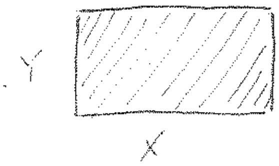
Numeri $\mathbb{C}$omplessi

- Che bisogno c'era? / Da dove nascono? (~1500)
  - Problema: Trovare la lunghezza dei lati, X, Y, di un rettangolo di perimetro 20 ed area 40.



$$\rightsquigarrow \begin{cases} p: & 2(X+Y) = 20 \iff X+Y = 10 \rightsquigarrow Y = 10 - X \\ A: & X \cdot Y = 40 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Y = 10 - X \\ 40 = X \cdot Y = X \cdot (10 - X) \rightarrow X^2 - 10X + 40 = 0 \end{cases}$$

(eq di II grado...) $\quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 25 - 40 = -15 < 0$

$\Downarrow$

$\nexists$ soluz. in $\mathbb{R}$

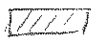
però $\quad x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}$

$\nearrow$ $X = x_1 \Rightarrow Y = 10 - X = 10 - 5 + \sqrt{-15} = \underbrace{5 + \sqrt{-15}}_{x_2}$

$\searrow$ $X = x_2 \Rightarrow Y = \;'' = 10 - 5 - \sqrt{-15} = \underbrace{5 - \sqrt{-15}}_{x_1}$

In particolare

- $X + Y = x_1 + x_2 = 5 \cancel{-\sqrt{-15}} + 5 \cancel{+\sqrt{-15}} = 10$

cioè:
se $X = x_1$, $Y = x_2$ $\rightsquigarrow$ 
se $X = x_2$, $Y = x_1$ $\rightsquigarrow$ 

- $X \cdot Y = x_1 \cdot x_2 = (5 - \sqrt{-15})(5 + \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$

allora può avere senso $\sqrt{-15}$?

• Problema simile: risolvere $x^2 + 1 = 0$

$$\Updownarrow$$

Decidiamo che $\sqrt{-1}$ esiste: $x^2 = -1 \iff x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Sicuramente non è un numero reale, cioè nella realtà non esiste, però esisterà nella nostra immaginazione, quindi lo chiamiamo "IMMAGINARIO".
Dato poi che c'è anche un "1" lì dentro, aggiungiamo la parola "UNITÀ", da cui troviamo il nome UNITÀ IMMAGINARIA.

Per semplificare la notazione $\boxed{i := \sqrt{-1}} \notin \mathbb{R}$

OSS:

$$i \xrightarrow{\cdot 3} i \cdot 3 = i + i + i = 3i \in ?$$

$$i \xrightarrow{+10} i + 10 = 10 + i \in ?$$

$$i \xrightarrow{\cdot 3, +10} (i \cdot 3) + 10 = 10 + 3i \in ?$$

$\notin \mathbb{R}$

In generale, $a, b \in \mathbb{R}$

$$i \xrightarrow{\cdot b} i \cdot b = bi$$

$$i \xrightarrow{+a} i + a = a + i$$

$$i \xrightarrow{\cdot b + a} (i \cdot b) + a = a + ib$$

$\rightsquigarrow \mathbb{C} := \{ \underbrace{a + ib}_{= z} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

Forma Algebrica: $z = a + ib$

PARTE REALE di z, $Re(z)$ (a)

PARTE IMMAGINARIA di z, $Im(z)$ (b)

• $a = 0 \rightsquigarrow z = ib \in \mathbb{C}$ N° IMMAGINARIO PURO $\rightsquigarrow \mathbb{I} := \{ ib \mid b \in \mathbb{R} \} \subsetneq \mathbb{C}$

• $b = 0 \rightsquigarrow z = a \in \mathbb{C}$ N° REALE $\rightarrow \mathbb{R} = \{ a \mid a \in \mathbb{R} \} \subsetneq \mathbb{C}$

Esempi:

