Preparazione alla I Prova in Itinere - Soluzioni

Esercizio 1. (Approssimazione di funzioni)

Consideriamo la funzione `sin(x)` definita sull'intervallo $[0, 3\pi]$ e calcoliamo gli interpolanti su nodi di Lagrange di grado $1, \ldots, 5$:

a)

```
>> a=0; b=3*pi; inod=1; fun='sin(x)';
>> color=['r','b','g','k','c'];
>> for i=1:5,
 [x, xnodes, fx, px, w, errore, fnodes]= ...
       qssinterpol(a, b, i, inod, fun);
 figure(4), plot(x,px,color(i)),hold on
>> end
>> plot(x,sin(x),'m')
>> legend('n=1','n=2','n=3','n=4','n=5','sin(x)')
>> grid
```

Il risultato è riportato in Fig. 1.
Osserviamo che $\Pi_1 f(x) = \Pi_3 f(x) \equiv 0$, essendo il valore di f in tutti i nodi di interpolazione che definiscono tali polinomi zero.

b) Per l'interpolazione su nodi equispaziati, si ha che

$$\max_{x\in[0,3\pi]} |\sin(x) - \Pi_n \sin(x)| \leq \frac{\max_{x\in[0,3\pi]} |f^{(n+1)}|}{4(n+1)} h^{n+1} \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)},$$

dove $h = 3\pi/n$.
Con MATLAB:

```
>> for i=1:5,
    [x, xnodes, fx, px, w, errore, fnodes]= ...
         qssinterpol(a, b, i, inod, fun);
    err(i)=max(abs(fx-px));
>> end
>> plot(1:5,err,'ro-')
```

Il risultato è mostrato in Fig. 2.
Osserviamo che per i polinomi $\Pi_1 f(x)$ e $\Pi_3 f(x)$ l'errore di interpolazione è il medesimo (vedi considerazione punto precedente).

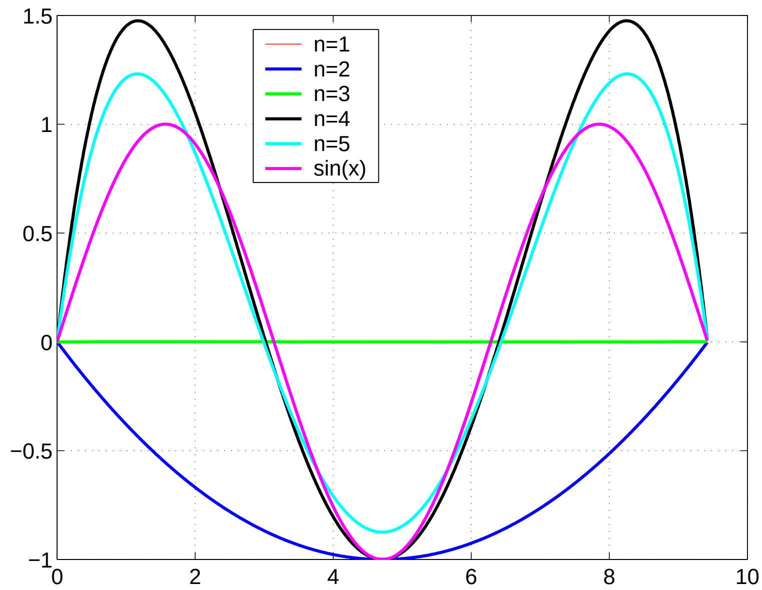

Figura 1: Polinomi $\Pi_n f(x), n = 1, \ldots, 5$ e funzione $f(x)$.

Esercizio 2. (Approssimazione di funzioni)

Definiamo f

```
>> x=[0:1/9:1];
>> f='10*x+rand(size(x))';
```

a),b) Il vettore `x` ha 10 elementi, quindi il polinomio di Lagrange che interpola tali nodi sarà di di grado 9. Abbiamo

```
>> [x, xnodes, fx, px, w, errore, fnodes]= ...
     qssinterpol(0, 1, 9, 1, f);
>> plot(x,fx,x,px), hold on
```

Calcoliamo poi i coefficienti della retta di regressione e disegnamo la retta sul precedente grafico.
Otteniamo `a0=10.0372, a1=0.4371`.
La retta di regressione rappresenta in questo caso una migliore approssimazione di $f(x)$, funzione affetta dal "rumore" aggiunto dal comando

