ESERCIZIO 1. Approssimazione delle derivate

1. L'approssimazione $\delta_+ f$ della derivata $f'(\overline{x})$ è data dalla seguente formula:

$$(\delta_+ f)(\overline{x}) = \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})}{h}.$$

La derivata esatta della funzione $f(x) = xe^x$ è $f'(x) = e^x + xe^x$.
Il codice MATLAB corrispondente è:

```
f='x.*exp(x)';
dx=[1e-1,1e-2,1e-3,1e-4];
df1=2*exp(1);
for j=1:4,
    x=[0:dx(j):5];
    y=eval(f);
    dim=length(x)-1;
    for i=1:dim
        dfa(i)=(y(i+1)-y(i))/dx(j);
    end;
    pos=find(x==1);
    err(j)=abs(df1-dfa(pos));
end;
format long
err
xref=[1e-2,1e-1];
yref=[1e-4,1e-3];
loglog(dx,err,'r',xref,yref,'b');
legend('errore in scala logaritmica',...
       'retta di riferimento',3);
grid
```

La variabile `df1` memorizza il valore $f'(1)$, `dim+1` è la dimensione del vettore x al variare del passo h. Nel vettore `dfa` vengono memorizzate le approssimazioni delle derivate al variare di h, usando le differenze finite all'avanti. Osserviamo che l'accuratezza è di $O(h)$, come si deduce dal grafico (ogni spostamento di una decade sull'asse delle ascisse, corrisponde per la curva allo spostamento di una decade sull'asse delle ordinate).

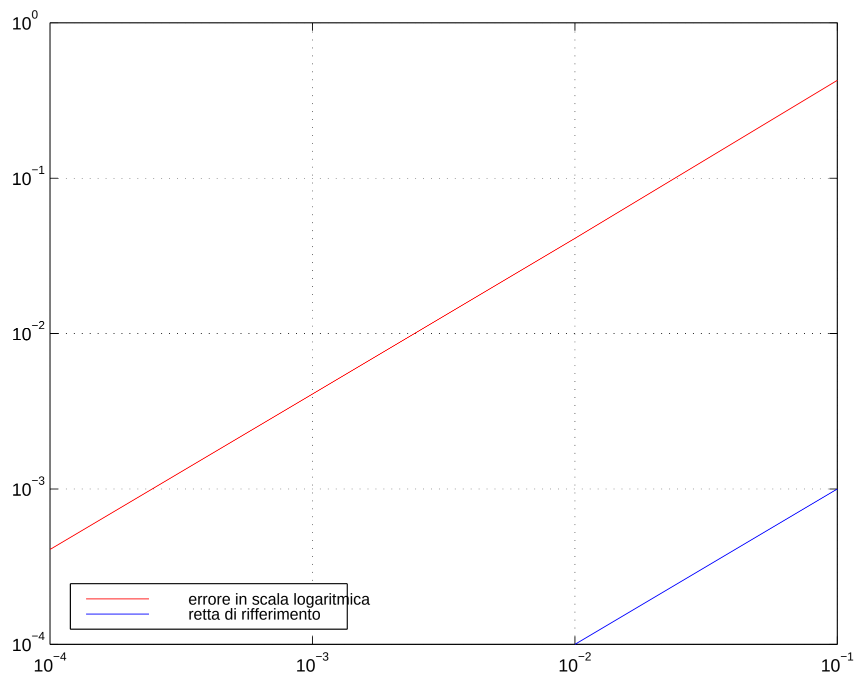

Figura 1: grafico in scala logaritmica per le differenze finite all'avanti

2. La formula alle differenze finite centrate è:

$$Df_c = \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}-h)}{2*h}.$$

Il codice MATLAB:

```
f='x.*exp(x)';
dx=[1e-1,1e-2,1e-3,1e-4];
df1=2*exp(1);
for j=1:4,
    x=[0:dx(j):5];
   y=eval(f);
   dim=length(x)-1;
    for i=2:dim
    dfc(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(2*dx(j));
   end;
   pos=find(x==1);
   err(j)=abs(df1-dfc(pos));
end;
format long
err
xref=[1e-2,1e-1];
yref=[1e-8,1e-6];

loglog(dx,err,'r',xref,yref,'b');
legend('err','retta di riferimento',2);
grid
```

Osserviamo che l'accuratezza è di $O(h^2)$.