$z \in \mathbb{C}$	$Re(z)$	$Im(z)$	$\in \mathbb{R}$? / $\in \mathbb{I}$?
$3i + 10$	10	3	/
$14i$	0	14	$\in \mathbb{I}$ ✓
$1/16$	$1/16$	0	$\in \mathbb{R}$ ✓
$\sqrt{3} + \frac{i}{\pi}$	$\sqrt{3}$	$1/\pi$	/

- Come Rappresentarli? Piano di Argand-Gauss

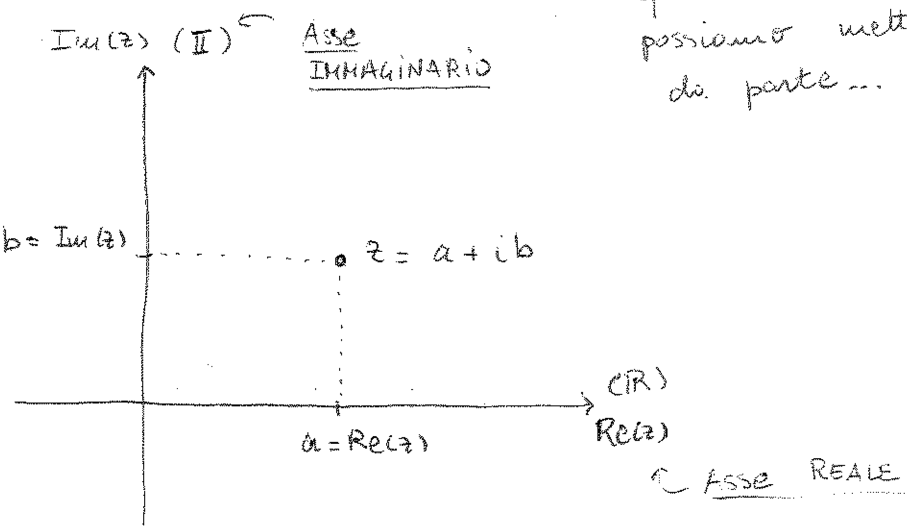
$$z \in \mathbb{C}$$

$$z = \underbrace{a}_{Re(z)} + i\underbrace{b}_{Im(z)}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

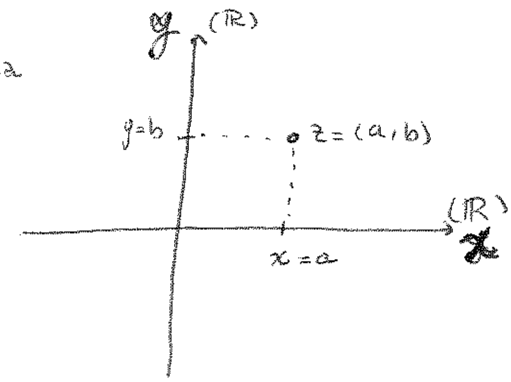
In realtà z è determinato dalle due componenti a, b quindi la "i" possiamo metterla da parte...

$$z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

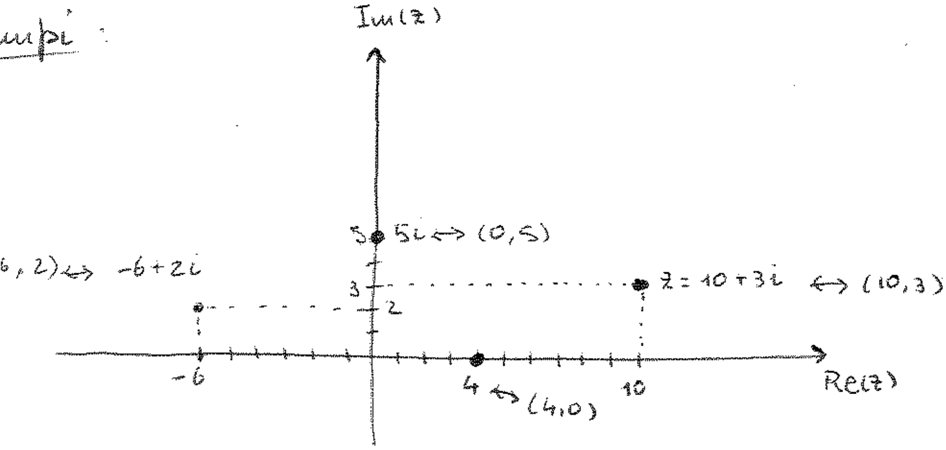
$$= (Re(z), Im(z)) = (x, y)$$



Piano cartesiano



mpi :



