono invarianti per l'evoluzione (l'energia è una costante del moto). Ora se fisso un $\varepsilon > 0$, trovo (per continuità) una energia h' tale che $\Sigma_{h'}$ è contenuta interamente nell'intorno di raggio ε del punto $(\mathbf{q}_o, 0)$. Ora non resta che trovare un intorno di raggio δ contenuto interamente all'interno della superficie $\Sigma_{h'}$ per avere la dimostrazione.

Nel seguito ci limiteremo a considerare Lagrangiane naturali indipendenti dal tempo, proponendoci di studiare le equazioni di Lagrange (7.2.2) nell'intorno della posizione di equilibrio.

Esercizio 2. (Due masse mobili sulla retta). Siano dati due punti mobili P_1 e P_2 di egual massa m , liberi di muoversi su di una retta orizzontale, interagenti tra di loro (vedi figura 7.6) mediante una molla. Inoltre il punto P_1 è soggetto all'azione di una seconda molla il cui secondo estremo O è fisso, così come P_2 è soggetto all'azione di una ulteriore molla il cui altro estremo Q è parimenti fisso. Tutte le molle hanno lunghezza a riposo trascurabile, e hanno il medesimo valore k della costante elastica. Studiare i punti di equilibrio del sistema.

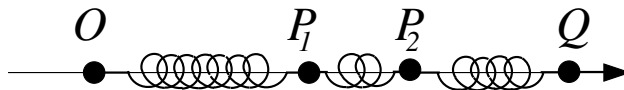


Figura 7.6: Due masse su di una retta.

Soluzione. Prendiamo come coordinate lagrangiane q_1 e q_2 , rispettivamente le distanze di P_1 e P_2 da O . Allora, indicata con l la lunghezza del segmento OQ , il potenziale sarà dato da

$$V(q_1, q_2) = \frac{k}{2}(\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2Q}^2) = \frac{k}{2}(q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + (l - q_2)^2) .$$

I punti di equilibrio saranno i punti stazionari del potenziale, cioè le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \partial_{q_1} V &= k(2q_1 - q_2) = 0 \\ \partial_{q_2} V &= k(2q_2 - q_1 - l) = 0 . \end{aligned}$$

Si controlla facilmente che l'unica soluzione è $q_1 = l/3$ ed $q_2 = 2l/3$, cioè, come era prevedibile, all'equilibrio i punti sono equispaziati. Poiché il potenziale corrisponde a un paraboloide che diverge a $+\infty$ per grandi valori di q_1 e q_2 , allora è evidente che il punto di equilibrio è un minimo del potenziale, e dunque abbiamo a che fare con un punto di equilibrio stabile.

Lo studio delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio si effettua agevolmente introducendo come coordinate quelle corrispondenti allo spostamento del sistema dalla posizione di equilibrio, definendo cioè $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} q_1 - l/3$ ed $x_2 = q_2 - 2l/3$. Il potenziale diventa allora

$$V(x_1, x_2) = \frac{k}{2}((x_1 + l/3)^2 + (x_2 - x_1 + l/3)^2 + (l/3 - x_2)^2) = \frac{k}{2}(l^2/3 + x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + x_2^2) .$$

Il potenziale non contiene termini lineari in x_1 , x_2 , ovviamente, in quanto stiamo facendo l'analogo dello sviluppo di Taylor attorno alla posizione di equilibrio, nel quale le derivate prime sono nulle. Trascurando il termine costante nel potenziale, la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + x_2^2) ,$$

da cui si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - 2x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= k(x_1 - 2x_2) . \end{aligned}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali accoppiate, che si possono disaccoppiare ponendo $r = x_1 - x_2$ ed $x_b = x_1 + x_2$. Infatti, sommando e sottraendo le due equazioni differenziali si ottiene il sistema disaccoppiato

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_b &= -kx_b \\ m\ddot{r} &= -3kr, \end{aligned}$$

che mostra come le variabili x_b ed r si muovono di moto armonico con frequenze rispettivamente pari a $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ ed $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$. Le variabili in cui le equazioni del moto si disaccoppiano vengono dette **modi normali di vibrazione (o di oscillazione)**. La natura dei modi normali si capisce meglio se si esprimono le variabili x_1 ed x_2 in termini di r ed x_b . Si ottengono infatti le relazioni

$$x_1 = \frac{x_b + r}{2}, \quad x_2 = \frac{x_b - r}{2},$$

le quali mostrano come al modo normale x_b corrisponde un moto in fase dei punti materiali P_1 e P_2 , mentre al modo normale r corrisponde un moto in controfase dei punti materiali.

Nell'esercizio precedente ci siamo ricondotti ad equazioni differenziali lineari che si sanno risolvere analiticamente. Nell'esercizio seguente, le equazioni sono non lineari e non si sanno risolvere esattamente. Si effettua allora l'approssimazione di **linearizzare** le equazioni del moto nell'intorno del punto di equilibrio, di fare cioè lo sviluppo di Taylor trascurando i resti di ordine superiore al primo. Intuitivamente si può pensare che se partiamo sufficientemente vicino al punto di equilibrio, i termini di ordine superiore al primo siano trascurabili. Naturalmente una tale assunzione va giustificata, perché si stanno approssimando le **equazioni**, mentre ci interessano le approssimazioni delle **soluzioni**. La questione è molto complessa: diremo solo che per tempi non troppo lunghi una tale approssimazione è sufficiente. Questa approssimazione (studiare cioè il sistema linearizzato invece del sistema completo) viene detta approssimazione delle **piccole oscillazioni**. Lo studio sistematico verrà affrontato nel paragrafo 7.2.5, mentre nei due esercizi seguenti si mostrerà su esempi concreti che cosa succede. Il primo esempio, è il familiare pendolo matematico (o pendolo semplice).

Esercizio 3. (Punto pesante su di un cerchio). Consideriamo un punto P pesante di massa m vincolato ad una circonferenza verticale di raggio l e centro O . Trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

Soluzione. Se indichiamo con θ (vedi figura 7.7) l'angolo che il segmento \overline{OP} forma con la direzione verticale, allora la Lagrangiana del problema sarà data da

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta),$$

dove abbiamo indicato con g l'accelerazione di gravità, e si è presa la quota di riferimento del potenziale corrispondente al punto più basso. I punti di equilibrio θ sono soluzione dell'equazione

$$\frac{d}{d\theta}\mathcal{L} = -mgl \sin\theta = 0,$$

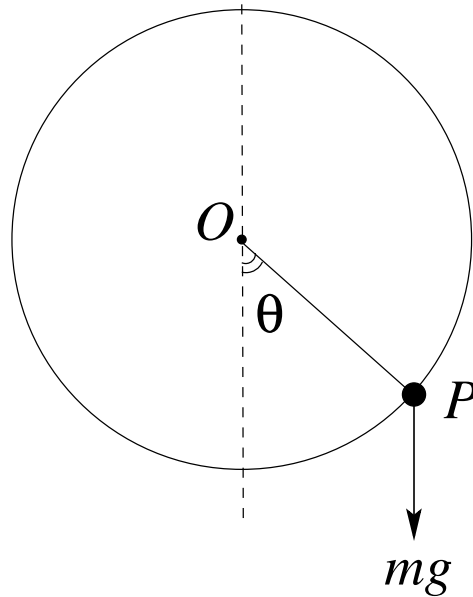


Figura 7.7: Punto vincolato su di una circonferenza verticale.

che ha due soluzioni (fisicamente) distinte $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$, cioè la posizione inferiore (corrispondente ad un minimo del potenziale) e la posizione superiore (corrispondente ad un massimo). Per il teorema di Dirichlet la posizione $\theta_1 = 0$, corrispondendo ad un minimo del potenziale, risulterà di equilibrio stabile. Come si muoverà il punto in un piccolo intorno di $\theta_1 = 0$? Anticipando quanto si farà più sistematicamente nel paragrafo successivo, possiamo sviluppare il potenziale nell'intorno di 0 in serie di Taylor. Si avrà allora

$$mgl(1 - \cos \theta) \sim \frac{mgl}{2} \theta^2 ,$$

che corrisponderà alla Lagrangiana approssimata

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{2l} \theta^2 ,$$

avendo ommesso il fattore costante ml^2 . Questa risulta la Lagrangiana di un oscillatore armonico, la cui frequenza di oscillazione vale $\omega^2 = g/l$.

Per quanto riguarda la posizione superiore, essa è un punto di massimo per il potenziale e dunque risulta instabile. Per convincersene, basta considerare l'energia nell'intorno del punto di equilibrio superiore. In termini dell'angolo $\varphi = \theta - \pi$, (dividendo ancora per il fattore costante ml^2) essa è data da

$$E = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{2l} \varphi^2 + O(\varphi^4) ,$$

che mostra come le linee di livello dell'energia sono (prossime ad) iperboli di asintoti $\dot{\varphi} = \pm(g/l)\varphi$. Allora, anche se si parte prossimi quanto si vuole al punto di equilibrio, in generale il punto, muovendosi lungo una curva ad energia costante uscirà da ogni intorno prefissato.

7.2.4 Catena lineare di punti

In questo paragrafo consideriamo il caso di una catena di $N + 2$ particella identiche vincolate a muoversi lungo una retta, in cui ogni coppia di particelle adiacenti interagisca mediante un medesimo potenziale $V(r)$, r essendo la distanza tra le due particelle adiacenti (vedi figura 7.8). Supponiamo inoltre che la prima e l'ultima particella siano fisse, cioè, indicando con q_i l'ascissa della i -esima particella (ad esempio contata a partire dalla particella estrema a sinistra), si abbia $q_0(t) = 0$ e $q_{N+1}(t) = L, \forall t$.

Mentre gli esempi della sezione precedente erano di natura essenzialmente didattica, questo modello ha una notevole rilevanza teorica: infatti, da una parte, fu il primo in cui si ottenne (Lagrange, 1759) una teoria dei mezzi continui (la corda vibrante) mediante un passaggio al limite ed una rinormalizzazione. Dall'altro è il più semplice modello di solido cristallino, in cui molte proprietà generali possono essere studiate in maniera semplice. Infine, a partire dal lavoro di Fermi, Pasta ed Ulam del 1954, tale modello è stato usato come paradigma per comprendere le proprietà di rilassamento all'equilibrio termodinamico dei sistemi a molti gradi di libertà, campo di ricerca che risulta tuttora molto attivo.

La Lagrangiana del sistema si scriverà dunque nel modo seguente

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^N \dot{q}_k^2 - \sum_{k=0}^N V(q_{k+1} - q_k) \quad q_0 = 0, \quad q_{N+1} = L .$$

Si deve notare che la sommatoria nell'energia cinetica si effettua solamente sulle particelle che si muovono (ovviamente), mentre nel potenziale la sommatoria descrive anche l'interazione con le particelle estreme, fisse. I punti di equilibrio si trovano allora risolvendo il sistema

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = V'(q_i - q_{i-1}) - V'(q_{i+1} - q_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N .$$

Notiamo che, derivando rispetto a q_i la Lagrangiana, si trovano due termini perché nel potenziale la variabile q_i compare nella sommatoria sia quando $k = i$ che quando $k = i - 1$.

Una soluzione di questo sistema si trova immediatamente ponendo $q_i - q_{i-1} = a \forall i$, essendo a una costante. Questa costante deve poi essere determinata dalla condizione che le particelle estreme hanno posizione fissate, cioè dalla condizione $L = q_{N+1} - q_0 = \sum q_{i+1} - q_i$ da cui segue $a = L/(N+1)$. Le particelle sono dunque equispaziate e le forze mutue si fanno equilibrio. Naturalmente nulla esclude che, in dipendenza della forma particolare del potenziale, possano esistere altri punti di equilibrio; noi nel seguito ci limitiamo a studiare il caso generale. Introduciamo dunque gli spostamenti x_i dalle posizioni di equilibrio, definiti da $q_i = ia + x_i$, con $x_0 = x_{N+1} = 0$, e sviluppiamo il potenziale in polinomi di Taylor al secondo ordine

$$V(q_i - q_{i-1}) = V(a + (x_i - x_{i-1})) = V(a) + V'(a)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} V''(a)(x_i - x_{i-1})^2 .$$

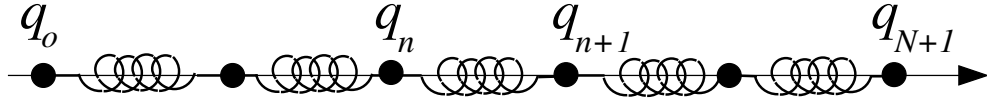


Figura 7.8: Schematizzazione di una catena lineare di particelle interagenti a primi vicini.