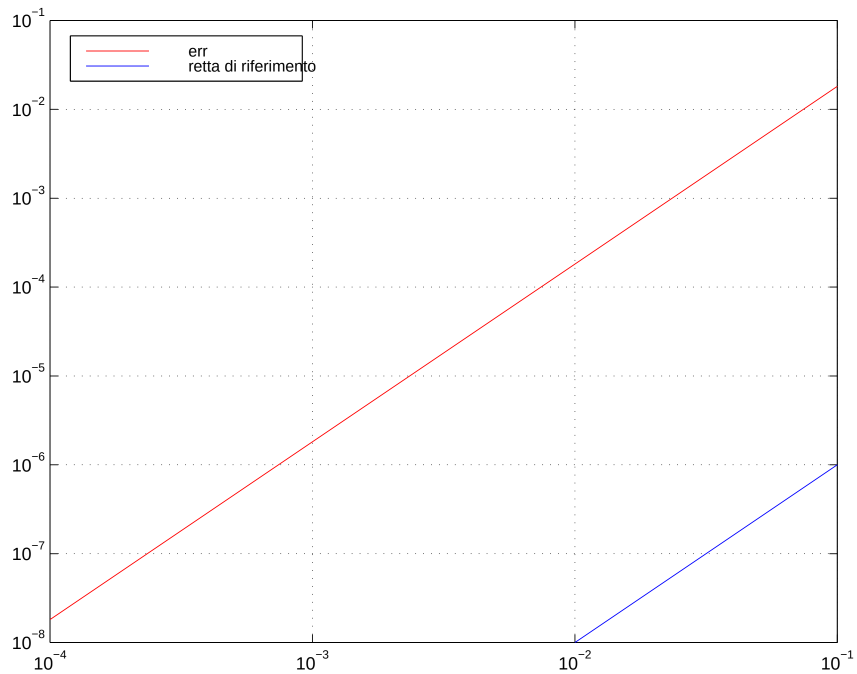

Figura 2: grafico in scala logaritmica per le differenze finite centrate

3. Come consequenza dello sviluppo in serie Taylor di f in un intorno destro di $\overline{x}$, abbiamo $(\delta_+ f)(\overline{x}) - f'(\overline{x}) = \frac{h}{2} f''(\xi)$, dove ξ è un punto opportuno in $(\overline{x}, \overline{x} + h)$. Quindi, $(\delta_+ f)(\overline{x})$ approssima $f'(\overline{x})$ a meno di un errore che tende a 0 come h, cioè l'approssimante è accurato al prim'ordine.

   Per le differenze finite centrate, abbiamo $f'(\overline{x}) - (Df_c)(\overline{x}) = \frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi) + f'''(\eta)\right)$ dove $\xi,\ \eta$ sono due punti opportuni appartenenti agli intervalli $(\overline{x} - h, \overline{x})$ e $(\overline{x}, \overline{x} + h)$, rispettivamente. Quindi, nel caso delle differenze finite centrate, l'approssimazione è di ordine 2.

ESERCIZIO 2. Interpolazione con funzioni spline

1. La funzione f è una spline cubica se soddisfa le seguenti condizioni:

   (a) ristretta ad ogni intervallo I_i è un polinomio di grado 3

   (b) è una funzione continua con derivate prima e seconda continue su $[x_0, x_M]$;

   (c) $f(x_j) = y_j$, per $j = 0, \cdots M$

   Se in più, $f''(x_0) = 0$, $f''(x_M) = 0$ allora f è una spline cubica naturale.

   La condizione (a) è ovvia dall'espressione di f.

   Dalla definizione di f, si osserva facilmente che la funzione è continua nei punti $x_1, \ldots, x_{M-1}$. Inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{11}{5}(x+1)^2 + \frac{19}{15} & x \in [-1, 0), \\ -8x^2 + \frac{22}{5}x + \frac{52}{15} & x \in [0, 1), \\ \frac{29}{5}(x-1)^2 - \frac{58}{5}(x-1) - \frac{2}{15} & x \in [1, 2] \end{cases}$$

   La funzione $f'(x)$ sui sottointervalli $(-1, 0)$ $(0, 1)$ $(1, 2)$ è un polinomio di grado 2 quindi è continua. Dobbiamo studiare la continuità nei punti $x = 0$, $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0-} f'(x) = \frac{11}{5}(0+1)^2 + \frac{19}{15} = \frac{52}{15} \\ \lim_{x \to 0+} f'(x) = -8x \cdot 0^2 + \frac{22}{5} \cdot 0 + \frac{52}{15} = \frac{52}{15} \\ f'(0) = \frac{52}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; f'(x)$ è continua in 0.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = -8x \cdot 1^2 + \frac{22}{5} \cdot 1 + \frac{52}{15} = -\frac{2}{15} \\ \lim\limits_{x\to 1+} f'(x) = \frac{29}{5}(1-1)^2 - \frac{58}{5}(1-1) - \frac{2}{15} = -\frac{2}{15} \\ f'(1) = -\frac{2}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; f'(x)$ è continua in 1.

Quindi, la funzione $f'(x)$ è continua su $[-1,2]$.

