Laboratorio nr. 9. Soluzione

1. Calcoliamo la soluzione esatta per separazione di variabili:

   $\frac{dy}{dt} = -ty^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{y^2}dy = -tdt$

   $\int \frac{1}{y^2}dy = \int -tdt \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y(t)} + \mathcal{C} = -\frac{t^2}{2} \Rightarrow\; y(t) = \frac{2}{t^2+2\cdot\mathcal{C}}$

   Per determinare la costante $\mathcal{C}$, imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 2$: otteniamo $\mathcal{C} = \frac{1}{2}$ e quindi $y(t) = \frac{2}{t^2+1}$.

2. Rappresentiamo in MATLAB la soluzione esatta calcolata prima:

```
>>T=3;
>>dt=0.01;
>>t=[0:dt:T];
>>g='2./(1+t.^2)';
>>y=eval(g);
>>plot(t,y);
```

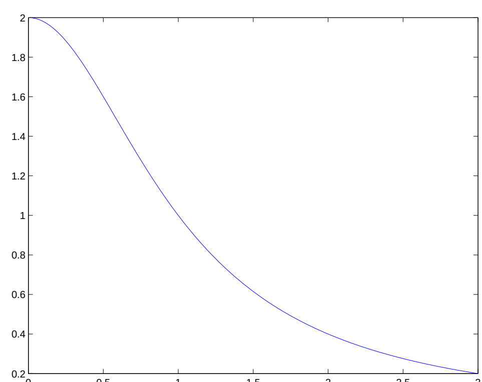

Figura 1: Grafico della soluzione esatta

(a) Implementiamo il metodo di Eulero esplicito:

```
>>clear all
>>y0=2;
>>T=1;
>>dt=[1e0 1e-1 1e-2 1e-3];
>>g='2./(1+t.^2)';
>>for i=1:4,
     t=[0:dt(i):T];
     N=length(t);
     uEe=zeros(1,N);
     uEe(1)=y0;
     for n=1:N-1
         uEe(n+1)=uEe(n)-dt(i)*t(n)*uEe(n)^2;
         y=eval(g);
         err(i)=max(abs(y-uEe));
     end
end

>>loglog(dt,err,'ro-')
```

(b) Implementiamo il metodo di Eulero implicito:

```
>>clear all
>>y0=2;
>>T=1;
>>dt=[1e0 1e-1 1e-2 1e-3];
>>g='2./(1+t.^2)';
>>for i=1:length(dt),
     t=[0:dt(i):T];
     N=length(t);
```

```
        uEi=zeros(1,N);
        uEi(1)=y0;
        for n=1:N-1
            fun=strcat('x+x.^2*',...
               num2str(dt(i)*t(n+1),16),'-',...
               num2str(uEi(n),16));
            zero=fzero(fun,uEi(n));
            uEi(n+1)=zero;
        end
            y=eval(g);
            err(i)=max(abs(y-uEi));
   end
   >>loglog(dt,err,'bo-')
```

(c) Implementiamo il metodo di Crank-Nicholson

```
>>clear all
>>y0=2;
>>T=1;
>>dt=[1e0 1e-1 1e-2 1e-3];
>>g='2./(1+t.^2)';

>>for i=1:length(dt),
     t=[0:dt(i):T];
     N=length(t);
     uCN=zeros(1,N);
     uCN(1)=y0;
     for n=1:N-1
         fun=strcat('x+x.^2*',...
            num2str(dt(i)/2*t(n+1),16),'-',...
            num2str(uCN(n),16),'+',...
            num2str(dt(i)/2*t(n)*uCN(n)^2));
```

```
                zero=fzero(fun,uCN(n));
                uCN(n+1)=zero;
            end
                y=eval(g);
                err(i)=max(abs(y-uCN));
        end
        >>loglog(dt,err,'go-')
```

3. Disegnamo sul medesimo grafico, il $\max\limits_{t\in[0,T]} |y-u|$ al variare di Δt.

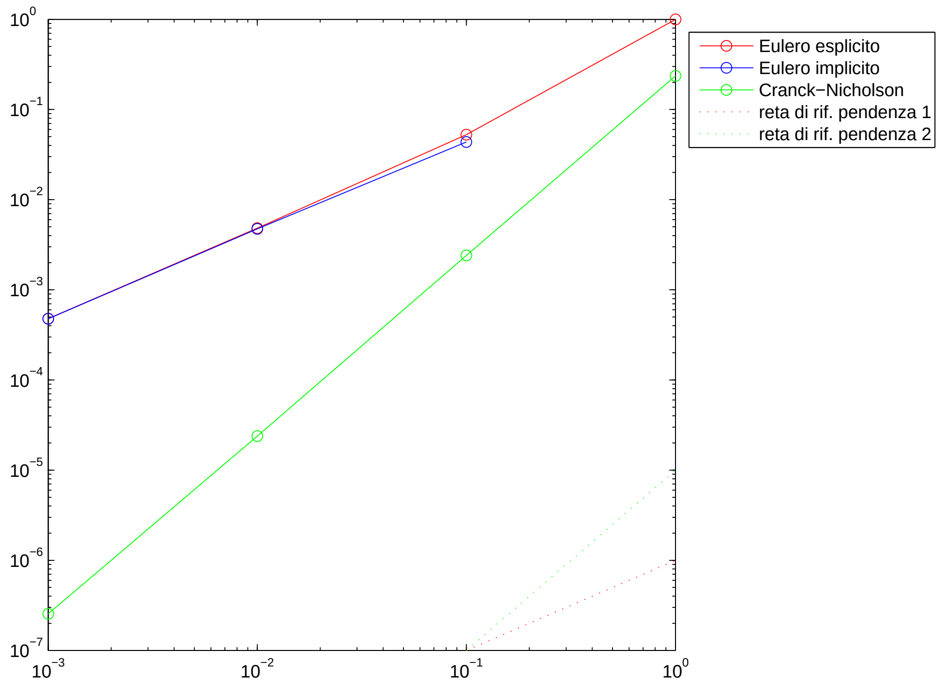

Figura 2: Grafico in scala logaritmica

Come si deduce dal grafico, il metodo di Eulero esplicito e il metodo di Eulero implicito hanno ordine di convergenza $\mathcal{O}(dt)$, ovvero ogni spostamento di una decade sull'asse delle ascisse, corrisponde sulla curva ad uno spostamento di una decade. Il metodo di Crank-Nicholson ha ordine di convergenza $\mathcal{O}(dt^2)$, ovvero ogni spostamento di una decade sull'asse delle ascisse, corrisponde sulla curva ad uno spostamento di due decadi.