Sostituendo questo sviluppo nella Lagrangiana di partenza si otterrà la Lagrangiana linearizzata seguente (con abuso di linguaggio chiameremo Lagrangiana linearizzata la Lagrangiana quadratica, che conduce alle equazioni linearizzate)

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^N \dot{x}_k^2 - \frac{V''(a)}{2} \sum_{k=0}^N (x_{k+1} - x_k)^2 \quad x_0 = 0, \quad x_{N+1} = L, \quad (7.2.4)$$

dove si è ommesso il termine costante $(N+1)V(a)$, e si verifica facilmente che i termine lineari in $x_k - x_{k-1}$ si sommano a zero. Supponiamo che $V''(a)$ sia positivo e definiamo $\Omega^2 \stackrel{\text{def}}{=} V''(a)/m$ (notiamo che Ω ha le dimensioni di una frequenza); allora le equazioni di moto linearizzate, che si ricavano dalla Lagrangiana (7.2.4), si scrivono nel modo seguente

$$\ddot{x}_j = \Omega^2 (x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}). \quad (7.2.5)$$

Come si vede, otteniamo un sistema di equazioni differenziali lineari accoppiate. Per disaccoppiarle bisognerà passare a coordinate opportune, i cosiddetti modi normali di oscillazione, come abbiamo fatto nella sezione precedente. In questo caso però la determinazione delle coordinate risulta più complessa. Cominciamo col determinare i modi normali, cioè soluzioni nella forma $x_j(t) = \alpha(t)u_j$ ($j = 1, \dots, N$) dove sia la funzione $\alpha(t)$ sia le costanti u_j sono da determinarsi opportunamente. Questa soluzione particolare (che vedremo esistere) corrisponde dunque ad una situazione in cui, ad ogni tempo, la catena ha una certa forma (descritta dalla successione u_j ($j = 1, \dots, N$)) avente una certa ampiezza α che cambia allo scorrere del tempo. Procedendo come nel caso della corda vibrante, si dimostra in maniera semplice (la dimostrazione è riportata nel prossimo paragrafo, in connessione con lo studio del caso generale) che la ampiezza $\alpha(t)$ compie un moto armonico semplice di frequenza ω opportuna, ovvero $\alpha(t)$ soddisfa all'equazione differenziale dell'oscillatore armonico $\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha$. Noi comunque,

per semplicità di discussione, in questo paragrafo procediamo assumendo senz'altro che una soluzione di tale tipo esista, come in effetti poi verificheremo. Classicamente, quando si introduce una precisa forma tentativa per la soluzione, si usa dire che si introduce un *ansatz*. Introduciamo dunque tale *ansatz* nelle equazioni linearizzate di moto. Semplificando per α , si trova che ω e u_j sono determinate dal sistema lineare seguente

$$-\omega^2 u_j - \Omega^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

e tutto allora è ridotto a mostrare che tale sistema abbia soluzioni non nulle. Ora la via usuale consiste nell'imporre che il determinante del sistema sia nullo, e di ricavare il valore di ω risolvendo l'equazione secolare (vedi la sezione successiva), ma questa appare difficilmente praticabile nel presente caso, in quanto bisognerebbe calcolarsi un determinante di ordine N e risolvere quindi un'equazione algebrica di ordine alto.

Per aggirare il problema cominciamo ad osservare che, dividendo per Ω^2 , il sistema lineare si riscrive nel modo seguente:

$$u_{j+1} - \left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) u_j + u_{j-1} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (7.2.6)$$

In questa forma appare chiaro che, conoscendo u_0 ed u_1 si può calcolare u_2 prendendo $j = 1$, e poi di seguito u_3 prendendo $j = 2$, u_4 con $j = 3$, e così via. Ne risulta una successione $\{u_j\}$ definita *per ricorrenza* anche per valori $j > N$. Naturalmente la successione dipende dal parametro ω e dai valori iniziali scelti; una soluzione del nostro problema si otterrà se la successione $\{u_j\}$ verificherà le due ulteriori condizioni $u_0 = 0$ e $u_{N+1} = 0$ che determineranno, come vedremo, i valori possibili di ω . La semplificazione del problema viene dal fatto che si può dare un'espressione chiusa per la successione $\{u_j\}$, per valori generici di ω , u_0 ed u_1 . Infatti se poniamo l'*ansatz* $u_j = C \exp(i\gamma j)$ (con $i = \sqrt{-1}$), sostituendo nella (7.2.6) e dividendo per $C \exp(i\gamma j)$, troviamo

$$e^{i\gamma} - \left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) + e^{-i\gamma} = 0,$$

sicché γ risulta determinata dall'equazione

$$2 \cos \gamma = 2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}. \quad (7.2.7)$$

Per ogni valore di ω (purché sia $\omega^2/\Omega^2 < 2$), questa equazione ha come soluzioni due valori opposti di γ (come ci si doveva aspettare perché la ricorrenza (7.2.6) è reale) e quindi u_j si può scrivere genericamente come $u_j = C_1 e^{i\gamma j} + C_2 e^{-i\gamma j}$ oppure in forma reale

$$u_j = A \cos(\gamma j) + B \sin(\gamma j).$$

Imponendo ora le ulteriori condizioni al bordo (*boundary conditions*) $u_0 = 0$, $u_{N+1} = 0$, dalla prima condizione si ricava $A = 0$, mentre dalla seconda si ottiene

$$\sin(N+1)\gamma = 0,$$

da cui si ricava che i valori ammessi di γ sono

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{N+1}.$$

Non è difficile controllare che si ottengono successioni differenti solo per $k = 1, \dots, N$, e corrispondentemente, usando la relazione (7.2.7), si troveranno N distinti valori per le frequenze ω_k . Infatti, sostituendovi l'espressione appena trovata per γ , si ottiene la relazione

$$2 \cos \frac{\pi k}{N+1} = 2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}$$

che dà, dopo alcune manipolazioni trigonometriche, le frequenze ammissibili

$$\omega_k = 2\Omega \sin\left(\frac{\pi k}{2(N+1)}\right). \quad (7.2.8)$$

Corrispondentemente, per ogni $k = 1, \dots, N$ si avrà un modo normale dato da

$$x_j^{(k)} = \alpha_k(t) \sin\left(\frac{\pi k j}{N+1}\right),$$

con $\alpha_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$. Si vede dunque che ogni modo normale corrisponde ad un'onda stazionaria, in modo analogo a quanto succede per una corda vibrante (si veda il relativo Capitolo). Nel nostro caso, però, la relazione di dispersione (7.2.8) non è lineare come nel caso della corda (tranne che per i modi k con $k \ll N$, per i quali si può approssimare il seno con l'angolo), sicché la propagazione delle onde avviene con una distorsione del profilo della stessa.

Si può infine mostrare (lo faremo alla fine del prossimo paragrafo), che le ampiezze α_k possono essere usate come coordinate lagrangiane per i punti del sistema, nel senso che, data una generica configurazione x_j , $j = 1, \dots, N$ dei punti del sistema,²² si può scrivere

$$x_j = \sum_{k=1}^N \alpha_k \sin\left(\frac{\pi k j}{N+1}\right),$$

cioè come combinazione lineare di onde stazionarie. Si può infatti verificare che le α_k sono date da

$$\alpha_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N x_j \sin\left(\frac{\pi k j}{N+1}\right), \quad (7.2.9)$$

²²Sempre con le condizioni al contorno $x_0 = x_{N+1} = 0$.

e che in tali coordinate la Lagrangiana si scrive come

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \frac{\dot{\alpha}_k^2 - \omega_k^2 \alpha_k}{2} ,$$

cioè come somma di oscillatori armonici indipendenti. Le coordinate α_k sono dunque quelle che disaccoppiano il sistema (7.2.5). Ad esempio, se $N = 2$, si può facilmente vedere che α_1 corrisponde alla semisomma di x_1 e di x_2 , mentre α_2 corrisponde alla semidifferenza, in completo accordo con i risultati dell'esercizio 1 della sezione precedente, a cui ci si riconduce.

7.2.5 Studio dei Modi normali

Torniamo ora allo studio generale della (7.2.2) nell'intorno della posizione di equilibrio: cominciamo col porre $\mathbf{q} = \mathbf{q}_o + \mathbf{x}$ (e di conseguenza $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}$), considerando quindi \mathbf{x} piccolo assieme alla velocità ²³ $\dot{\mathbf{x}}$. In tal modo è plausibile che, compiendo gli sviluppi di Taylor delle equazioni di moto ed arrendendosi all'ordine più basso, non si commetta un errore grande se si considerano le soluzioni del sistema ottenuto, in quanto i termini trascurati di ordine superiore risultano molto più piccoli (in genere quadratici) di quelli considerati. Questo procedimento si chiama *linearizzazione delle equazioni nell'intorno di un punto di equilibrio*. Con riferimento alla (7.2.2), le equazioni nelle nuove variabili \mathbf{x} si scrivono nel modo seguente

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_o + \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \ddot{x}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_o + \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}_i \partial x_k} \dot{x}_k = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}_o + \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial x_i} .$$

Nel membro di sinistra i termini di ordine più basso si ottengono molto semplicemente valutando le derivate della Lagrangiana nel punto $(\mathbf{q}_o, 0)$. Invece lo sviluppo di Taylor del membro di destra diviene, ricordando che $\partial_x \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0) = 0$ perché siamo nel punto di equilibrio,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}_o + \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0)}{\partial x_i \partial \dot{x}_k} \dot{x}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0)}{\partial x_i \partial x_k} x_k + o(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) .$$

Nel caso di sistemi naturali le derivate $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \dot{x}_k} \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0)$ si annullano, per cui alla fine le equazioni del moto divengono, in forma vettoriale, le seguenti

$$\mathcal{A} \ddot{\mathbf{x}} = -\mathcal{B} \mathbf{x} , \tag{7.2.10}$$

dove la matrice $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0)$ è semplicemente la matrice cinetica valutata nel punto di equilibrio \mathbf{q}_o , mentre la matrice $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0)$ risulta essere la matrice hessiana del potenziale (sempre valutata in \mathbf{q}_o). Si

²³La richiesta sulla velocità è ragionevole in quanto, se la velocità è grande, ci si aspetta che pure la posizione diventerà grande dopo un breve intervallo di tempo.

verifica facilmente che tali equazioni del moto sono deducibili dalla Lagrangiana seguente (detta con abuso di linguaggio linearizzata, anche se in realtà è quadratica nelle variabili \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$)

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \mathcal{A} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x} \mathcal{B} \mathbf{x} .$$

Dunque il procedimento di linearizzazione si può compiere. invece che partendo dalle equazioni di moto, con il procedimento di sviluppare il potenziale al secondo ordine, scrivere quindi la Lagrangiana cosiddetta linearizzata, e infine le corrispondenti equazioni di Lagrange. L'equazione (7.2.10) mette in luce il vantaggio della procedura di linearizzazione, in quanto si ottengono equazioni lineari, che si sanno studiare completamente. Rimane però il problema che si stanno approssimando *le equazioni* di moto, mentre si dovrebbero approssimare le *soluzioni* delle equazioni di moto. La discussione completa di questo problema ci porterebbe oltre i limiti di questo corso. Ci limitiamo a segnalare la circostanza che, se il punto di equilibrio è stabile, le soluzioni delle equazioni di partenza vengono approssimate in modo migliore e per tempi sempre più lunghi dalle soluzioni della (7.2.10), via via che i dati iniziali vengono scelti in intorni sempre più piccoli del punto di equilibrio.