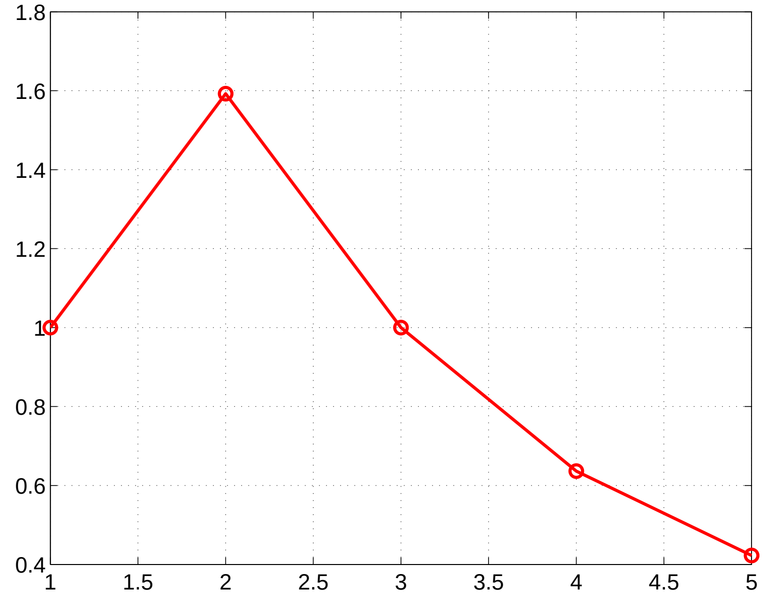

Figura 2: Stima del massimo errore di interpolazione per i polinomi $\Pi_n f(x), n = 1, \ldots, 5$.

`rand` che genera dei valori casuali fra 0 e 1 La retta di regressione ha quindi una proprietà di regolarizzazione.

c) Usiamo il programma`qsslagrange` per valutare il polinomio $\Pi_9 f(x)$ nel punto $x = 2$

```
>> xv=2;
>> fv=10*xv+rand(size(xv));
    20.7544
>> p9=qsslagrange(xnodes,fnodes,2)
p9 =
     -2.2465e+005
>> t1= a1*2+a0*2
     20.5115
```

È evidente che l'estrapolazione ottenuta dalla retta di regressione è molto migliore dell'estrapolazione ottenuta dal polinomio di Lagrange.

d) Abbiamo (attenzione a ricalcolare tutte le quantità !):