In particolare:

- $z = a \in \mathbb{R} \rightarrow (a,0)$ per $z = 1 \leftrightarrow (1,0)$
- $z = ib \in \mathbb{I} \rightarrow (0,b)$ per $z = i \leftrightarrow (0,1)$

▶ Come "socializzano" i numeri complessi?

Finora: prendo $z \in \mathbb{C} \rightarrow$ proprietà di z?

Adesso: prendo $z, w \in \mathbb{C} \rightarrow$ $z+w = ?$
$z \cdot w = ?$

(+)

$z = 3-2i \equiv (3,-2)$, $w = 4+5i \equiv (4,5) \in \mathbb{C}$

$\rightarrow (3,-2) + (4,5) = (3+4, -2+5) = (7,3)$

$\rightarrow 3-2i+4+5i = \underbrace{(3+4)}_{Re} + \underbrace{(-2+5)}_{Im} i = 7+3i$ ✓

generale: $z = a+ib$, $w = c+id \in \mathbb{C}$

$$\rightarrow \boxed{z+w = (a+c)+(b+d)i} \in \mathbb{C}$$

$(3,-2)\cdot(1,1) = (3\cdot 1, -2\cdot 1) = \cancel{(3,-2)}$

$[\ (1,0)\cdot(0,1) = (0,0)\ ]$

$i = (1)\cdot(i) = 0$ ↯

$(3-2i)\cdot(1+i) = 3+3i-2i-2i^2 = 3+3i-2i-2\cdot(-1) =$

$i \overset{DEF}{=} \sqrt{-1}$

$\Downarrow$

$i^2 = \sqrt{(-1)}^2 = -1$

$= 3+2+(3-2)i =$

$= 5+i$

$i: \ i^2 = -1$

$(x^2+1=0)$

$z = a+ib, \quad w = c+id \in \mathbb{C}$

$z\cdot w = (a+ib)(c+id) = a\cdot c - bd + a\cdot d\cdot i + cb\cdot i =$

$= (a\cdot c - bd) + (a\cdot d + cb)i$

$$\boxed{(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+cb)}$$

$[\ (1,0)\cdot(0,1) = (0-0, 1+0) = (0,1)\ ]$ ✓

$1\cdot i = i$ $\qquad$ i

(da fare!)

▸ VIP (delle operazioni) in $\mathbb{C}$

Ricavati a partire da def. ed esempi in $\mathbb{R}$

∘ Elementi neutri in $\mathbb{C}$

per +	per ·
$0 = 0+0i$	$1 = 1+0i$
$(0,0)$	$(1,0)$

(+) $z = a+ib \in \mathbb{C}$

$z+0 = (a+0)+(b+0)\cdot i = a+bi = z = 0+z$

(·) $1\cdot z = 1(a+ib) = a+ib = z = z\cdot 1$

∘ OPPOSTO . $z = a+ib \in \mathbb{C}$

$-z = -a-ib \in \mathbb{C}$

$z - z = (\underbrace{a-a}_{0}) + (\underbrace{b-b}_{0})\cdot i = 0$

∘ RECIPROCO : (in $\mathbb{R}$: $x \rightsquigarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$)

$z = a+ib \in \mathbb{C} \rightsquigarrow z^{-1} = \frac{1}{z} \stackrel{?}{=} \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