Nel resto di questo paragrafo ci dedicheremo a studiare le soluzioni dell'equazione (7.2.10). Seguiremo la strategia seguente: cercheremo inizialmente delle soluzioni speciali di forma particolarmente semplice; la soluzione generale verrà poi determinata, usando il principio di sovrapposizione, come combinazione lineare di tali soluzioni particolari che, nel caso presentino carattere oscillatorio, vengono dette **modi normali di oscillazione**. Mostriamo poi che le soluzioni particolari trovate saranno sufficienti per costruire la soluzione generale.

Cominciamo dunque a cercare soluzioni della forma

$$\mathbf{x}(t) = \alpha(t) \mathbf{u} ,$$

cioè moti che nello spazio delle fasi appaiono come moti rettilinei lungo una retta per l'origine individuata dal vettore \mathbf{u} . Sostituendo in (7.2.10), troviamo che deve valere

$$\ddot{\alpha}(t) \mathcal{A} \mathbf{u} = -\alpha(t) \mathcal{B} \mathbf{u} ,$$

e, dopo aver diviso per $\alpha(t)$, troviamo

$$\frac{\ddot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \mathcal{A} \mathbf{u} = -\mathcal{B} \mathbf{u}$$

Ora, poiché il membro di destra non dipende dal tempo, non può dipendere dal tempo nemmeno il membro di sinistra, cioè devono valere le seguenti proprietà

1. Il rapporto $\ddot{\alpha}/\alpha$ deve essere costante (indipendente dal tempo); in altri termini deve esistere una costante λ per cui si abbia $\ddot{\alpha}/\alpha = \lambda$. Se la costante λ fosse conosciuta, avremmo ridotto il problema al moto monodimensionale

$$\ddot{\alpha} = \lambda\alpha . \quad (7.2.11)$$

2. Come conseguenza della (7.2.11), il vettore \mathbf{u} deve essere soluzione del sistema

$$\lambda\mathcal{A}\mathbf{u} = -\mathcal{B}\mathbf{u} , \quad (7.2.12)$$

con la medesima costante λ del punto precedente. Questa equazione può essere scritta nella forma equivalente²⁴

$$\lambda\mathbf{u} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{u} , \quad (7.2.13)$$

e questa si riconosce essere l'equazione agli autovalori per la matrice $-\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$.

Però la (7.2.12) può essere discussa evitando di fare alcun riferimento alla matrice inversa \mathcal{A}^{-1} . Infatti, riscritta la (7.2.12) nella forma

$$(\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{u} = 0 ,$$

vediamo che questa si riduce ad un sistema lineare omogeneo per le componenti di \mathbf{u} , la cui unica soluzione, nell'ipotesi che sia $\det(\lambda\mathcal{A} - \mathcal{B}) \neq 0$, è la soluzione nulla. Poiché stiamo cercando vettori non nulli, i valori di λ devono essere scelti in modo che valga

$$\det(\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B}) = 0 . \quad (7.2.14)$$

La (7.2.14) viene chiamata *equazione secolare*, ed è una equazione algebrica nell'incognita λ di grado pari al numero gradi di libertà del sistema. Ad ogni radice λ_i corrisponde (almeno) una soluzione²⁵ non nulla \mathbf{u}_i della (7.2.12). Corrispondentemente, per ogni λ_i , si potrà trovare una soluzione $\alpha_i(t)$ dell'equazione differenziale (7.2.11) e costruire quindi una soluzione particolare $\mathbf{x}_i(t) = \alpha_i(t)\mathbf{u}_i$ delle equazioni (linearizzate) del moto.

In linea di principio, i valori λ_i potrebbero essere complessi, ma, grazie al fatto che \mathcal{A} e \mathcal{B} sono matrici simmetriche, risulta che tutte le soluzioni dell'equazione secolare sono reali. La dimostrazione è la seguente: essendo l'equazione secolare reale, le radici appaiono in coppie $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ complesse coniugate. Otterrò dunque vettori $\mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_i$ le cui componenti sono complesse

²⁴Ricordiamo che, essendo \mathcal{A} definita positiva, esiste \mathcal{A}^{-1} .

²⁵In realtà, per ogni valore λ_i , vi è almeno una famiglia di soluzioni $c\mathbf{u}_i$, $c \in \mathbb{R}$. Si può univocamente definire un membro di tale famiglia richiedendo che la soluzione abbia lunghezza unitaria.

coniugate le une delle altre. Ora considero la (7.2.12) scritta per λ_i , e la moltiplico scalarmente per $\bar{\mathbf{u}}_i$ ottenendo

$$\lambda_i \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_i \rangle = \langle -\mathcal{B}\mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_i \rangle .$$

Poiché \mathcal{B} è simmetrica, essa coincide con la sua aggiunta, per cui ottengo

$$\langle -\mathcal{B}\mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_i, -\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}_i \rangle = \bar{\lambda}_i \langle \mathbf{u}_i, \mathcal{A}\bar{\mathbf{u}}_i \rangle .$$

Poiché anche \mathcal{A} è simmetrica, le due formule precedenti mostrano che deve essere $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, cioè le soluzioni sono reali come si è detto. La soluzione dell'equazione differenziale (7.2.11) presenta allora tre possibili casi

1. I⁰ CASO: $\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} -\omega_i^2 < 0$.

L'equazione (7.2.11) si riduce a quella dell'oscillatore armonico, la cui soluzione generale è

$$\alpha_i(t) = a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t ,$$

dove $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie, legate ai dati iniziali nel modo usuale, $a_i = \alpha_i(0)$ e $b_i = \dot{\alpha}_i(0)/\omega_i$.

2. II⁰ CASO: $\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i^2 > 0$.

In questo caso l'equazione (7.2.11) corrisponde all'equazione del repulsore lineare, la cui soluzione generale è

$$\alpha_i(t) = c_i e^{\omega_i t} + d_i e^{-\omega_i t}$$

dove le costanti c_i e d_i sono legate ai dati iniziali dalle relazioni $c_i = (\alpha_i(0) + \dot{\alpha}_i(0)/\omega_i)/2$ e $d_i = (\alpha_i(0) - \dot{\alpha}_i(0)/\omega_i)/2$.

3. III⁰ CASO: $\lambda_i = 0$.

Il moto avviene a velocità costante, da cui

$$\alpha_i(t) = \dot{\alpha}_i(0)t + \alpha_i(0) .$$

In questo modo le soluzioni particolari risultano completamente determinate. Nel caso in cui tutte le soluzioni abbiano carattere oscillatorio, queste soluzioni particolari vengono dette *modi normali di oscillazione*. In particolare, se \mathbf{q}_o è un punto di minimo del potenziale (di modo che il punto sia di equilibrio stabile), allora tutte le soluzioni dell'equazione secolare sono negative, abbiamo cioè modi normali di oscillazione. Questo fatto si dimostra rapidamente osservando che vale la relazione

$$\lambda_i = -\frac{\langle \mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} ,$$

che si ottiene da (7.2.12) moltiplicando scalarmente per \mathbf{u}_i . In questo caso sia la matrice \mathcal{A} che la matrice \mathcal{B} sono definite positive, essendo \mathcal{B} la matrice hessiana in un punto di minimo, per cui abbiamo sia $\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle \geq 0$ che $\langle \mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle \geq 0$, e dunque $\lambda \leq 0$.

Discorso esattamente opposto si ottiene nel caso in cui \mathbf{q}_o sia un punto di massimo, in quanto \mathcal{B} risulta definita negativa, pur cui tutti gli autovalori sono positivi, $\lambda_i > 0$. Si potrebbe dimostrare che la presenza di almeno un valore λ_i positivo implica che il punto \mathbf{q}_o sia instabile non solo per l'equazione linearizzata ma anche per l'equazione completa. Il lettore interessato è rimandato al testo per una dimostrazione.

Mostriamo che le soluzioni particolari così determinate, sono sufficienti a determinare l'integrale generale, cioè a risolvere il problema di Cauchy. Vale infatti la proprietà seguente

Proposizione 1 *I vettori \mathbf{u}_i formano una base di \mathbb{R}^n , essendo n il numero di gradi di libertà del sistema.*

Usando questa proprietà la soluzione del problema di Cauchy si effettua in questo modo: i dati iniziali \mathbf{x}_o e $\dot{\mathbf{x}}_o$ vengono sviluppati sulla base $\{\mathbf{u}_i\}$, cioè si pone

$$\mathbf{x}_o = \sum_{i=1}^n \alpha_i^0 \mathbf{u}_i, \quad \dot{\mathbf{x}}_o = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i^0 \mathbf{u}_i;$$

l'equazione (7.2.14) viene quindi risolta prendendo come dati iniziali proprio i coefficienti di tale sviluppo, ponendo $\alpha_i(0) = \alpha_i^0$ e $\dot{\alpha}_i(0) = \dot{\alpha}_i^0$. È del tutto evidente che la funzione $\mathbf{x}(t) = \sum_i \alpha_i(t) \mathbf{u}_i$ è la soluzione cercata del problema di Cauchy. In particolare essa risulta espressa come sovrapposizione di moti *semplici*, cioè periodici, nel caso di modi normali. Ciononostante, come funzione del tempo tale soluzione non sarà in generale periodica, ma potrà avere un comportamento anche abbastanza complesso, specialmente se il sistema ha molti gradi di libertà.

La dimostrazione²⁶ che i vettori \mathbf{u}_i formano una base si fa agevolmente per induzione. Ricordiamo che gli \mathbf{u}_i sono gli autovettori della matrice $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$, per cui, essendo tutti gli autovalori reali, esiste almeno un autovettore, che noi indicheremo con \mathbf{u}_1 . Consideriamo allora il piano $\pi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N : \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = 0\}$. Tale piano è invariante per la matrice $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$. Infatti se $\mathbf{v} \in \pi_1$ allora, ricordando che le matrici \mathcal{B} ed \mathcal{A} (e dunque anche la matrice \mathcal{A}^{-1}) sono simmetriche, si ottiene

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = \lambda_1 \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

²⁶La necessità della dimostrazione non si pone ovviamente se tutti i λ_i sono distinti, come è il caso generico. Nel caso vi siano radici multiple dell'equazione secolare, potrebbe accadere, in linea di principio, che il numero di autovettori indipendenti sia minore della molteplicità della radice. Noi mostriamo che ciò non si verifica.

cioè $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v} \in \pi_1$. Ci si può dunque restringere al sottospazio π_1 , trovare in esso un nuovo autovettore \mathbf{u}_2 (indipendente da \mathbf{u}_1 perché ovviamente questo non appartiene a π_1), costruire il sottospazio $\pi_2 \in \pi_1 : \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = 0$, verificare che anch'esso sia invariante ed iterare la procedura. Naturalmente la procedura terminerà dopo n passi, fornendo un insieme di autovettori \mathbf{u}_i per cui vale inoltre

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = \delta_{i,k} .$$

I vettori \mathbf{u}_i sono dunque ortonormali rispetto al prodotto scalare $\langle \mathcal{A}\cdot, \cdot \rangle$ definito dalla matrice cinetica \mathcal{A} , che corrisponde poi all'usuale prodotto scalare dello spazio fisico. Poiché vale la relazione $\mathcal{B}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathcal{A}\mathbf{u}_i$, i vettori \mathbf{u}_i sono ortogonali anche rispetto al prodotto scalare definito dalla matrice \mathcal{B} , vale cioè

$$\langle \mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = -\lambda_i\delta_{i,k} .$$

Le due relazioni appena scritte fanno capire l'utilità di usare come base i vettori \mathbf{u}_i , e come coordinate le componenti del vettore \mathbf{x} rispetto alla base scelta. Infatti, posto $\mathbf{x} = \sum_i \alpha_i \mathbf{u}_i$, se consideriamo i numeri $\{\alpha_i\}$ come nuove coordinate lagrangiane, e corrispondentemente con $\{\dot{\alpha}_i\}$ le velocità, la Lagrangiana diverrà

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}\mathcal{A}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\mathcal{B}\mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_k \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_i \alpha_k \langle \mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i^2 + \lambda_i \alpha_i^2 . \end{aligned}$$

Ricordando che nel caso dei modi normali abbiamo posto $\lambda_i = -\omega_i^2$, in definitiva la Lagrangiana nelle nuove variabili risulterà in tal caso la seguente

$$\mathcal{L}(\alpha_i, \dot{\alpha}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i^2 - \omega_i^2 \alpha_i^2 .$$

Dunque, usando come coordinate i modi normali la Lagrangiana diventa formalmente eguale alla Lagrangiana di un sistema di oscillatori armonici indipendenti.