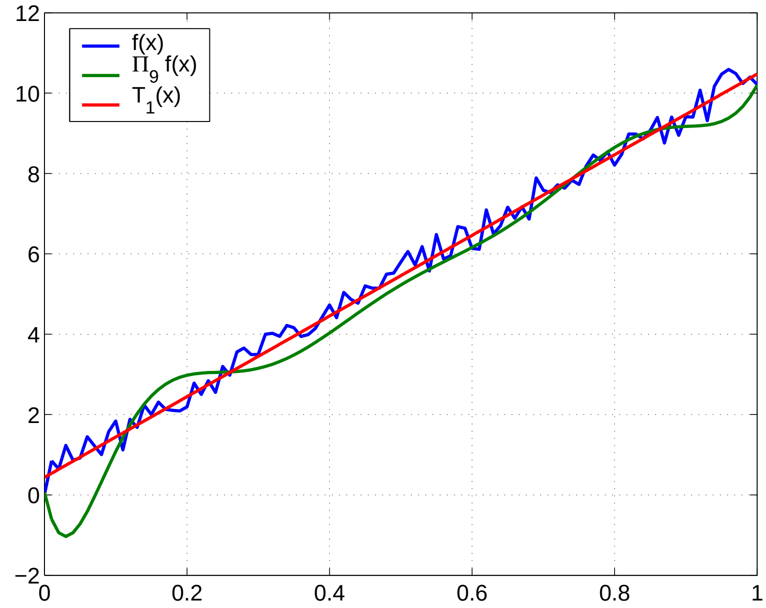

Figura 3: Funzione $f(x)$, polinomio di Lagrange $\Pi_9 f(x)$ e retta di regressione.

```
>> clear all
>> f='10*x+rand(size(x))';
>> [x, xnodes, f1x, p1x, w, errore, fnodes]=...
    qssinterpol(0, 1, 9, 1, f);
>> a1= 9.9517;
>> a0= 0.5124;
>> t1=a1*x+a0;
>> [x, xnodes, f2x, p2x, w, errore, fnodes]=...
          qssinterpol(0, 1, 9, 1, f);
>> a1=10.0594;
>> a0=0.5114;
>> t2=a1*x+a0;
>> max(abs(f2x-f1x))
     0.8889
>> max(abs(p2x-p1x))
    1.3030
>> max(abs(t1-t2))
    0.1071
```

Osserviamo quindi che la retta di regressione è molto meno sensibile alle perturbazioni sui dati del polinomio di Lagrange.

Esercizio 3. (Metodo di bisezione)

a) Usiamo il comando `plot` per localizzare graficamente la radice α :

```
>>f='log(x)-5+x';
>>x=[0.1:0.1:5];
>>y=eval(f);
>>plot(x,y);
>>grid;
>>zoom;
```

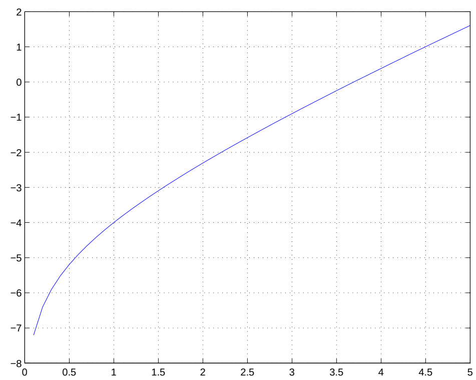

Figura 4: grafico di $\log(x) - 5 + x$

Quindi $\alpha = 3.693$

b) Per l'intervallo $[a, b] \equiv [3, 4]$, $f(3) \cdot f(4) < 0$ quindi il metodo di bisezione può essere applicato.

c) Le prime due iterazioni del metodo di bisezione sono:
iterazione 1:
$x_1 = \frac{3+5}{2} = 3.5$
$f(x_1) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \ a := x_1$
Dopo la prima iterazione, la radice sarà ricercata nell'intervallo $[3.5, 4]$.
iterazione 2:
$x_2 = \frac{3.5+4}{2} = 3.75$
$f(a) \cdot f(x_2) < 0 \Rightarrow b := x_2$
Dopo la seconda iterazione, la radice sarà nell'intervallo $[3.5, 3.75]$.

d) Per trovare α con un errore minore di `toll`$=10^{-10}$ dobbiamo fare $k \geq \log_2 \frac{b-a}{\texttt{toll}} - 1$ iterazioni.

```
>>a=3;
>>b=4;
>>toll=1e-10;
>>k=log((b-a)/toll)/log(2)-1
k =

   32.2193
```

Quindi sono necessarie almeno 33 iterazioni.

e) Verifichiamolo utilizzando il programma `qssbisez`

```
>>a=3;
>>b=4;
>>nmax=100;
>>toll=1e-10;
>>fun='log(x)-5+x';
>>[xvect,xdif,fx,it]=qssbisez(a,b,nmax,toll,fun);

Numero di Iterazioni : 34
Radice calcolata     :   3.69344136
```

f) Per trovare la soluzione α con un'errore $\texttt{toll}/100$ dobbiamo fare $l \geq \log_2 \frac{b-a}{\texttt{toll}/100} - 1$ iterazioni. Quindi per ridurre l'errore con un fattore 100 sono necessarie $l - k \simeq \log_2 100$ iterazioni supplementari ($\log_2 100 = 6.6439$).

```
>> [xvect,xdif,fx,it]=...
    qssbisez(a,b,nmax,toll/100,fun);

 Numero di Iterazioni : 40
 Radice calcolata     :   3.69344136
```

Esercizio 4. (Metodo di Newton)

a) Per x_0 assegnato, il metodo di Newton è :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k \geq 1$$