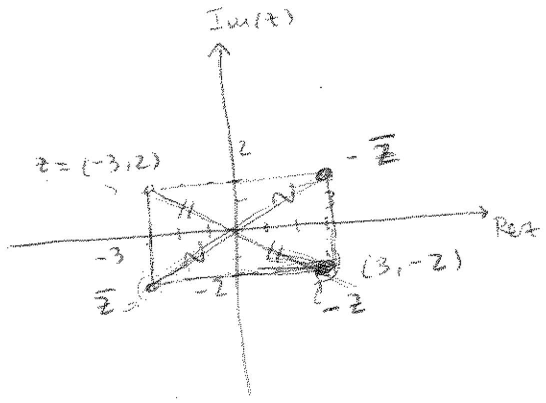
è da fare?

∘ COMPLESSO CONIUGATO di z

$\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C} \rightarrow$ $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$

$z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)\cdot i \in \mathbb{I}$

Es: graficamente.



(da fare / idea)

- Le altre due operazioni: $-$, $\div$

$z, w \in \mathbb{C}$, $z = a+ib$, $w = c+id$

$z - w = z + (-w) = a+ib + (-c-id) =$

opposto di w

$= (a-c) + (b-d)i$

$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = (a+ib) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2} i \right) = (\dots)$

- Potenze di un numero complesso:

$(a+ib)^2 = (a+ib) \cdot (a+ib) = \dots$

$z = a+ib \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Triangolo di Tartaglia

$(z^0 = 1)$

$z^1 = z$

$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + (ib)^2 + 2abi =$

$= a^2 + (-1)b^2 + 2abi =$

$= a^2 - b^2 + 2abi$

$\updownarrow (a^2-b^2, 2ab)$

3 metodi:
- prodotto notevole / geometr.
- fare i conti
- Triangolo

$z^3 = (a+ib)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + i^3b^3$

$= a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\,i$

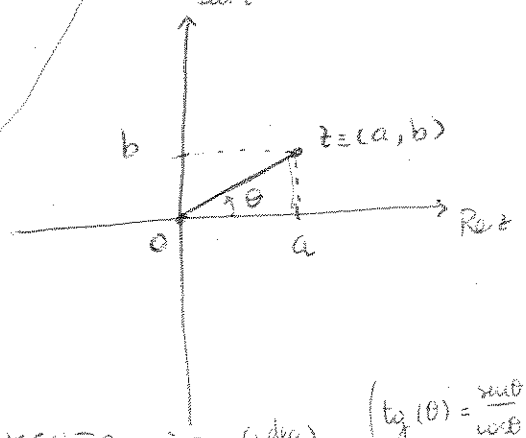
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \leftarrow (ib)^3 \\ a^3 & & a^2\cdot(ib) & & a\cdot(ib)^2 & & \end{array}$$

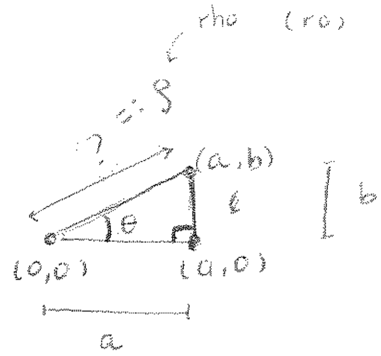
$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

i	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = 1$
$\shortparallel$	$\shortparallel$	$\shortparallel$	$\shortparallel$
$i^5 = \underbrace{i^4}_{=1}\cdot i$	$i^6 = i^2 \underbrace{i^4}_{=1}$	i^7	i^8
$\shortparallel$			
i^9	...	...	...