Sfruttando le proprietà di ortogonalità dei vettori \mathbf{u}_i , infine, è immediato trovare i valori di α_i : basta infatti proiettare \mathbf{x} sui vettori base, per cui si trova dunque

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} .$$

Questa è proprio la formula (7.2.9) della sezione precedente, quando si usi la forma esplicita di vettori \mathbf{u}_i , si tenga conto che in quel caso \mathcal{A} è sempli-

cemente la matrice identità, e che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = (N + 1)/2$ come un calcolo diretto mostra.²⁷

7.3 Il Corpo Rigido

Fino ad ora ci siamo occupati di enti astratti, i punti materiali, che si suppongono privi di estensione. D'altra parte i corpi che incontriamo nella nostra esperienza hanno invece una estensione, sicché si pone il problema di descriverli all'interno della nostra teoria. All'esperienza ordinaria i corpi solidi ci appaiono come indeformabili, di modo che le relazioni metriche tra le varie parti appaiono invariate nel tempo. Sembra dunque naturale introdurre dei sistemi formati da punti materiali le cui distanze siano costanti, come rappresentazione dei corpi solidi macroscopici. Si comprende come lo studio del moto di tali sistemi abbia un'importanza pratica fondamentale.

In un certo senso in realtà il problema è più profondo, perché i corpi rigidi sono alla base della costruzione stessa dello spazio-tempo (sia galileiano, sia relativistico). Infatti lo spazio euclideo è definito proprio mediante il gruppo dei movimenti rigidi, ed il moto dei corpi rigidi è una realizzazione di questo gruppo. Ci si accorgerà di questa relazione profonda affrontando lo studio della cinematica del corpo rigido a cui è dedicata la prossima sezione.

Per quanto riguarda la dinamica, notiamo che i corpi rigidi hanno una sovrabbondanza di vincoli, e per il loro studio il metodo lagrangiano appare il più naturale. Alla ricerca di opportune coordinate lagrangiane e alla determinazione della Lagrangiana è dedicato il terzo paragrafo, preceduto da un paragrafo in cui la dinamica viene studiata mediante le equazioni cardinali nella forma delle equazioni di Eulero, particolarmente adatte a discutere il moto in caso in cui il momento delle forze esterne sia nullo.

7.3.1 La cinematica del corpo rigido

Un corpo rigido è un sistema di N punti materiali P_i la cui distanza reciproca non varia nel tempo, di modo che $\overline{P_i P_j} = \text{cost}$. Si deve pensare che $N \gg 1$, perché vogliamo schematizzare il moto ordinario degli oggetti estesi che ci circondano, le cui deformazioni non influiscono sul loro movimento. Il numero dei vincoli è pari a $N(N - 1)/2$, cioè è molto maggiore del numero di coordinate dei punti (pari a $3N$), per cui non tutti tali vincoli possono

²⁷Infatti in questo caso la k -esima componente del vettore \mathbf{u}_i , è data da $\sin(\pi ki)/(N+1)$, per cui si ha

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{k=1}^N \sin^2 \left(\frac{\pi ki}{N+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi ki}{N+1} \right) \right),$$

dove si è fatto uso della formula di duplicazione per il seno, e si è aggiunto il termine nullo di indice $k = 0$ nella sommatoria. La somma dei coseni è evidentemente nulla, per cui si ha infine $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = (N + 1)/2$.

essere indipendenti. Il primo problema che si presenta è dunque di natura cinematica, cioè di capire quanti sono i gradi di libertà del sistema, ed in quale modo si possa descrivere la sua configurazione (e poi il suo movimento). La risposta intuitiva fa appello all'esistenza di un osservatore che viene detto *solidale*, rispetto al quale cioè i punti P_i del corpo appaiono in quiete: infatti, l'intuizione ci porta a pensare di poter fissare al corpo in modo solidale un sistema di assi cartesiani, rispetto al quale i punti del sistema ovviamente non si muovono.

Ma, come abbiamo imparato nel capitolo sulla relatività, parlare di proprietà legate ad osservatori diversi, finisce per mettere in gioco le proprietà geometriche dello spazio-tempo. Infatti vedremo che la cinematica del corpo rigido è inestricabilmente legata alle proprietà di invarianza galileiana. Si intuisce allora la difficoltà di estendere la nozione di corpo rigido al caso relativistico. Si veda a questo proposito un lavoro di Fermi.²⁸

Nel caso nonrelativistico, al quale qui ci limitiamo, la costruzione del sistema solidale si effettua schematicamente nel modo seguente; si veda E.T. Whittaker, *Analytic dynamics of particles and rigid bodies* (Cambridge, 1916) per maggiori dettagli. Si considerano, ad un istante fissato, due punti qualsiasi P_1 e P_2 del corpo, e la retta x per essi, orientata in modo tale che, scelto P_1 come origine, P_2 risulta avere ascissa positiva. Preso ora un terzo punto, P_3 , fuori da tale retta, consideriamo, sul piano determinato dai tre punti, il triangolo $P_1P_2P_3$. Prendiamo quindi la retta y giacente nel piano ed ortogonale ad x in P_1 , orientata in modo che l'ordinata di P_3 sia positiva. Consideriamo ora un quarto punto P_4 non giacente nel piano dei primi tre, ed il tetraedro $P_1P_2P_3P_4$. Prendiamo allora la retta z passante per P_1 , ed ortogonale al piano su cui giacciono P_1 , P_2 e P_3 , orientata in modo che P_4 abbia coordinata z positiva. In questo modo le coordinate dei quattro punti risultano determinate univocamente. Risultano determinate anche le coordinate di tutti gli altri punti: infatti, preso un generico punto P_j il tetraedro $P_1P_2P_3P_j$ risulta univocamente determinato dalla lunghezza degli spigoli e dalla distanza tra P_4 e P_j . Con questa costruzione i valori delle coordinate dei punti, nel sistema di riferimento P_1xyz , risultano indipendenti dall'istante considerato, ed hanno sempre il medesimo valore. Indicheremo nel seguito il sistema così costruito come *sistema mobile o sistema solidale*, o sistema K .

La costruzione precedente ci dice immediatamente che i gradi di libertà del corpo rigido sono sei: basta infatti assegnare le posizioni di P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , e le posizioni di tutti gli altri punti risultano allora assegnate. Per assegnare la posizione di quattro punti sono necessarie 12 coordinate, ma essendovi 6 vincoli (le reciproche distanze sono costanti), rimangono 6 gradi di libertà.

Dopo questa premessa cominciamo a studiare la cinematica del corpo rigido. Consideriamo un sistema di riferimento galileiano con origine in O : ad ogni punto P_j corrisponde il vettore $\mathbf{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \overline{OP_j}$, ed inoltre si ha $\overline{P_1P_j} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1$. Se quest'ultima relazione appare ovvia, bisogna notare

²⁸E. Fermi, ...

però che, dal punto di vista logico, i due membri sono vettori che vivono in spazi vettoriali diversi: il membro di sinistra nello spazio dei vettori con origine in P_1 (lo spazio tangente in P_1), il membro di destra nello spazio di vettori con origine in O (lo spazio tangente in O). Il segno di uguaglianza vuol dire che c'è una applicazione lineare naturale tra i due spazi, che nella base scelta risulta avere l'identità come matrice della trasformazione.

Ora il vettore $\overline{P_1 P_j}$ nel sistema mobile avrà certe coordinate X_j, Y_j, Z_j che indichiamo con \mathbf{X}_j , che si otterranno da quelle del sistema fisso mediante una trasformazione ortogonale \mathcal{R} ,²⁹ per cui si ha

$$\mathcal{R}\mathbf{X}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1 . \tag{7.3.1}$$

Ricordiamo cosa si intende per trasformazione ortogonale. Si tratta di una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali, con la proprietà che essa conserva il prodotto scalare. Per ogni coppia \mathbf{v}, \mathbf{w} di vettori del primo spazio, si deve dunque avere (denotiamo come di consueto con \cdot il prodotto scalare)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathcal{R}\mathbf{v} \cdot \mathcal{R}\mathbf{w} , \tag{7.3.2}$$

e si dimostra subito che questa proprietà è equivalente a

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathbf{1} \quad \text{o equivalentemente} \quad \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^T \tag{7.3.3}$$

dove \mathcal{R}^T è l'operatore trasposto di \mathcal{R} (o matrice trasposta, in una base fissata).³⁰

Infatti, per la definizione di operatore trasposto la condizione di conservare il prodotto scalare diviene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathcal{R}^T \mathcal{R}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} .$$

Sottraendo membro a membro e usando la linearità del prodotto scalare, si ha allora

$$(\mathcal{R}^T \mathcal{R} - \mathbf{1})\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 .$$

Dunque il vettore $(\mathcal{R}^T \mathcal{R} - \mathbf{1})\mathbf{v}$ è ortogonale a tutti i vettori e quindi è nullo. Allora si ha $(\mathcal{R}^T \mathcal{R} - \mathbf{1})\mathbf{v} = 0$ per ogni \mathbf{v} , e quindi $\mathcal{R}^T \mathcal{R} - \mathbf{1} = 0$.

In generale la matrice \mathcal{R} dipenderá del tempo, tranne il caso in cui gli assi del sistema mobile rimangono sempre paralleli a se stessi durante il moto.

²⁹La trasformazione risulta ortogonale per come si sono costruiti gli assi mobili. In modo speculare, è qui che stiamo richiedendo che lo spazio-tempo abbia una struttura galileiana. Nel caso relativistico non é chiaro che cosa si debba postulare sulla matrice \mathcal{R} . Per una trattazione del corpo rigido relativistico si veda il lavoro di Fermi citato poco sopra.

³⁰Si ricordi che per ogni operatore lineare A l'operatore trasposto A^T è definito da

$$\mathbf{v} \cdot A\mathbf{w} = A^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} .$$

Questo modo di interpretare la trasformazione (7.3.4) viene detto *passivo*. La trasformazione (7.3.1) viene usualmente scritta nel modo seguente

$$\mathbf{x}_j = \mathcal{R}\mathbf{X}_j + \mathbf{x}_1 . \quad (7.3.4)$$

Scritta in questo modo, alla trasformazione si può anche dare una diversa interpretazione, detta *interpretazione attiva*. La (7.3.4) si può interpretare come una trasformazione affine, ed in questo caso la matrice \mathcal{R} non rappresenta la matrice di un cambiamento di base, ma la matrice associata ad un operatore lineare dallo spazio vettoriale tangente in P_1 allo spazio tangente in O , applicazione che conserva il prodotto scalare. Questa trasformazione si può applicare ad ogni vettore dello spazio tangente, e non solo ai vettori che rappresentano la posizione dei punti. Vedremo che questo porterà ad una formula generale per la derivata temporale di un vettore.

