# ESERCIZIO 1

1. Cerchiamo lo zero di $f$ con il metodo di Newton usando il test d'arresto $|xn - xv| < toll$, implementato nel codice `newton1`:

   ```
   >>[radice,xvector,xdif,fx,it]=newton1(10,100,1e-8,...
                                       'x.^2-9','2*x')
   ```

   Osservando l'andamento dell'errore `abs(xdif)=abs(3-xk)`, riportato in Fig. 1 in blu, vediamo che il metodo di Newton converge con ordine 2. Infatti, per k sufficientemente grande, l'errore al passo (k+1)-esimo si comporta come il quadrato dell'errore al passo k-esimo, moltiplicato per una costante indipendente da k.

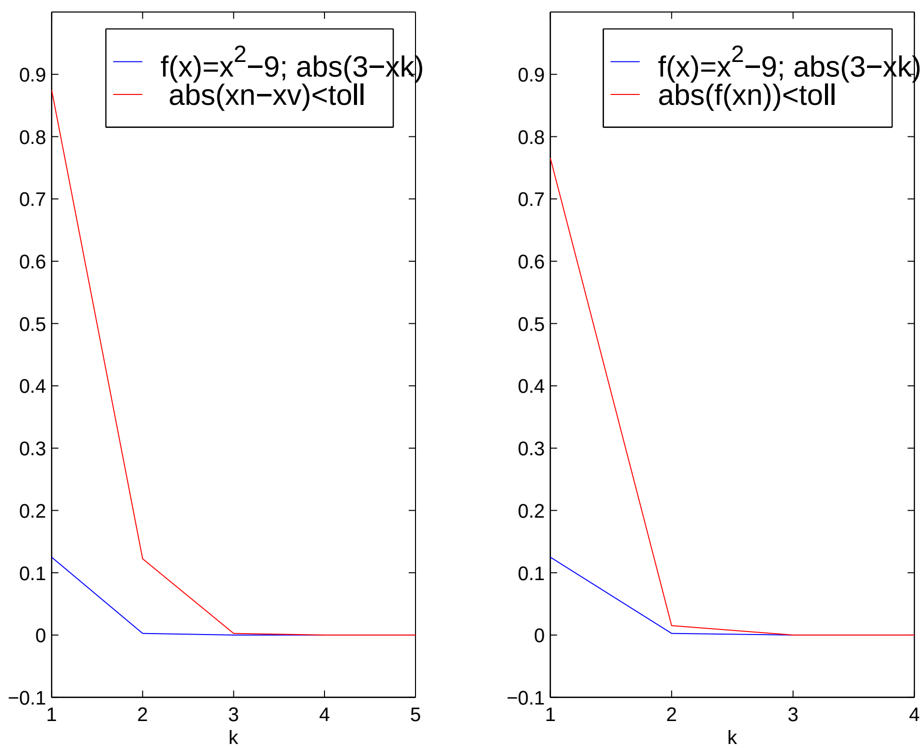


Figura 1: Errore reale (blu) e errore stimato (rosso)

Il test d'arresto `f(xk)` è affidabile, infatti $f'(\alpha) = 6 \rightarrow \mathcal{O}(1)$. Anche il test d'arresto `abs(xn-xv)<toll` è in questo caso affidabile. Infatti, ricordiamo che

$$\phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e in un intorno di $\alpha = 3$ abbiamo che

$$\phi'_N(x) \simeq 3 \rightarrow \mathcal{O}(1),$$

quindi l'errore stimato è molto prossimo a quello effettivo.