Nel nosto caso, la derivata prima di f è $f'(x) = 4(x-2)^3$, quindi il metodo di Newton diventa:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4}{x_k - 2},\ k \geq 1.$$

b) Sia $x_0 = 3$, le prime due iterazioni del metodo di Newton sono:
$x_1 = x_0 - \frac{4}{x_0-2} \Rightarrow\ x_1 = 3 - \frac{4}{3-2} \Rightarrow\ x_1 = -1$
$x_2 = x_1 - \frac{4}{x_1-2} \Rightarrow\ x_2 = -1 - \frac{4}{-1-2} \Rightarrow\ x_2 = \frac{1}{3}$

c) Per verificare l'ordine di convergenza, procediamo come segue:

```
>>xv=3;
>>nmax=100;
>>toll=1e-84;
>> fun='(x-2).^4';
>>dfun='4*(x-2).^3';
>>[xvect,xdif,fx,it]=qssnewton(xv,nmax,toll,fun,dfun) ;
 Numero di Iterazioni : 29
 Radice calcolata     :   2.00023811
```

Osserviamo che l'ordine di convergenza del metodo di Newton decade a 1. Infatti, se richiamiamo il vettore `xvect` vediamo che l'errore si riduce come $||\alpha - x_{K+1}||/||\alpha - x_{K+1}|| \simeq C$. La teoria non è contraddetta; la radice $\alpha = 2$ ha l'ordine di multiplicita $m = 4$. la convergenza quadratica può essere recuperata usando l'iterazione modificata

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

d) Dalla figura si osserva che la convergenza è molto lenta.

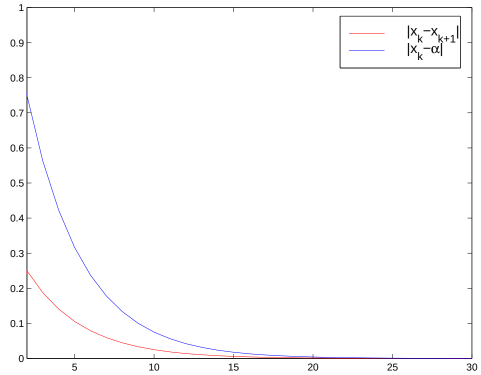

Figura 5:

Esercizio 5. (Metodo di punto fisso)

La funzione $f(x)$ può essere scritta nel seguente modo $f(x) = \frac{2(x-2)(x+\frac{1}{2})}{x-1}$.

a) – Sia α la radice di $f(x)$. Verifichiamo che per la funzione di iterazione ϕ_1, il metodo è consistente (cioè la relazione $\alpha = \phi_1(\alpha)$ è soddisfatta). $\alpha = \frac{3\alpha^2-4\alpha-2}{\alpha-1} \leftrightarrow \frac{3\alpha^2-4\alpha-2}{\alpha-1} - \alpha = 0 \leftrightarrow \frac{2\alpha^2-3\alpha-2}{\alpha-1} = 0 \leftrightarrow f(\alpha) = 0$. Quindi, per la funzione di iterazione ϕ_1, il metodo di punto fisso è consistente.

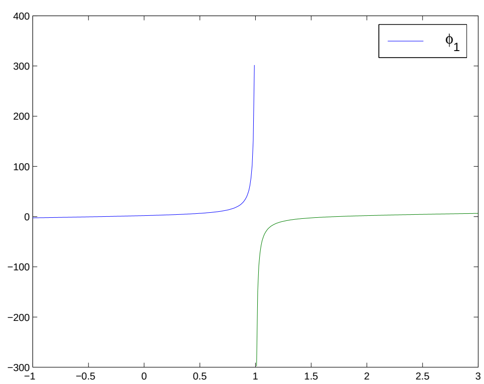

Figura 6: grafico di $\phi_1 = \frac{3x^2-4x-2}{x-1}$

– Si osserva che non possiamo trovare un intervallo $[a, b]$ tale che $\alpha \in [a, b]$ e $a < \phi_1 < b$, quindi per la ricerca della radice $\alpha = 2$, oppure $\alpha = -1/2$ il metodo di punto fisso con la funzione di iterazione ϕ_1 non è convergente.

b) – Sia α la radice di $f(x) = 0$. Il metodo è consistente se $\phi_2(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha-1} = 0$. Se $\alpha = -\frac{1}{2}$, allora $\frac{-1/2}{-1/2-1} - 2 = -\frac{5}{3}$ quindi per la ricerca della radice $\alpha = -\frac{1}{2}$ il metodo di punto fisso non è convergente. Invece per la radice $\alpha = 2$ il metodo di punto fisso con la funzione di interazione ϕ_2 è consistente.