Nello stesso modo si dimostra che la derivata seconda

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{22}{5}(x+1) & x \in [-1,0), \\ -16x + \frac{22}{5} & x \in [0,1), \\ \frac{58}{5}(x-1) - \frac{58}{5} & x \in [1,2] \end{cases}$$

è continua su $[-1,2]$.

Facilmente, si verifica la terza proprietà, per esempio: $f(x_0) = f(-1) = \frac{11}{15}(-1+1)^3 + \frac{19}{15}(-1+1) + 5 = 5 = y_0$.

Verifichiamo infine che f è una spline naturale:
$f''(-1) = \frac{22}{5}(-1+1) = 0$ e $f''(2) = \frac{58}{5}(2-1) - \frac{58}{5} = 0$
Ciò implica che in $x = x_0$ e $x = x_n$, localmente, la spline cubica naturale sia una retta ($s_3'' = 0$), si osservi a questo proposito la Fig.4.

2. Il comando MATLAB `spline` costruisce una spline cubica not-a-knot:

```
x=[-1,0,1,2];
xx=[-1:0.1:2];
y=[5,7,10,6];
yy=spline(x,y,xx);
```

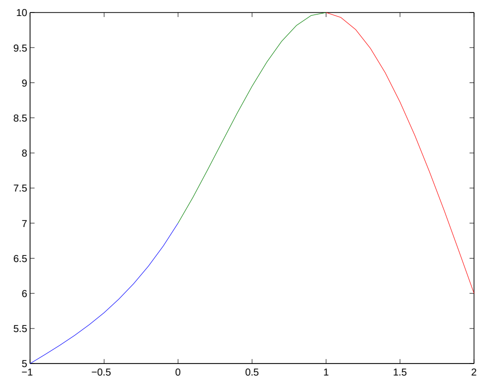

Figura 3: grafico di f(x)

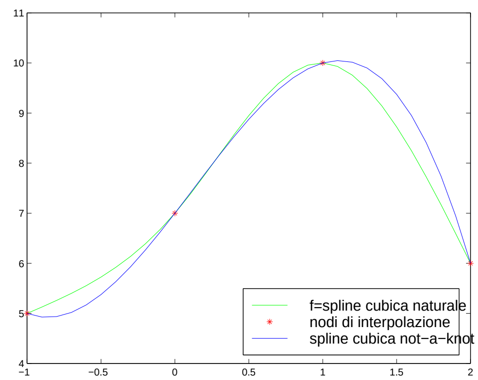

Figura 4: spline cubica naturale VS spline cubica not-a-knot

3. Possiamo costruirci la funzione `DiffCentrate` che prende come dati di input:
   - `y` il vettore che contiene i valori della funzione da derivare
   - `dim` la dimensione del vettore `y`
   - `dx` l'incremento
   - `indexCorrection` il parametro che determina nel vettore `y` il punto di partenza e quello di fine, in cui si può calcolare la derivata

La function restituise la derivata calcolata numericamente con la formula alle differenze finite centrate.

```
function dfc=DiffCentrate(y,dx,dim,indexCorrection);
dfc=zeros(dim,1);
for i=1+indexCorrection:dim-indexCorrection
   dfc(i,1)=(y(i+1)-y(i-1))/(2*dx);
end;
```

Usando più volte questa funzione (la derivata terza è la derivata prima della derivata seconda, che è a sua volta la derivata prima della derivata prima...), calcoliamo numericamente la derivata terza:

```
clear all

dx=1e-3;
x=[-1,0,1,2];
y=[5,7,10,6];
xx=[-1:dx:2];
yy=spline(x,y,xx);
plot(xx,yy)
dim=length(xx);
df1=DiffCentrate(yy,dx,dim,1);
df2=DiffCentrate(df1,dx,dim,2);
df3=DiffCentrate(df2,dx,dim,3);
xxgr=xx(4:dim-3);
df3gr=df3(4:dim-3);
plot(xxgr,df3gr);
```

Attenzione alla scala! Si osserva che la derivata terza della funzione spline cubica ottenuta con i nodi dal

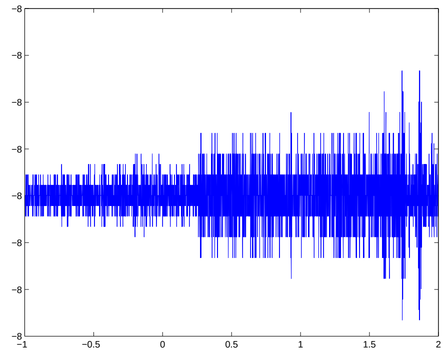

Figura 5: derivata terza della spline not-a-knot calcolata numericamente

punto 2 è continua nei nodi interni x_1 e x_{M-1} (in realtà si osserva che essa è continua e costante ovunque).