2. Calcoliamo $f'(\alpha) \simeq 5000 >> 1$: il test di arresto basato sul residuo di $f$ risulterà restrittivo!

3. In questo caso l'ordine di convergenza del metodo di Newton decade a 1. La teoria non è contraddetta; tra le ipotesi del teorema di perché il metodo di Newton abbia convergenza quadratica nell'approssimazione di uno zero $\alpha$, tale zero deve essere semplice, ovvero $|f'(x)| > 0$ per tutti gli $x$ in $[\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$. Poiché $\alpha = 1$ è una radice di ordine $m$, non abbiamo una convergenza quadratica, ma solo lineare. La convergenza quadratica può essere recuperata usando l'iterazione modificata

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

4. Per il metodo delle corde l'ordine di convergenza teorico è 1. L'ordine di convergenza che si trova nel caso di $f(x) = x^2 - 9$ è superiore a 1: ciò è dovuto alla semplicità della funzione. Infatti, se partiamo abbastanza vicino allo zero (ex. `a=1, b=4`), rapidamente convergiamo. Se però partiamo abbastanza lontano dallo zero $\alpha = 3$, vediamo che quando il metodo deve compiere un certo numero di iterazioni, l'ordine di convergenza si avvicina a 1, come previsto (si verifichi per esempio la pendenza della curva dell'errore ottenuta con il comando `loglog([1:(it)+1],abs(xvect-alpha))`.

Si provi anche a considerare una funzione più complessa, ad esempio quella dell'esercizio successivo! In questo caso, prendendo `a=-5, b=5`, si trova un ordine di convergenza quasi esattamente lineare.

## ESERCIZIO 2

1. Sia $\alpha$ tale che $f(\alpha) = 0$. Allora $e^{\alpha} = \alpha^2$.
   Per la funzione di iterazione $\phi_1$ abbiamo

   $$\alpha = e^{\alpha/2} \Leftrightarrow \alpha = (e^{\alpha})^{1/2} \Leftrightarrow \alpha^2 = e^{\alpha}.$$

   Quindi il metodo è consistente. Analogamente si verifica che anche $\phi_2$ è consistente.

   Verifichiamo che le ipotesi del teorema di convergenza del punto fisso siano soddisfatte nell'intervallo $[a, b] = [-1, 0]$. Per la funzione $\phi_1$ si osserva che se $x \in [-1, 0]$ allora $0.6 < \phi_1(x) < 1$. Quindi, la prima ipotesi non è soddisfatta.

   Per la funzione $\phi_2$ abbiamo

   - se $x \in [-1, 0]$ allora $-1 < \phi_2(x) < -0.6$
   - $\phi_2$ è derivabile in $[-1, 0]$ e $\phi_2'(x) = -\frac{1}{2}e^{x/2}$
   - $\exists K = 0.5 < 1$ tale che $|\phi_2'(x)| \leq K \; \forall x \in [-1, 0]$

   Quindi il metodo di punto fisso per la funzione di iterazione $\phi_2$ è convergente e la convergenza è almeno lineare. Verifichiamo se la convergenza è più che lineare calcolando $\phi_2'(\alpha)$ con $\alpha \simeq -0.7$ (letto dal grafico!). Abbiamo che $\phi_2'(\alpha) \neq 0$ e quindi la convergenza del metodo è solo lineare.

2. Usiamo la function MATLAB `qssptofis` con funzione di iterazione $\phi_2$ (attenzione all'uso della sintassi punto!):

```
>> xv=0; nmax=1000; toll=1e-6; g='-exp(x/2)'; fun='exp(x)-x.^2';
>> [xvect,xdif,fx,it]=qssptofis(xv,nmax,toll,g,fun);

 Numero di Iterazioni : 15
 Radice calcolata     :  -0.70346755
```

L'errore assoluto effettivamente commesso è:
`>>(-0.7034674) - xvect(end)=1.469579210544580e-07`.

Se proviamo a lanciare il codice con la funzione $\phi_1$, come previsto dalla teoria, il metodo non converge allo zero:

```
>> xv=0; nmax=1000; toll=1e-6; g='exp(x/2)'; fun='exp(x)-x.^2';
>> [xvect,xdif,fx,it]=qssptofis(xv,nmax,toll,g,fun);
  Numero di Iterazioni : 10
  Radice calcolata     :          Inf
```

3. Il metodo di punto fisso con funzione di iterazione $\phi_3$ è il metodo di Newton, quindi ci aspettiamo una convergenza quadratica.