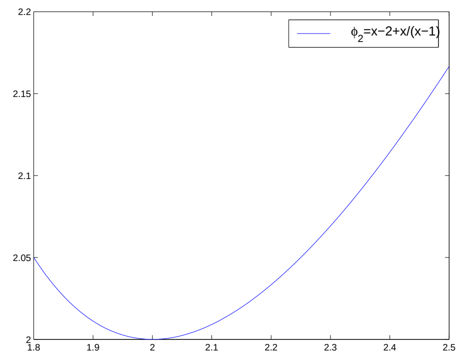

Figura 7: grafico di $\phi_2 = x - 2 + \frac{x}{x-1}$

– Per la ricerca della radice $\alpha = 2$, verifichiamo se il metodo è convergente. Per esempio, scegliamo l'intervallo $[a, b] = [1.8, 2.5]$
  - se $x \in [1.8, 2.5]$ allora $1.8 < \phi_2 < 2.5$
  - ϕ_2 è derivabile e $\phi_2'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$
  - $\exists K = 0.6 < 1$ tale che $|\phi_2'(x)| \leq K, \ \forall x \in \ [1.8, 2.5]$

  Quindi, il metodo di punto fisso con funzione di iterazione ϕ_2 è convergente.

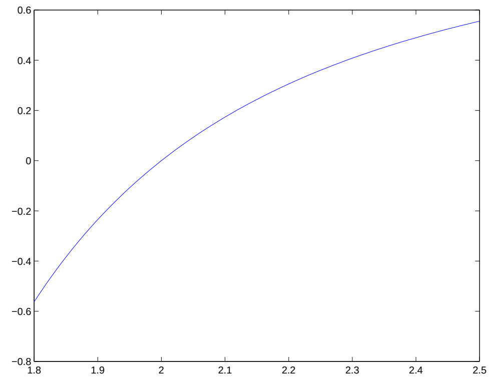

Figura 8: grafico di $\phi_2' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

– Utilizziamo il programma `qssptofis.m` con la funzione di punto fisso ϕ_2:

```
>>xv=2.5;
>>nmax=100;
>>toll=1e-8;
>>g='x-2+x./(x-1)';
>>fun='(2*x.^2-3*x-2)./(x-1)';
>>[xvect,xdif,fx,it]=...
    qssptofis(xv,nmax,toll,g,fun);

    Numero di Iterazioni : 6
    Radice calcolata     :   2.00000000

>>xdif

    xdif =

                       0
            0.33333333333333
            0.14285714285714
            0.02325581395349
            0.00055340343110
            0.00000030642484
            0.00000000000009
```

Quindi la convergenza è quadratica.

c) Si riconosce il metodo di Newton, quindi ci aspettiamo ad una convergenza quadratica.

Esercizio 6. (Approssimazione di funzione)

a) Calcoliamo il polinomio interpolatore di Lagrange:

```
>>fun='sin(2*pi*x)';
>>a=-1;
>>b=1;
>>n=21;
>>[xnodes, fnodes, x, fx, px]=...
    qssinterpol(a, b, n, 1, fun);
>>plot(x,fx);
```

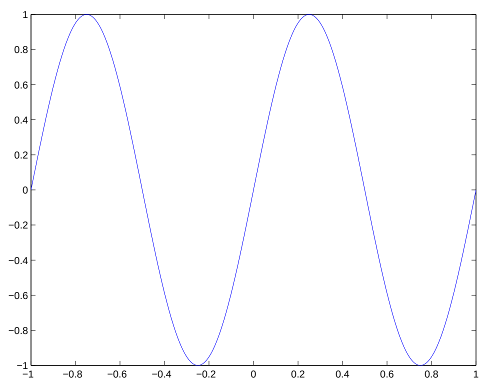

Figura 9: Polinomio interpolatore di Lagrange

b) Calcoliamo con MATLAb la spline cubica interpolatoria di tipo not-a-knot:

```
>>a=-1;
>>b=1;
>>n=21;
>>h=(b-a)/(n-1);
>>f='sin(2*pi*x)';
```

```
>>x=[a:h:b];
>>y=eval(f);
>>xx=[a:h/100:b];
>>yy=spline(x,y,xx);
```