(da fare) → **Modulo** (e argomento)





$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$\rho \cdot \rho := |z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

MODULO DI z

↳ Osservare che $|z| < k$ è una cerchio

ARGOMENTO DI z (idea)

$\left(tg(\theta) = \frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{b}{a} \right)$

$\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right) + ?$

(circa) $= arcsen\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ $\quad (b = \rho\cdot sen\theta)$

$= arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ $\quad (a = \rho \cdot cos\theta)$

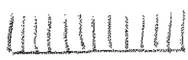
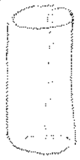
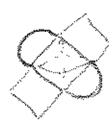
FRATTALI

- Dimensioni Nella Geometria

Sappiamo che nella geometria ci sono diversi tipi di figure (rette, triangoli, parallelepipedi) e in generale siamo abituati alla seguente "classificazione" in termini di DIMENSIONE:

- punti:  $\longleftrightarrow$ Dim = 0
- linee:  $\longleftrightarrow$ Dim = 1
- figure piane:  ,  $\longleftrightarrow$ Dim = 2
- figure solide:  ,  $\longleftrightarrow$ Dim = 3

Ma cosa vuol dire "avere dimensione n"? Cioè è facile dire dato un oggetto (relativamente semplice) questo ha dimensione..., ma se ho una figura più complicata...?

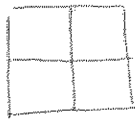
Es.:
- Pettine:  $\rightsquigarrow$ Dim = $\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}$?
- Libro con poche pagine:  $\rightsquigarrow$ Dim = $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}$?
- Foglio piegato:  $\rightsquigarrow$ Dim = $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}$?
- Oggetto  (?) 

In altre parole: Qual' è la definizione di dimensione?

Def tramite Autosomiglianza:

Autosomigliante $\longleftrightarrow$ Una parte dell'oggetto è simile, in scala ridotta, a tutto l'oggetto.

Esempio: Quadrato:

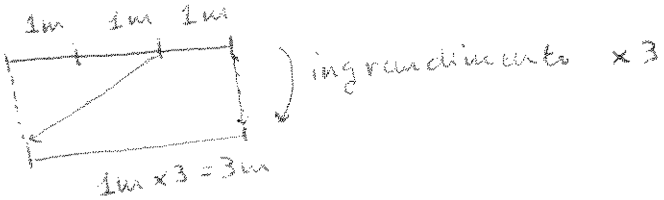


→ ciascun quadratino è simile al quadrato di partenza, solo che è più piccolo.

Per definire la dimensione prendiamo degli esempi:

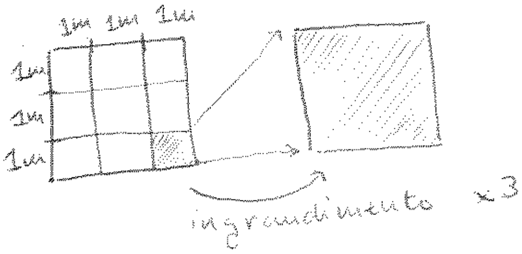
- Segmento (3m)

  lo divido in 3 parti uguali



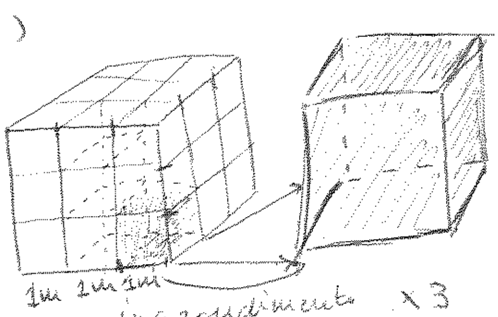
- Quadrato ($9m^2$)

  lo divido in 9 parti uguali



- Cubo ($27\ m^3$)

  lo divido in 27 parti uguali



Eventuale Approfondimento

Tabella :

Oggetto	N	r	$D := \log_r N$
segm.	3^{1}	3	$1 = 1$
Quadr.	$9 = 3^{2}$	3	$2 = 2$
Cubo	$27 = 3^{3}$	3	$3 = 3$

r : rapporto di similitudine

- Segmento : lunghezza : ...