Derivando rispetto al tempo la (7.3.4) si trova

$$\mathbf{v}_j = \mathcal{R}\mathbf{V}_j + \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1) + \mathbf{v}_1 , \quad (7.3.5)$$

dove \mathbf{v}_j , \mathbf{v}_1 sono le velocità rispettivamente dei punti P_j e P_1 , mentre \mathbf{V}_j è la derivata del vettore \mathbf{X}_j , cioè la velocità nel sistema di riferimento mobile (velocità relativa). Inoltre, si è espresso \mathbf{X}_j in termini di \mathbf{x}_j usando la proprietà $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^T$ (essendo \mathcal{R} ortogonale). La velocità relativa, nel caso del corpo rigido, è evidentemente nulla (se si vuole questa è una definizione alternativa di corpo rigido), perché, come abbiamo mostrato più sopra, i punti sono fissi nel sistema di riferimento mobile (o solidale). La somma dei termini che compaiono nel membro di destra della (7.3.5), escluso il primo che esprime la velocità relativa, viene detta *velocità di trascinamento*, in quanto è quella dovuta al moto d'assieme del sistema di riferimento, cioè la velocità di un punto "trascinato" da tale sistema, ovvero solidale con esso. La velocità di trascinamento è somma della velocità \mathbf{v}_1 dell'origine del sistema mobile, e del termine $\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1)$ dovuto alla rotazione degli assi. Tale termine, che vedremo sarà di importanza fondamentale, si può anche scrivere come

$$\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1) = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1) = \mathcal{R}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j) , \quad (7.3.6)$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore opportuno detto *velocità angolare* che definiremo tra breve, ed $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare vista nel sistema di riferimento mobile, cioè $\boldsymbol{\omega} = \mathcal{R}\boldsymbol{\Omega}$. Allora la velocità di un generico punto si scriverà come

$$\mathbf{v}_j = \mathcal{R}\mathbf{V}_j + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1) + \mathbf{v}_1 = \mathcal{R}(\mathbf{V}_j + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j) + \mathbf{v}_1 . \quad (7.3.7)$$

In particolare la velocità dei punti di un corpo rigido, ricordando che in tale caso si ha $\mathbf{V}_j = 0$, sarà data da

$$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_1) + \mathbf{v}_1 = \mathcal{R}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j) + \mathbf{v}_1 , \quad (7.3.8)$$

che è la relazione cinematica fondamentale per il corpo rigido.

Esercizio 4. (Moto generico del corpo rigido). Mostrare che il moto generico di un corpo rigido è elicoidale, cioè è composto da una rotazione attorno ad un asse e da una traslazione lungo il medesimo asse.

Per mostrare la (7.3.6), cominciamo col notare che $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^T$ è una matrice antisimmetrica, come si verifica immediatamente derivando la relazione $\mathcal{R}\mathcal{R}^T = \mathbf{1}$, usando la proprietà che $\dot{\mathcal{R}}^T = (\dot{\mathcal{R}})^T$, ovvero che la matrice derivata della trasposta è eguale alla trasposta della matrice derivata, e la regola per il trasposto del prodotto, $(AB)^T = B^T A^T$. La matrice \mathcal{A} è dunque della forma seguente

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

con generici valori ω_1, ω_2 ed ω_3 . Si verifica ora, con un calcolo esplicito, che per ogni vettore \mathbf{x} vale $\mathcal{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}$ se definiamo il vettore $\boldsymbol{\omega}$ mediante

$$\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Una corrispondenza piú intrinseca la si ottiene notando che $\boldsymbol{\omega}$ é un autovettore di \mathcal{A} relativo all'autovalore nullo, e che la norma di $\boldsymbol{\omega}$ come vettore coincide con la norma di \mathcal{A} come operatore lineare. Una comprensione piú profonda di tale identità viene fornita quando si faccia uso delle 2-forme, come verrà mostrato in appendice. Infine, ricordando che il prodotto vettoriale è invariante per rotazioni, cioè vale

$$\mathcal{R}\mathbf{a} \wedge \mathcal{R}\mathbf{b} = \mathcal{R}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \quad (7.3.9)$$

si ottiene l'ultima delle (7.3.6).

Notiamo che in effetti quello che abbiamo mostrato è che per un qualunque vettore (dipendente dal tempo) $\mathbf{v} = \mathcal{R}\mathbf{V}$ vale

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathcal{R}\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} = \mathcal{R}(\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}). \quad (7.3.10)$$

Questa era la formula generale che avevamo preannunciato piú sopra, e che useremo nella prossima sezione per scrivere in modo compatto la seconda equazione cardinale dei sistemi.

La relazione tra accelerazione "assoluta" e accelerazione relativa si calcola in modo analogo a quanto fatto per la velocità, prendendo la derivata della seconda di (7.3.7) ed usando la (7.3.7). Si ottiene, indicando con \mathbf{a}_j ed \mathbf{a}_1 le accelerazioni di punti P_j e P_1 , la formula seguente

$$\mathbf{a}_j = \mathcal{R}(\mathbf{A}_j + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_j + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{X}_j + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j)) + \mathbf{a}_1, \quad (7.3.11)$$

dove \mathbf{A}_j è l'accelerazione relativa, cioè quella misurata dall'osservatore mobile, mentre la somma degli altri termini costituisce l'*accelerazione di trascinamento*. Il termine $2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_j$ è la cosiddetta *accelerazione di Coriolis* mentre $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j)$ è la *accelerazione centripeta*.

Esercizio 5. (Particella libera in coordinate rotanti). Ricavare l'espressione (7.3.11) usando il binomio Lagrangiano.

Soluzione Usando l'espressione (7.3.10) per esprimere la velocità nel sistema ruotante troviamo che la l'energia cinetica diventa

$$T = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X})^2 ,$$

dove si è sfruttato il fatto che la matrice \mathcal{R} è ortogonale. La proiezione dell'accelerazione sugli assi ruotanti si ottiene mediante il binomio lagrangiano ³¹, da cui si ricava che

$$m\mathcal{R}^{-1}\mathbf{a} = m \frac{d}{dt} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}) - m (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}) \wedge \boldsymbol{\Omega} .$$

Da questa, derivando rispetto al tempo si ottiene infine

$$m\mathcal{R}^{-1}\mathbf{a} = m (\mathbf{A} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{X} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X})) ,$$

cioè la (7.3.10).

7.3.2 Equazioni di Eulero e moto di Poincot

Cominciamo ora a trattare la dinamica del corpo rigido, usando le leggi cardinali dei sistemi. Mostriamo in particolare che queste sono sufficienti a descrivere il moto del sistema.

Per quanto riguarda la prima equazione cardinale

$$m\ddot{\mathbf{x}}_{CM} = \mathbf{R} , \tag{7.3.12}$$

dove $m = \sum m_i$ è la massa totale del sistema, \mathbf{x}_{CM} la posizione del baricentro ed \mathbf{R} la risultante delle forze esterne, non vi è molto da dire. Bisogna unicamente ricordare che in generale la risultante \mathbf{R} dipende anche dall'orientazione del corpo oltre che dalla posizione del baricentro. Fa eccezione il caso della forza peso, in cui la risultante è semplicemente il peso del corpo, mentre il momento delle forze esterne, calcolato rispetto al baricentro, è nullo.

Viceversa la seconda legge cardinale si può esprimere in una forma peculiare, ed il sistema di equazioni risultante viene detto *equazioni di Eulero*. Cominciamo a calcolare il momento angolare totale del corpo. L'espressione

³¹Consigliamo al lettore diligente di effettuare tutte le derivate!

risulta particolarmente semplice se come origine del sistema mobile prendiamo il baricentro del sistema.³² Con questa scelta di $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{CM}$ le (7.3.4) ed (7.3.8) implicano che si abbia

$$0 = \sum_{j=1}^N m_j \mathcal{R} \mathbf{X}_j, \quad 0 = \sum_{j=1}^N m_j \mathcal{R}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j).$$

Con l'ausilio di queste identità si ottiene allora una significativa espressione per il momento angolare totale \mathbf{l} , ovvero

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^N \mathcal{R} \left(m_j \mathbf{X}_j \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j) \right) + m \mathbf{x}_{CM} \wedge \mathbf{v}_{CM} \quad (7.3.13)$$

dove \mathbf{v}_{CM} è la velocità del baricentro ed inoltre si è fatto uso dell'invarianza per rotazioni del prodotto vettoriale (formula (7.3.9) della sezione precedente). Questa formula ci dice che il momento angolare totale si può pensare come somma di due quantità: quella corrispondente al secondo termine a destra, che è dovuta al movimento del baricentro del corpo, ed è detta *momento angolare orbitale*, e inoltre la parte

$$\mathbf{m} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \mathcal{R} \left(m_j \mathbf{X}_j \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j) \right),$$

dovuta alla rotazione del corpo, detta *momento angolare intrinseco*.³³ Nell'approssimazione in cui si possa trascurare il momento angolare intrinseco e l'orientazione del corpo non influisca molto sulla risultante delle forze (ad esempio, per un corpo di forma sferica), il moto del baricentro risulterà simile al moto di un punto materiale. In questo senso, il modo usuale di rappresentarci una particella puntiforme come una sferetta di materiale molto denso (come dei pallini di piombo), risulta giustificata.

Si noti che in questo capitolo introduciamo una differenza di notazione rispetto ai capitoli precedenti, perché denotiamo con \mathbf{l} anziché con \mathbf{L} il momento angolare totale. La ragione è che ora distinguiamo tra vettori nello spazio vettoriale "assoluto", che denotiamo con lettere minuscole, e vettori nello spazio vettoriale "relativo", che denotiamo con lettere maiuscole, proprio come abbiamo già fatto con i vettori posizione nella formula (7.3.1) per la posizione, che contiene i vettori \mathbf{x} e \mathbf{X} , e

³²Oppure, nel caso importante per le applicazioni, in cui un punto del corpo rigido sia vincolato ad essere fisso (si pensi il caso di un solido imperniato in uno o più punti), si può prendere il punto fisso come origine sia del sistema di coordinate mobili, sia del sistema di coordinate galileiano. Una tale scelta verrà discussa nel prossimo paragrafo, trattando la trottola di Lagrange.

³³Talvolta viene anche detta impropriamente momento angolare di spin, per analogia (non ben fondata) con quanto avviene in meccanica quantistica. Da notare però che in meccanica quantistica le particelle **puntiformi** possono avere anche momento angolare intrinseco, diversamente da quanto si è fin qui ammesso.

nelle formule successive per la velocità e l'accelerazione. Si noterà tuttavia che non riusciremo a seguire sempre coerentemente questa convenzione, ma riteniamo che questo non dovrebbe comportare una eccessiva confusione.

Notiamo il fatto fondamentale che *il momento angolare intrinseco è una funzione lineare di $\boldsymbol{\Omega}$* , e quindi, equivalentemente, di $\boldsymbol{\omega}$. Si può dunque scrivere

$$\mathbf{m} = \mathcal{R}\mathcal{I}\boldsymbol{\Omega} , \quad (7.3.14)$$

dove abbiamo introdotto l'operatore \mathcal{I} , definito da

$$\mathcal{I}\boldsymbol{\Omega} = \sum_{j=1}^N \left(m_j \mathbf{X}_j \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j) \right) , \quad (7.3.15)$$

che viene detto *tensore od operatore d'inerzia*, e risulta essere la quantità fondamentale che determina la dinamica del corpo rigido. É inoltre evidente che la quantità $\mathbf{M} = \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}$ è il momento della quantità di moto intrinseca, come visto dall'osservatore solidale con il corpo rigido.