c) Confrontiamo

- la funzione f e il polinomio interpolatorio di Lagrange
- la funzione f e la spline cubica interpolatoria

```
f='sin(2*pi*x)';
a=-1;
b=1;
n=21;
h=(b-a)/(n-1);
x=[a:h:b];
y=eval(f);

xv=[a:h/2:b];
px=qsslagrange(x,y,xv);

xx=[a:h/2:b];
yy=spline(x,y,xx);

x=xx;
fx=eval(f);

errLagrange=norm(fx-px,inf)
errSpline=norm(fx-yy,inf)

subplot(1,2,1);
plot(xx,fx,'b',xv,px,'r');
legend('f','Lagrange');
subplot(1,2,2);
plot(xx,fx,'b',xx,yy,'r');
legend('f','spline');

errLagrange =

    1.187770777288932e-007
```

```
errSpline =

    0.00246825880028
```

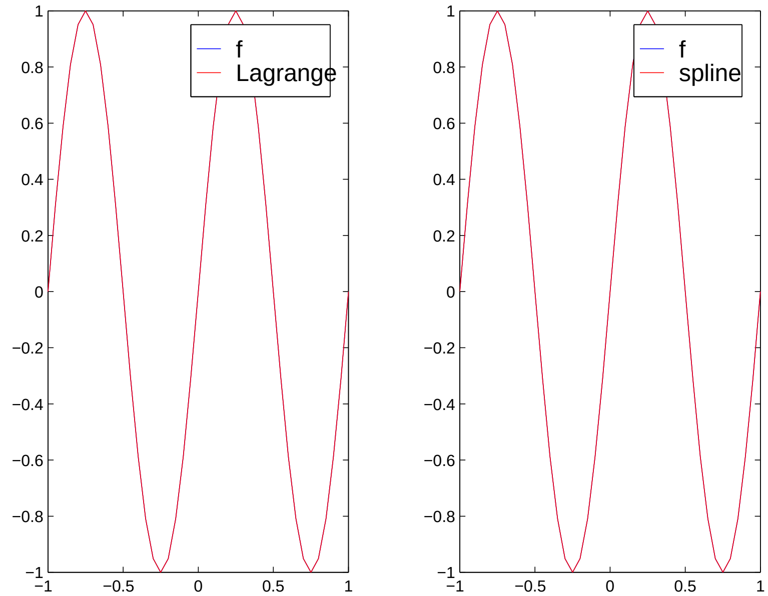

Figura 10: Confronto tra f e polinomi di Lagrange e tra f e la spline cubica

d)

```
a=-1;
b=1;
n=21;
h=(b-a)/(n-1);
x=[a:h:b];
for i=1:n
    y(i)=sin(2*pi*x(i))+(-1)^(i+1)*1e-4;
end;
xv=[a:1/100:b];
px=qsslagrange(x,y,xv);

xx=[a:1/100:b];
yy=spline(x,y,xx);
```

```
f='sin(2*pi*x)';
x=xx;
fx=eval(f);


errLagrange=norm(fx-px,inf)
errSpline=norm(fx-yy,inf)
subplot(1,2,1);
plot(xv,px);
legend('Lagrange');
subplot(1,2,2);
plot(xx,yy);
legend('spline');
errLagrange =

    1.07717485765760

errSpline =

    0.00275963292484
```

Esercizio 7. (Differenziazione numerica)

1. Secondo la formula di Taylor abbiamo:

   $$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(\xi_1)$$

   $$f(x_{i+3}) = f(x_i) + 3hf'(x_i) + \frac{(3h)^2}{2}f''(x_i) + \frac{(3h)^3}{6}f'''(x_i) + \frac{(3h)^4}{24}f^{(iv)}(\xi_2)$$

   $$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x_i) + \frac{(2h)^3}{6}f'''(x_i) + \frac{(2h)^4}{24}f^{(iv)}(\xi_3)$$

   Moltiplichiamo la prima equazione per 18, la seconda per 2 e la terza per -9, sommiamo quindi le tre relazioni e usiamo il teorema di media. Otteniamo:

