Corso di Calcolo Numerico - A.A. 2004/2005 - Docente: P. Causin

Prima prova in itinere 29/04/05

NOME... **COGNOME** ....

Matricola............................ **CORSO DI LAUREA** ....

NOTA BENE: riportare sul foglio tutti i comandi Matlab utilizzati nello svolgimento degli esercizi. Scrivere le risposte negli spazi riquadrati.

Esercizio 1 [punti 12]

Si consideri la funzione $f(x) = \text{atan}(x)$, definita sull'intervallo $[-5, 5]$.

1. Si scriva il metodo di Newton per l'approssimazione dell'unico zero di $f(x)$, ricordando che $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Si prenda $x_0 = 3$ e si calcolino su carta le prime due iterazioni x_1 e x_2 prodotte dal metodo di Newton. Si commentino i risultati ottenuti.
3. Sulla base del punto precedente, si utilizzi opportunamente il programma `qssnewton` per l'approssimazione dello zero di $f(x)$.
4. Si discutano i possibili criteri di arresto per il metodo di Newton, e se ne deduca la validità per il caso in esame.
5. Si consideri ora la funzione $g(x) = (x - \alpha)\text{atan}(x)$, dove α è un parametro reale, tale che $\alpha \in [0, 1]$. Si studi l'ordine del metodo di Newton per l'approssimazione degli zeri di g al variare del parametro α, eventualmente aiutandosi con una rappresentazione grafica.

Esercizio 2 [punti 9]

Si consideri la formula di quadratura $Q(f) = \alpha_1 f(\frac{1}{2}) + \alpha_2 f'(\frac{1}{2})$, dove α_1 e α_2 sono due parametri reali. Si vuole usare $Q(f)$ per approssimare l'integrale

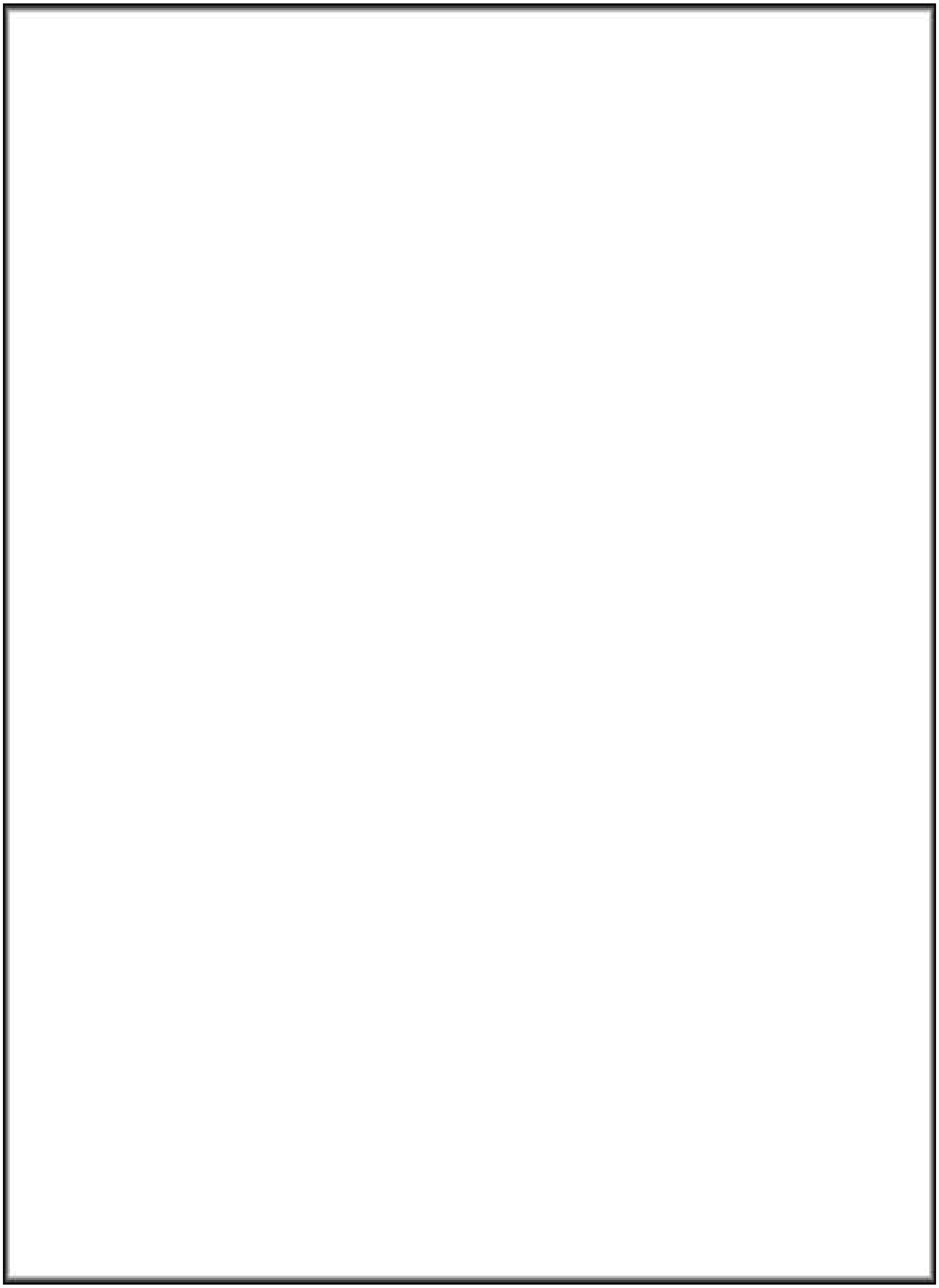
$$I(f) = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

dove $f(x)$ è una funzione continua su $[0, 1]$.

1. Si determinino α_1 e α_2 affinché $Q(x)$ abbia grado di esattezza massimo. Che formula si ottiene? Si dia una stima teorica del massimo errore di quadratura commesso.

2. Si scelga ora $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ e si calcoli numericamente l'integrale utilizzando $Q(f)$ (con α_1 e α_2 trovati al punto precedente). Quanto vale l'errore di quadratura?

3. Si consideri ora la formula di Simpson semplice per approssimare $I(f)$ e se ne scriva l'espressione. Quanto vale in questo caso l'errore di quadratura? Perché?



Esercizio 3 [punti 12]

Si consideri la funzione $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ e i punti $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ $x_3 = 0$ $x_4 = \frac{\pi}{4}$, $x_5 = \frac{\pi}{5}$.

1. Si usi la function `spline` per interpolare i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = \overline{0,5}$. Quali sono le proprietà della spline così calcolata?

2. Si calcoli numericamente la derivata prima della spline ottenuta al punto precedente, con la formula alle differenze centrate, per $dx = [1e-1, 1e-2, 1e-3]$.

3. Per ogni valore di dx, si tracci il grafico dell'errore assoluto $|s'(x) - f'(x)|$, dove s' è l'approssimazione della derivata della funzione spline ottenuta al punto precedente e $f'(x)'$ è la derivata analitica di f.