La proprietà fondamentale dell'operatore d'inerzia è la seguente:

Proposizione 2 *L'operatore d'inerzia \mathcal{I} è un operatore simmetrico non negativo. Se i punti del corpo rigido non sono allineati allora \mathcal{I} risulta positivo.*

Dimostrazione. . Proviamo che \mathcal{I} è simmetrico, cioè che vale $\boldsymbol{\Omega}_2 \cdot \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}_2$ per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{\Omega}_1$ ed $\boldsymbol{\Omega}_2$. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_2 \cdot \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}_1 &= \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\Omega}_2 \cdot \left(m_j \mathbf{X}_j \wedge (\boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \mathbf{X}_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^N m_j (\boldsymbol{\Omega}_2 \wedge \mathbf{X}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \mathbf{X}_j) \\ &= \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}_2 , \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della nota proprietà del triplo prodotto misto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$. Dall'espressione precedente segue anche la non negatività di \mathcal{I} , in quanto vale

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega} = \sum_{j=1}^N m_j (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j)^2 \geq 0 ;$$

se i vettori \mathbf{X}_j non sono tutti paralleli (cioè se i punti non sono tutti allineati), almeno uno degli addendi è positivo da cui segue anche l'ultima affermazione del teorema. **Q.E.D.**

Dal fatto che \mathcal{I} sia definito positivo, segue che la superficie $\mathbf{X} \cdot \mathcal{I}\mathbf{X} = 1$ sia un ellissoide, il cosiddetto ellissoide d'inerzia, fondamentale nel descrivere il moto di un corpo rigido se le forze esterne hanno momento nullo (moto di Poinsot). Gli assi dell'ellissoide vengono detti "assi principali d'inerzia"; se si sceglie il sistema di riferimento solidale in modo che gli assi coincidano con gli assi principali d'inerzia, allora il tensore d'inerzia assume una forma diagonale.

Però l'importanza pratica degli assi principali d'inerzia è dovuta al fatto che sono gli unici attorno ai quali, come vedremo, sono possibili le rotazioni stazionarie del corpo rigido libero. Allora se vincolo il corpo rigido a ruotare lungo un asse fisso, come accade ad esempio alle ruote dei veicoli, alle turbine, ai rotori dei generatori elettrici o altro, se quest'asse coincide con uno degli assi principali d'inerzia non nascono reazioni vincolari parassite durante la rotazione, e quindi l'asse non è sollecitato e non nascono vibrazioni e scuotimenti che compromettono il funzionamento dei meccanismi in questione. "Bilanciare" una ruota (od un qualunque altro rotore) significa modificare il tensore d'inerzia del corpo (aggiungendo masse in punti opportuni) in modo che uno degli assi principali d'inerzia coincida (il più possibile) con l'asse di rotazione.

Tornando al tensore di inerzia, se viene riferito agli assi principali esso prende la forma

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (7.3.16)$$

e gli autovalori I_1 , I_2 ed I_3 vengono chiamati momenti principali di inerzia. L'ellissoide di inerzia $\mathbf{X} \cdot \mathcal{I}\mathbf{X} = 1$ si scrive allora come

$$I_1 X^2 + I_2 Y^2 + I_3 Z^2 = 1,$$

da cui risulta evidente che i momenti principali di inerzia sono l'inverso dei semiassi dell'ellissoide.

Se due dei momenti principali di inerzia sono uguali, allora l'ellissoide di inerzia degenera in un'ellissoide di rotazione, invariante per rotazioni attorno al terzo asse. Se il corpo rigido è invariante per la rotazione attorno ad un asse, allora l'ellissoide di inerzia sarà naturalmente invariante per rotazioni attorno a questo asse, sarà cioè di rotazione. Non vale però il viceversa, cioè l'ellissoide di inerzia sarà di rotazione anche per corpi non presentanti tali simmetria: un caso semplice è offerto da 6 punti di masse uguali posti nei vertici di un ottaedro, il cui gruppo di simmetrie è discreto, e comprende solo rotazioni di $\pi/2$ attorno all'asse. Però poiché, come vedremo, il moto del corpo è determinato dal suo ellissoide di inerzia, sono le simmetrie di questo ad essere importanti per la dinamica e non quelle del corpo. In particolare un gruppo di simmetrie discrete del corpo (come quelle dell'ottaedro) possono implicare un gruppo **continuo** di simmetrie per la Lagrangiana. Su questo interessante argomento non possiamo insistere e rimandiamo il lettore ad un testo di cristallografia.

Infine, se tutti e tre i momenti principali di inerzia sono uguali allora l'ellissoide degenera in una sfera (senza che per questo, come già sottolineato, il corpo debba essere sferico; si prendano, per esempio, 8 punti di massa eguale posti ai vertici di un cubo).

Mediante l'operatore di inerzia la seconda equazione cardinale dei sistemi si riscrive in una forma peculiare detta **equazioni di Eulero**. Partendo dalla seconda equazione cardinale scritta nel modo consueto

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{n}$$

dove \mathbf{l} è il momento angolare totale, decomposto nella forma (7.3.13), ed \mathbf{n} è il momento delle forze esterne, tale equazione diviene

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{n} - \mathbf{x}_{CM} \wedge \mathbf{R} ,$$

dove abbiamo usato la prima legge cardinale dei sistemi (7.3.12) per valutare l'accelerazione del baricentro che compare nel membro di destra della (7.3.13). Usiamo ora la (7.3.10) della sezione precedente per esprimere la derivata di \mathbf{m} come vista nel sistema ruotante usando la (7.3.9), in cui, ricordiamo, il tensore \mathcal{I} è costante. Si trova dunque

$$\dot{\mathbf{L}}_{int} = \mathcal{R}(\mathcal{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}) .$$

Dunque la seconda equazione cardinale prende la forma delle cosiddette **equazioni di Eulero**

$$\mathcal{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega} = \tilde{\mathbf{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}^T(\mathbf{n} - \mathbf{x}_{CM} \wedge \mathbf{R}) . \quad (7.3.17)$$

Proiettate lungo gli assi principali di inerzia, le equazioni di Eulero divengono

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 &= \tilde{N}_1 \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 &= \tilde{N}_2 \\ I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= \tilde{N}_3 . \end{aligned} \quad (7.3.18)$$

Le equazioni (7.3.12) e (7.3.17) forniscono un sistema di equazioni differenziali che permettono di conoscere il movimento del corpo rigido. Non lo mostreremo esplicitamente nel caso generale, limitandoci a farlo, nella prossima sezione, per il caso di un tensore d'inerzia di rivoluzione (trottola di Lagrange). Nel resto di questa sezione mostriamo quale sia il moto del corpo rigido nel caso di **Poinsot**, ovvero nel caso in cui sia $\tilde{\mathbf{N}} = 0$. In questo caso rientrano sia il corpo rigido libero (assenza di forze esterne), sia il corpo rigido in caduta libera soggetto alla forza peso.

Cominciamo con il descrivere il moto del corpo rigido dal punto di vista dell'osservatore solidale. Se $\tilde{\mathbf{N}} = 0$, si vede immediatamente che la quantità

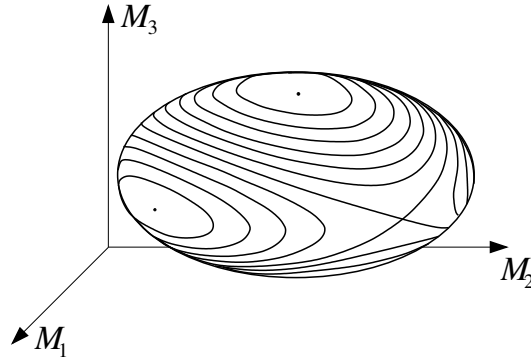


Figura 7.9: Curve di fase del corpo rigido libero.

$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}$ è una costante del moto. Basta infatti moltiplicare scalarmente la (7.3.17) per $\boldsymbol{\Omega}$ per trovare che $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$ da cui, usando la simmetria del tensore di inerzia \mathcal{I} , segue $\dot{E} = 0$. La quantità E ha il significato di energia cinetica del corpo rispetto al baricentro, come un calcolo immediato mostra immediatamente. Vale infatti

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{CM})^2 &= \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathcal{R}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j))^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_j m_j (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}_j)^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}
 \end{aligned}$$

dove la seconda eguaglianza segue dal fatto che \mathcal{R} è ortogonale, l'ultima usando le proprietà del triplo prodotto misto e la definizione del tensore \mathcal{I} . L'energia si può anche scrivere in termini del momento $\mathbf{M} = \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}$ come $E = \frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \mathcal{I}^{-1}\mathbf{M}$.

Inoltre per $\tilde{\mathbf{N}} = 0$ vale $\dot{\mathbf{L}}_{int} = 0$, e quindi \mathbf{L}_{int}^2 è costante. Poiché la lunghezza dei vettori è la medesima per l'osservatore solidale e per l'osservatore inerziale, anche \mathbf{M}^2 è costante.³⁴ Il moto si svolge dunque sull'intersezione tra la sfera $\mathbf{M}^2 = cost$ ed l'ellissoide $\frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \mathcal{I}^{-1}\mathbf{M} = cost$. Tale intersezione si riduce ad un punto quando il raggio della sfera è eguale al semiasse minore dell'ellissoide oppure al semiasse maggiore. In tali casi si hanno *rotazioni stazionarie* in cui $\boldsymbol{\Omega}$ non cambia nel tempo, ed \mathbf{M} e $\boldsymbol{\Omega}$ (oppure, che è lo stesso, \mathbf{m} ed $\boldsymbol{\omega}$) sono collineari. Tali rotazioni sono stabili, in quanto corrispondono ad un punto di massimo o di minimo della funzione \mathbf{M}^2 , vincolato alla superficie $\frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \mathcal{I}^{-1}\mathbf{M} = E$. Allora le curve di livello di \mathbf{M}^2 in prossimità delle rotazioni stazionarie si confonderanno con piccole ellissi, come mostrato nella figura 7.9.

³⁴La costanza di \mathbf{M}^2 si può ottenere direttamente, moltiplicando l'equazione (7.3.17) per $\mathcal{I}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}$.

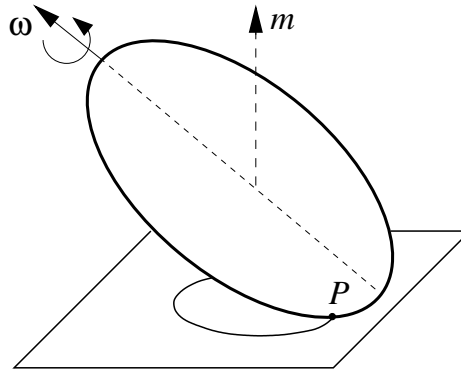


Figura 7.10: Moto alla Poincot del corpo rigido.

Se invece il raggio della sfera è eguale al semiasse intermedio dell'ellissoide, il punto di intersezione dell'ellissoide con il semiasse intermedio è punto stazionario per la funzione \mathbf{M}^2 (il gradiente risulta parallelo alla normale al vincolo), ma non è un estremo bensì un punto di sella. Dunque questo punto rappresenta una rotazione stazionaria che però non è stabile. Infatti le curve di livello nell'intorno di un punto di sella sono iperboli e dunque sfuggono dall'intorno di tale punto. Come mostra un esame delle curve di fase (riportate sempre in figura 7.9), l'intersezione tra sfera ed ellissoide è formata da due curve distinte intersecantesi nei punti corrispondenti alla rotazione stazionaria.

La descrizione del moto del corpo rigido da parte dell'osservatore inerziale si effettua in modo altrettanto semplice. Abbiamo supposto che le forze siano nulle, per cui posso considerare inerziale l'osservatore in quiete con il centro \mathbf{O} dell'ellissoide. Naturalmente per l'osservatore iniziale l'ellissoide di inerzia non risulterà più fisso nello spazio, ma ruoterà attorno al suo centro \mathbf{O} con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, anzi **rotola senza strisciare su di un piano perpendicolare al momento angolare \mathbf{m}** , come ora mostreremo. Questo è il cosiddetto moto alla Poincot del corpo rigido. Per mostrare ciò, iniziamo notando che il moto dell'ellissoide di inerzia risulta dato da

$$\mathbf{x} \cdot (\mathcal{R}I\mathcal{R}^T)\mathbf{x} = 1 ,$$

sicché, ricordando che l'energia per l'osservatore inerziale risulta data da $E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathcal{R}I\mathcal{R}^T)\boldsymbol{\omega}$, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ intersecherà tale ellissoide nel punto $\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}/\sqrt{2E}$. In tale punto il piano tangente all'ellissoide risulta ortogonale al vettore $(\mathcal{R}I\mathcal{R}^T)\mathbf{P}$, cioè al gradiente della forma quadratica che definisce l'ellissoide (valutato naturalmente nel punto \mathbf{P}). Ma dalla seguente catena di eguaglianze

$$(\mathcal{R}I\mathcal{R}^T)\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2E}}\mathcal{R}I\mathcal{R}^T\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2E}}\mathcal{R}I\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2E}}\mathcal{R}\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2E}}\mathbf{m}$$

risulta che il gradiente è parallelo al momento angolare \mathbf{m} , e quindi, poiché \mathbf{m} si conserva, il piano tangente risulta sempre parallelo a se stesso, per cui al più trasla mantenendosi parallelo. Notiamo che il calcolo appena esposto fornisce anche una significativa espressione per l'energia, ovvero $E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}$, che utilizzeremo tosto.