- Quadrato :

$$\text{Area} = a \cdot b$$
$$\text{Area}_2 = \frac{a}{K} \cdot \frac{b}{K} = \frac{ab}{K^2}$$
$$\rightarrow \frac{A}{A_2} = K^2 \rightsquigarrow r = \sqrt{K^2} \dots$$

- Cubo :

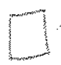
$$V = a \cdot b \cdot c$$
$$V_2 = \frac{a}{K} \cdot \frac{b}{K} \cdot \frac{c}{K} = \frac{abc}{K^3} = \frac{V}{K^3} \rightsquigarrow r = \sqrt[3]{K^3} = K$$

Approfondimento : (per i più "malfidenti")
(non che non sia una brutta cosa in matematica)

1D

→ lunghezza = ℓ
→ Area = 0
→ Volume = 0

2D



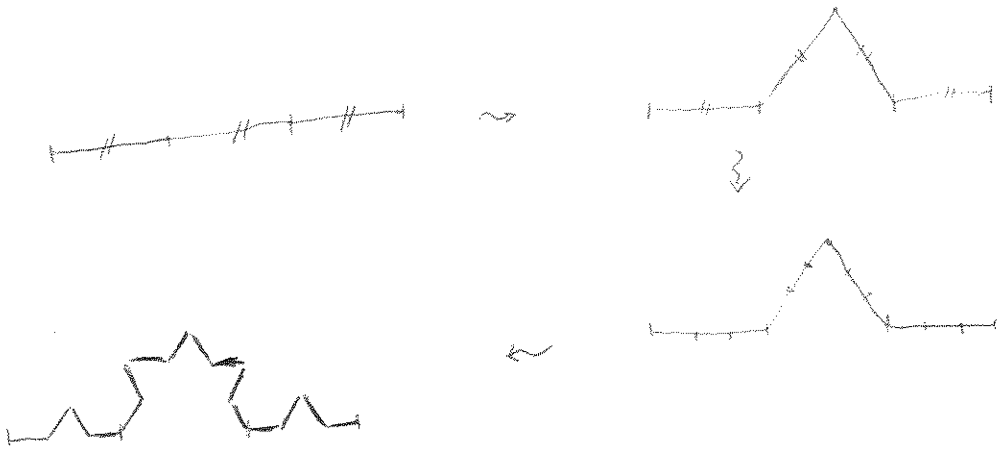
→ lunghezza = ∞
→ Area = A
→ Volume = 0

3D

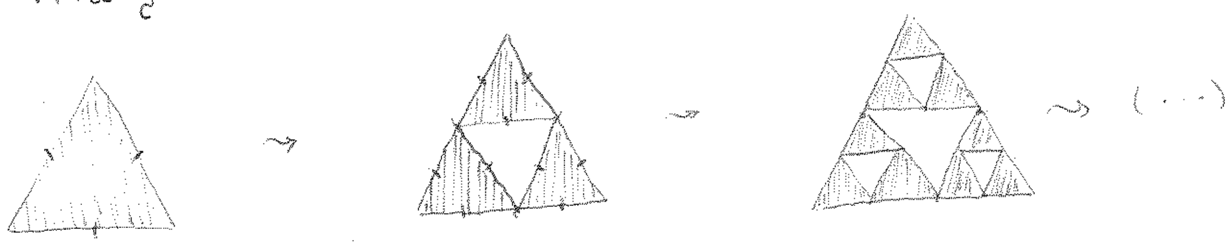
→ lung = ∞
→ Area = ∞
→ Volume = V

<u>Esempio</u>: (figure con dim $\notin \mathbb{Z}$)

- Curva di Koch (dim: $\log_3 4 \approx 1,2$)



- Triangolo di Serpinski (dim $\log_2 3 \approx 1.58$)



Triangolo equilatero, $\longrightarrow$ lo divido in 4 triangoli regolari — Tolgo il triangolino nel mezzo $\longrightarrow$ ripeto su ciascuno dei 3 triangolini rimasti. (...)

<u>Def</u>: Queste figure vengono dette <u>FRATTALI</u>.