   $18f(x_{i+1}) + 2f(x_{i+3}) - 9f(x_{i+2}) =$

   $= (18+2-9)f(x_i)+(18+6-18)hf'(x_i)+\left(\frac{18}{2}+\frac{18}{2}-\frac{36}{2}\right)h^2f''(x_i)+$

   $+\left(\frac{18}{6}+\frac{54}{6}-\frac{72}{6}\right)h^3f'''(x_i)+\left(\frac{18}{24}+\frac{2\cdot 81}{24}-\frac{16\cdot 9}{24}\right)h^4f^{(iv)}(\xi)$

   Quindi abbiamo

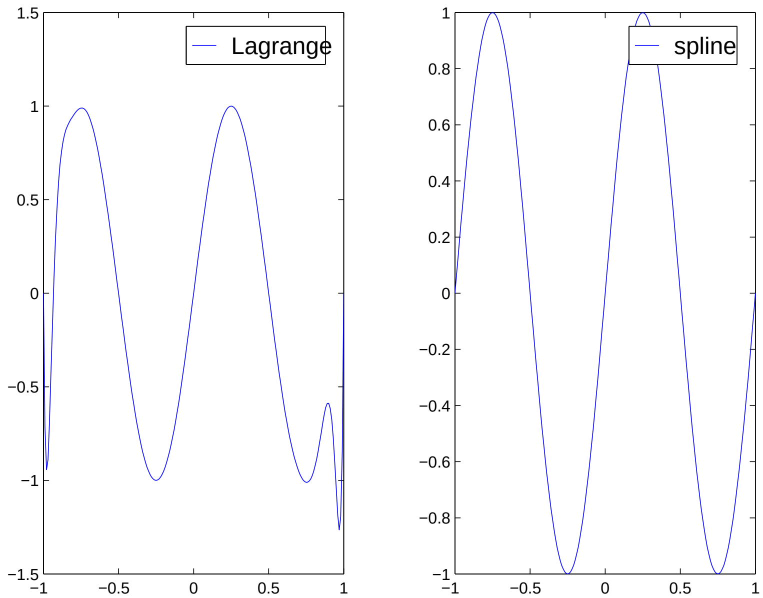

Figura 11: Comportamento alle perturbazioni

$\frac{18f(x_{i+1})+2f(x_{i+3})-9f(x_{i+2})}{6h} = f'(x_i) + O(h^3)$,
cioè la formula di differenziazione numerica ha ordine di accuratezza pari a 3.

Esercizio 8. (Integrazione numerica)

a) Le formule di quadratura richieste si scrivono come segue

- metodo del punto medio:

$$I_{pm} = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = (1-0)\cdot(0.5)^{m-1}(0.5)^{n-1}$$

- metodo del trapezio:

$$I_{tr} = (b-a)(\frac{f(a)+f(b)}{2}) = (1-0)\cdot(0+0) = 0$$

- metodo di Simpson

$$I_S = (b-a)/6\cdot(f(a)+4f((a+b)/2)+f(b)) = 2/3\cdot(0.5)^{m-1}(0.5)^{n-1}$$

b) Il grado di precisione della formula del punto medio è $r = 1$, ovvero vengono integrate esattamente tutte le funzioni costanti e lineari. Quindi

$$(m-1) + (n-1) \leq 1 \quad \rightarrow \quad m+n-2 \leq 1 \quad \rightarrow \quad m+n \leq 3,$$

da cui, per i valori $m = 1, n = 2$ oppure $m = 2, n = 1$, il punto medio fornisce il valore esatto dell'integrale.
Per quanto riguarda il metodo di Simpson, abbiamo che il grado di esattezza è $r = 3$, da cui

$$(m-1) + (n-1) \leq 3 \quad \rightarrow \quad m+n-2 \leq 3 \quad \rightarrow \quad m+n \leq 5.$$

Le coppie di valori ammissibili sono dunque $m = 1, n = 4,\ m = 2, n = 3,\ m = 3, n = 2,\ m = 4, n = 1$.

c) Per $m = 2, n = 1$, l'integrale diventa

$$I = \int_0^1 x^2 \, dx$$

L'errore commesso utilizzando il metodo del trapezio semplice è

$$|I - I_{tr}| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x \in [0,1]} |f^{''}(x)| = \frac{1}{12} \max_{x \in [0,1]} 2x = \frac{1}{6}.$$