Ora, la distanza tra il centro dell'ellissoide ed il piano tangente si mantiene costante, perché la proiezione del punto di tangenza \mathbf{P} su \mathbf{m} è costante, valendo $\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} / \sqrt{2E} = \sqrt{2E}$. Dunque il piano tangente si mantiene fisso nello spazio, e l'ellissoide vi rotola sopra senza strisciare in quanto il punto di contatto \mathbf{P} giace sull'asse di rotazione, cioè ha, in quell'istante, velocità nulla.

Particolarmente semplice risulta il moto nel caso in cui l'ellissoide di inerzia risulta di rivoluzione, perché allora il moto avviene in modo che l'asse di simmetria precede regolarmente attorno al momento \mathbf{m} , il punto di contatto descrivendo un cerchio sia sul piano tangente che sull'ellissoide. Più complesso è il moto se l'ellissoide è triassiale, perché il punto di contatto in generale non descriverà una curva chiusa, ma riempirà densamente una corona circolare sul piano di contatto.

7.3.3 Gli angoli di Eulero e la Lagrangiana del corpo rigido

Fino ad ora non abbiamo avuto bisogno di introdurre esplicitamente alcuna coordinata lagrangiana per descrivere l'orientazione del corpo rigido. Ma per discutere il moto nel caso in cui siano presenti forze esterne, risulta conveniente usare la formulazione lagrangiana. Per far ciò si ha la necessità di introdurre delle coordinate lagrangiane. Le più usate sono i cosiddetti **angoli di Eulero**, che sono definiti nel modo seguente.

Sia XYZ la terna solidale con il corpo i cui assi coincidano con gli assi principali di inerzia del corpo, ed indichiamo con $\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{Y}}$ e $\hat{\mathbf{Z}}$ i relativi versori. Sia ora xyz una terna ortogonale di assi avente la medesima origine di XYZ ma con gli assi paralleli alla terna fissa di riferimento e siano $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ i relativi versori (vedi Figura 7.11). Introduciamo adesso un altro asse importante, l'asse dei **nodi** n , che è definito come l'intersezione tra il piano xy fisso ed il piano XY mobile, ed il relativo versore $\hat{\mathbf{n}}$. I tre angoli definiti da

$$\begin{aligned}\theta &= \text{angolo tra la retta } z \text{ e la retta } Z \\ \varphi &= \text{angolo tra l'asse } x \text{ e l'asse dei nodi } n \\ \psi &= \text{angolo tra l'asse dei nodi } n \text{ e l'asse } X ,\end{aligned}$$

identificano univocamente la posizione della terna XYZ rispetto alla terna xyz , se si considera l'angolo θ ristretto all'intervallo $[0, \pi]$, come si ha nel caso delle coordinate polari sferiche. Tali angoli sono detti rispettivamente, angolo di nutazione, di precessione e di rotazione propria.

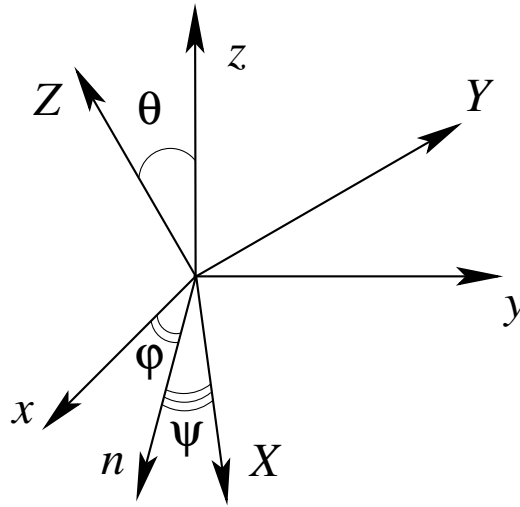


Figura 7.11: Angoli di Eulero.

Mostriamo infatti come, dati θ , φ e ψ , si possa, mediante rotazioni, costruire la terna XYZ a partire da xyz . Incominciamo con il ruotare la terna xyz di un angolo φ intorno all'asse z , col che si otterrà la terna $ny'z$, con l'asse z ovviamente invariato, mentre l'asse x va a coincidere con l'asse dei nodi n . Se ora ruotiamo $ny'z$ attorno all'asse n di un angolo θ , l'asse z andrà a coincidere con l'asse Z . A questo punto ho ottenuto la terna $ny''Z$, e basterà ruotare questa attorno a Z di un angolo ψ per ottenere la terna XYZ , in quanto n va a sovrapporsi a X e dunque necessariamente y'' si sovrapporrà a Y . Dunque gli angoli indicati identificano la terna mobile univocamente. Queste coordinate presentano delle singolarità agli estremi del dominio di definizione, cioè per $\theta = 0, \pi$ e $\varphi, \psi = 0, 2\pi$; essi costituiscono dunque una carta locale dello spazio delle configurazioni che coincide, a meno di traslazioni del baricentro, con il gruppo $SO(3)$ delle rotazioni, come già sapevamo. In altri termini, abbiamo parametrizzato il gruppo delle rotazioni con tre angoli. Questo non è l'unico modo di parametrizzare le rotazioni, ma non ci occuperemo di questo.³⁵ Dalla definizione degli angoli di Eulero seguono immediatamente le relazioni seguenti

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{Z}} \\ \cos \varphi &= \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \cos \psi &= \hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{n}},\end{aligned}\tag{7.3.19}$$

che useremo tra breve nel calcolare l'energia cinetica del corpo rigido.

³⁵Si tratta dei quaternioni di Hamilton.

A questo scopo facciamo uso del seguente teorema di *König*, di cui abbiamo fatto uso varie volte in questo capitolo, ma che mai abbiamo esplicitamente enunciato:

Teorema 2 (di König) *L'energia cinetica T di un corpo si può scrivere come*

$$T = \frac{1}{2} m_{tot} \mathbf{v}_{CM}^2 + T_{int} ,$$

dove \mathbf{v}_{CM} è la velocità del baricentro, m_{tot} la massa del corpo mentre l'energia cinetica interna T_{int} è quella interna, ovvero calcolata nel sistema del baricentro.

Dimostrazione. Sia il corpo composto da N punti aventi velocità \mathbf{v}_j e massa m_j ; vale dunque

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_j m_j \mathbf{v}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_{CM} + (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{CM}))^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j \right) \mathbf{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{CM})^2 + \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{CM}) \cdot \mathbf{v}_{CM} , \end{aligned}$$

che dà la tesi quando si ricordi che nella seconda linea si ha $\sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{CM}) = 0$, proprio per la definizione di baricentro, e si ha

$$T_{int} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{CM})^2 .$$

Dunque, poiché, come abbiamo mostrato nel paragrafo precedente, l'energia cinetica interna di un corpo rigido si scrive come $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega}$, grazie al teorema di König la Lagrangiana del corpo rigido si scrive semplicemente come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_{tot} \mathbf{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega} - V ,$$

dove V è il potenziale delle forze esterne. Il problema diventa ora di esprimere \mathcal{L} in funzione delle coordinate lagrangiane, ed in particolare esprimere il termine $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega}$ in termini degli angoli di Eulero di θ , φ , ψ e delle loro derivate. D'altra parte la terna XYZ corrisponde agli assi principali d'inerzia, e quindi si ha

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_X^2 + I_2 \Omega_Y^2 + I_3 \Omega_Z^2) , \quad (7.3.20)$$

dove abbiamo scritto $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_X \hat{\mathbf{X}} + \Omega_Y \hat{\mathbf{Y}} + \Omega_Z \hat{\mathbf{Z}}$. Dunque tutto si riduce a calcolare le componenti della velocità angolare rispetto agli assi XYZ .

La velocità angolare si può pensare decomposta nel modo seguente. Una rotazione attorno all'asse dei nodi n di un angolo θ avviene con velocità angolare $\dot{\theta} \hat{\mathbf{n}}$, una rotazione attorno all'asse z con velocità angolare $\dot{\varphi} \hat{\mathbf{z}}$ ed una rotazione attorno all'asse Z con velocità angolare $\dot{\psi} \hat{\mathbf{Z}}$. Ora, l'insieme

delle velocità angolari forma uno spazio vettoriale tridimensionale, e dunque la velocità angolare corrispondente ad una rotazione generica si può ottenere come combinazione lineare delle tre particolari velocità considerate, che sono ovviamente linearmente indipendenti se $\theta \neq 0, \pi$. In altri termini si ha

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{n}} + \dot{\varphi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{Z}} .$$

Per trovare le componenti $\Omega_X, \Omega_Y, \Omega_Z$ occorre solamente proiettare i versori $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ sugli assi XYZ . Per la definizione dell'angolo ψ (vedi la terza (7.3.19)) si ha immediatamente $\hat{\mathbf{n}} = \cos \psi \hat{\mathbf{X}} - \sin \psi \hat{\mathbf{Y}}$. Un minimo più complicato è trovare le componenti di $\hat{\mathbf{z}}$. La proiezione di $\hat{\mathbf{z}}$ su $\hat{\mathbf{Z}}$ vale $\cos \theta$ (prima di (7.3.19)), mentre la proiezione di $\hat{\mathbf{z}}$ sul piano XY vale $\sin \theta$. A questo punto bisogna notare che, dalla definizione stessa, l'asse dei nodi risulta perpendicolare ai due assi z e Z , e quindi la proiezione di z su XY risulta **perpendicolare** ad n . Si ha allora immediatamente che $\hat{\mathbf{z}} = \sin \theta (\sin \psi \hat{\mathbf{X}} + \cos \psi \hat{\mathbf{Y}}) + \cos \theta \hat{\mathbf{Z}}$ e quindi, sostituendo nell'espressione di $\boldsymbol{\Omega}$ data sopra le espressioni appena trovate, si ha

$$\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta) \hat{\mathbf{X}} + (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta) \hat{\mathbf{Y}} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{\mathbf{Z}} .$$

Si trova dunque

$$\begin{aligned} \Omega_X &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta \\ \Omega_Y &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ \Omega_Z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta . \end{aligned} \tag{7.3.21}$$

La sostituzione nella (7.3.20) dà l'espressione cercata dell'energia cinetica. Non scriveremo tale espressione nel caso generale ma, da ora fino alla fine del paragrafo, ci occuperemo della **trottola di Lagrange**, che consiste in una idealizzazione matematica del comune giocattolo che tutti noi abbiamo usato da bimbi. Si tratta di un corpo rigido pesante con ellissoide di inerzia simmetrico (cioè con $I_1 = I_2$), vincolato in un punto O che giace sull'asse di simmetria Z dell'ellissoide (vedi Figura 7.12) o, equivalentemente, che poggia su di un piano scabro in unico punto O che appartiene all'asse di simmetria della trottola (che corrisponde meglio alla trottola giocattolo).