(Attenzione: Non tutti i frattali sono Autosimilari, quindi per il calcolo della dimensione ...)

(In realtà non si ha una vera e propria def., ma solo un'idea data da Mandelbrot nel '75)

(Anche se si hanno esempi più antichi, ~~....~~ la formalizzazione di questo discorso è stata fatta abbastanza di recente, circa 50 anni fa.
Comunque le domande aperte sui frattali sono ancora molte)

FRATTALE DI MANDELBROT

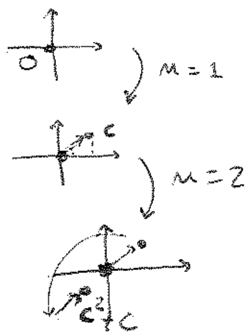
Il particolare frattale che vedremo tra poco è il frattale di Mandelbrot. Nonostante la complessità della figura, questo oggetto può essere "generato" da una funzione relativamente semplice:

$$f(z) = z^2 + c$$

con $z \in \mathbb{C}$; $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Tramite questa, l'insieme di Mandelbrot può essere definito come

$$M := \{ c \in \mathbb{C} \mid \{ f^n(0) \}_{n \in \mathbb{N}} \text{ è limitata} \}$$



- $n = 1$: $f(0) = 0^2 + c = c$
- $n = 2$: $f^2(0) = f(f(0)) = f(c) = c^2 + c$
- $n = 3$: $f^3(0) = f(f^2(0)) = f(c^2+c) = (c^2+c)^2 + c$

$\vdots$

- $n = k$: $f^k(0) = f(f^{k-1}(0)) = (f^{k-1}(0))^2 + c$

lo 7 non esiste! 8

$$f^n(0) \begin{cases} \xrightarrow{n \to +\infty} f^n(0) = +\infty & (\rightsquigarrow c \notin M) \\ \xrightarrow{n \to +\infty} |f^n(0)| \leq C \in \mathbb{R}^+ & (\rightsquigarrow c \in M) \end{cases}$$

Da cosa dipende? come lo capiamo prima che $n = +\infty$?

<u>Teo</u> (Mandelbrot)

- $f(z) = z^2 + c$

$$\exists k \in \mathbb{N} : \quad |f^k(0)| \geq 2 \iff f^n(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty$$

(<u>Domanda</u>: Vale il "$<=$"? Fortunatamente No)

<u>Domanda</u>: Per $c \in \mathbb{C}$, quanto velocemente

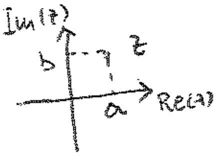
$$f^n(0) \to +\infty \; ?$$

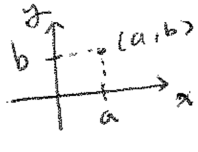
[pseudocodice]

Versione Reale

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$z = a + ib \longleftrightarrow (a, b)$$





$$f(z) = z^2 + c = \longleftrightarrow f((x,y)) = (x^2 - y^2 + a,\ 2xy + b)$$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ c = a + ib \end{cases}$$

$$= (x + iy)^2 + a + ib =$$

$$= (x^2 - y^2) + 2xy \cdot i + a + ib =$$

$$= [x^2 - y^2 + a] + [2xy + b]\, i$$

$$(x_0, y_0) \overset{f}{\longmapsto} (x_0^2 - y_0^2 + a,\ 2x_0y_0 + b) \overset{f}{\longmapsto} ((x_0^2 - y_0^2 + a)^2 - (2x_0y_0 + b)^2 + a,\ \ldots)$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $c \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P \equiv (0,0) \overset{f}{\longmapsto} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \equiv P_1 \overset{f}{\longmapsto} (a^2 - b^2 + a, 2ab + b)$

$$= (\tfrac{1}{2}, 1) \equiv P_2$$

$$\Big\downarrow f$$

$$(-\tfrac{1}{4}, 2) \equiv P_3$$