Nel caso della trottola di Lagrange, le forze esterne sono solo quelle dovute alla forza peso che prendiamo diretta in modo che l'asse z risulti la verticale, di modo che il suo potenziale risulta semplicemente dato da

$$V = mgh = mgR \cos \theta ,$$

dove m è la massa del corpo, g l'accelerazione di gravità ed h la quota del baricentro, da cui $h = R \cos \theta$, dove R è la distanza del baricentro \mathbf{x}_{CM} da O . L'espressione dell'energia cinetica in questo caso si semplifica notevolmente. Infatti, l'energia cinetica del baricentro é identica a quella di un

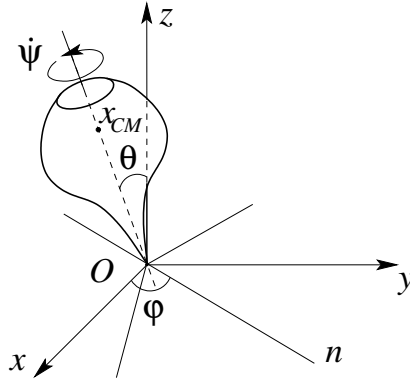


Figura 7.12: La trottola di Lagrange.

punto materiale vincolato su di una sfera di raggio R , vale quindi

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_{CM}^2 = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2);$$

l'energia cinetica interna si calcola inserendo le espressioni delle componenti della velocità angolari date da (7.3.21) nella espressione (7.3.21) per l'energia cinetica in cui però $I_1 = I_2$, ottenendo

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \left(I_1 \dot{\theta}^2 + I_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + I_3 (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 \right).$$

Dunque l'espressione della Lagrangiana risulta la seguente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(I_1' \dot{\theta}^2 + I_1' \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + I_3 (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 \right) - mgR \cos \theta, \quad (7.3.22)$$

dove si è posto $I_1' = mR^2 + I_1$. Si potrebbe controllare che I_1' è il valore comune delle due componenti uguali del tensore di inerzia rispetto ad una terna solidale con origine in O invece che nel baricentro; non lo faremo e nel seguito, per semplicità di notazione, non scriveremo più gli apici.

L'espressione (7.3.22) per la Lagrangiana della trottola mostra che gli angoli φ e ψ sono coordinate cicliche, e dunque vi sono due momenti conservati. Tali quantità conservate sono legate a due simmetrie del problema: innanzitutto la simmetria della trottola per rotazioni attorno al proprio asse, dovuta al fatto che il tensore di inerzia è simmetrico (le trottole giocattolo sono anche fisicamente simmetriche rispetto all'asse di rotazione), e per rotazioni del sistema attorno all'asse verticale, a causa della simmetria del campo di forze. Questi integrali non sono altro che la proiezione M_Z del momento angolare sull'asse Z di simmetria, e la proiezione M_z del momento angolare sulla verticale z . Inoltre, poiché la Lagrangiana non dipende dal tempo, si conserva anche l'energia E . Siamo quindi in presenza di un sistema

completamente integrabile in quanto si hanno un numero di integrali pari al numero di gradi di libertà. Descriveremo di seguito il moto della trottola che si compone di tre moti: uno di **rotazione** attorno al proprio asse, uno di **precessione** in cui l'asse della trottola ruota attorno alla verticale, ed uno di **nutazione** in cui l'angolo dell'asse della trottola rispetto alla verticale varia periodicamente.

Per vedere come ciò avvenga, scriviamo le espressioni dei tre integrali primi, che sono le seguenti:

$$\begin{aligned} M_Z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ M_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta \\ E &= \frac{1}{2} \left(I_1 \dot{\theta}^2 + I_1' \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3(\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 \right) + mgR \cos \theta . \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

Usando le prime due relazioni, l'energia si può scrivere nella forma seguente

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta, M_z, M_Z) ,$$

dove

$$V_{eff}(\theta, M_z, M_Z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(M_z - M_Z \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta + \frac{M_Z^2}{2I_3} .$$

In questa espressione si può trascurare il termine costante $M_Z^2/2I_3$, in quanto non influisce sul moto (si tratta al più di ridefinire il valore di E). Quindi il moto di θ si può descrivere come il moto monodimensionale di un punto fittizio di massa I_1 in un campo di forze con potenziale $V_{eff}(\theta, M_z, M_Z)$. Lo studio di tale potenziale efficace mostra che esso ha qualitativamente la forma mostrata in Figura 7.13, e quindi la variabile θ oscilla durante il moto tra due valori θ_m e θ_M : l'inclinazione dell'asse di rotazione varia dunque periodicamente. È questo il moto di nutazione cui prima si è accennato.

Per vedere questo, notiamo innanzitutto che V_{eff} è limitata inferiormente, mentre diverge a $+\infty$ per $\theta \rightarrow 0, \pi$. Esistono dunque almeno due intersezioni tra il grafico di $V = V_{eff}(\theta)$ e la retta ad energia E (eventualmente coincidenti se E ha il valore minimo possibile), e dunque due valori di θ per cui $\dot{\theta}$ si annulla. Mostriamo che non ce ne possono essere altre, ricordando che le intersezioni devono essere comunque in numero pari. Per fare ciò usiamo la variabile $u \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta$. Poichè $\dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta}$, l'espressione per l'energia diviene in termini di u ed \dot{u} la seguente

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 = (E - mgRu)(1 - u^2) - \frac{1}{2I_1} (M_z - M_Z u)^2 .$$

Allora \dot{u} (e corrispondentemente $\dot{\theta}$) si annulla al più per 3 valori di u , in quanto il membro di destra dell'espressione precedente è un polinomio di terzo grado. Quindi per $0 < u < 1$ il polinomio ha due due zeri corrispondenti alle due intersezioni prima

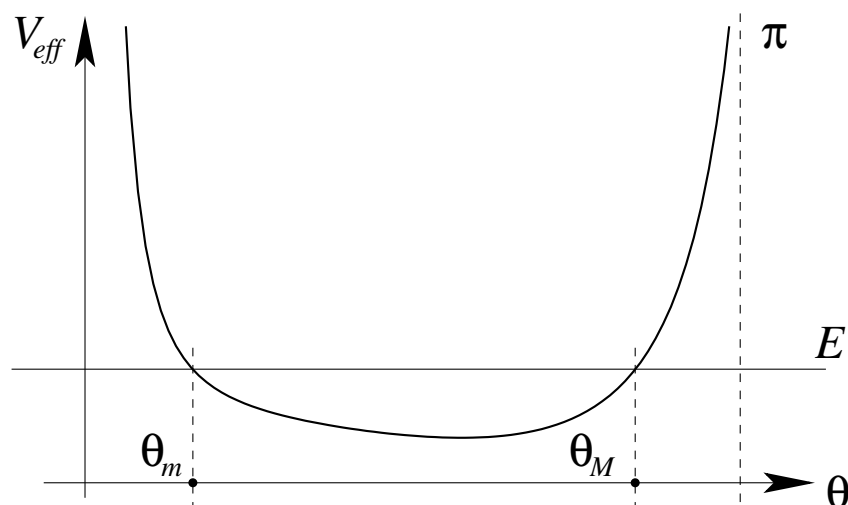


Figura 7.13: Grafico del potenziale efficace in funzione dell'inclinazione dell'asse di rotazione della trottola.

determinate, e non ve ne sono altre. Da uno studio del segno del polinomio per $u \rightarrow \pm\infty$ è facile mostrare che il terzo zero del polinomio si ha per $u > 1$ (che corrisponde ad un valore di θ immaginario).

Lo studio della precessione si esegue usando l'espressione di M_z in termini di $\dot{\varphi}$ e θ . Ricavando $\dot{\varphi}$ dalla seconda di (7.3.23) si ottiene

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_Z \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta},$$

che in linea di principio permette di ricavare $\varphi(t)$ semplicemente per integrazione, una volta determinata $\theta(t)$ mediante lo studio precedente. Per una discussione qualitativa ciò non è naturalmente necessario. Si hanno infatti due casi: $\dot{\varphi}$ è sempre positivo (ad esempio se $|M_z| > |M_Z|$) e dunque la precessione avviene sempre nello stesso senso, oppure $\dot{\varphi}$ si annulla. In questo caso la velocità di precessione ha segno necessariamente opposto quando l'inclinazione è minima ($\theta = \theta_m$) oppure è massima ($\theta = \theta_M$). La trottola precede con la tipica andatura “barcollante” presentando delle retrogradazioni. Il caso degenere si ha nel caso in cui $\dot{\varphi}$ si annulla proprio quando l'inclinazione θ è massima, cioè quando anche $\dot{\theta}$ è nullo. Questo però è un caso frequente quando si lancia la trottola, perché generalmente si cerca di avere un valore grande di $\dot{\psi}_0$ (cioè che la trottola giri velocemente) ed valori nulli per le altre due velocità ($\dot{\varphi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$). Il movimento dell'asse della trottola nei tre casi è illustrato nella Figura 7.14.

L'ultimo argomento che vogliamo discutere riguarda il problema della trottola **dormiente**, ed il suo risveglio improvviso. Tutti infatti abbiamo

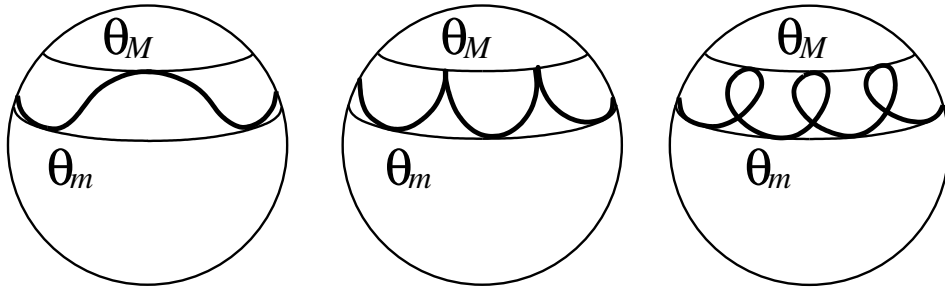


Figura 7.14: Moto dell'asse della trottola di Lagrange nei tre differenti casi discussi nel testo.

fatto l'esperienza che la trottola, dopo un lancio ben riuscito, si stabilizza con l'asse di rotazione verticale e ruota mostrando piccolissime oscillazioni, la rotazione è praticamente stazionaria. In questo stato si dice che la trottola è dormiente. Ad un certo punto però essa si “risveglia”, incomincia un moto di nutazione e di precessione sempre più accentuato fino a quando la trottola cade. Cosa è successo?

Notiamo innanzitutto che, se $M_z = M_Z$, allora il potenziale V_{eff} non è più singolare per $\theta = 0$. Di più, la posizione $\theta = 0$ diventa un posizione di equilibrio per il sistema ridotto, e corrispondentemente il sistema totale ammette una rotazione stazionaria con velocità angolare costante $\omega = (0, 0, \omega_z)$ (gli angoli φ e ψ sono indefiniti in questo caso perché la linea dei nodi risulta indefinita). Notiamo che, viceversa, se prendiamo condizioni iniziali corrispondenti a tale rotazione stazionaria si ha $M_z = M_Z$ (le proiezioni del momento angolare coincidono perché coincidono gli assi su cui si proietta). Dunque, nel caso di trottola dormiente la rotazione stazionaria deve essere stabile. Quali sono le condizioni per avere un tale stabilità? Se prendiamo l'espressione del potenziale efficace con $M_z = M_Z$ e sviluppiamo nell'intorno di $\theta = 0$ in serie di Taylor, otteniamo (al second'ordine)

$$V_{eff}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{M_Z^2}{4I_1} - mgR \right) \theta^2 + O(\theta^4),$$

per cui la posizione verticale risulterà stabile se

$$\frac{M_Z^2}{4I_1} - mgR > 0 \quad \text{cioè per} \quad M_Z^2 > 4mgRI_1.$$

Ora nella trottola reale è presente un attrito che rallenta la rotazione, cioè il momento M_Z diminuisce lentamente durante il moto. Fino a quando il suo valore è superiore a $4mgRI_1$ il punto di equilibrio è stabile, le piccole perturbazioni si smorzano rapidamente e la trottola è addormentata. Quando il valore diminuisce andando sotto la soglia, il punto di equilibrio diventa

instabile ed ogni perturbazione al moto, per quanto piccola, allontana la trottola dalla rotazione stazionaria. Improvvisamente “compare” un moto di nutazione che diventa sempre più ampio in ragione che M_Z diminuisce: la trottola si è risvegliata.