4. La derivata terza della funzione f è:

$$f'''(x) = \begin{cases} \frac{22}{5} & x \in [-1, 0), \\ -16 & x \in [0, 1), \\ \frac{58}{5} & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Quindi, essa è costante a tratti (ma non continua!).

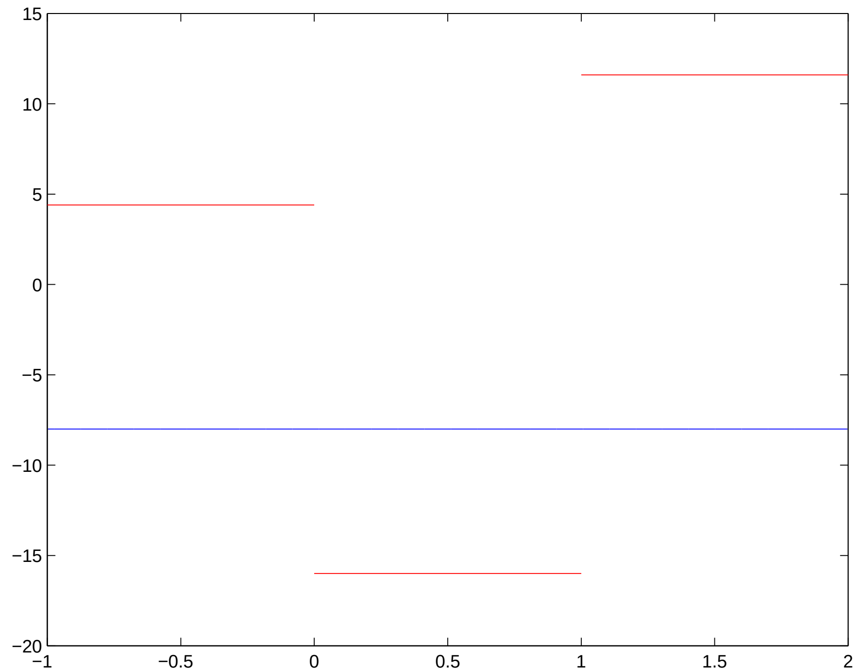

Figura 6: in blu la derivata terza della spline not-a-knot e in rosso la derivata terza della spline naturale

ESERCIZIO 3. Integrazione numerica

1. Analiticamente, abbiamo che

$$I = e^{x-1}|_0^5 = e^4 - e^{-1} \simeq 54.23027059197280.$$

La formula del punto medio semplice è
$I_{PM} = (b-a)f((a+b)/2)$.

```
>>IPM=(5-0)*exp((0+5)/2-1)
IPM =

22.40844535169032
```

Quindi, l'errore $|I - IPM| = 31.82182524028248$.

2. Nel caso della formula del punto medio composito abbiamo
$$I - I_{PM}^C = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi).$$
Quindi dobbiamo scegliere h tale che
$$\frac{5-0}{24} h^2 \max_{x\in[0,5]} |f''(x)| \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{5}{24} h^2 \cdot e^4 \leq 10^{-4} \Leftrightarrow h^2 \leq \frac{10^{-4}\cdot 24}{5\cdot e^4}.$$
Verifichiamo in MATLAB implementando la formula del punto medio composito:

```
>>h=sqrt((1e-4*24)/(5*exp(4)))

h =

    0.00296504749820
>> x=[0:h:5];
>>f='exp(x-1)';
>> dim=length(x);
>> for i=1:dim-1
    xm(i)=(x(i)+x(i+1))/2;
end;
>> x=xm;
>> y=eval(f);
>> IPMC=0;
>>for i=1:dim-1
IPMC=IPMC+h*y(i);
end;
>>IPMC

IPMC =
```

```
54.17950254059673
```

Quindi
$I - IPMC = 54.23027059197280 - 54.17950254059673 =$
$= 0.05076805137607 > 10^{-4}$.

Cosa non quadra? Con questa scelta del passo h, si osserva che l'estremo destro dell'intervallo di integrazione (cioè 5) non viene raggiunto (non è un nodo).
Infatti, `x(end)=4.99758755821904.`
Poiché la funzione integranda ha una crescita molto ripida, anche se il nodo $x(M+1)$ è molto vicino a 5 (ma non esattamente 5!), il valore calcolato non soddisfa $|I - IPMC| < 1e^{-4}$.

Vediamo di quanti intervalli M abbiamo bisogno per avere un errore minore di $1e^{-4}$.

$$h = \frac{b-a}{M} \to M = \frac{b-a}{h} = \frac{5}{0.00296504749820} \simeq 1.6863136e{+}003.$$

Prendiamo allora $M = 1687$ e $h = \frac{5}{1687} \simeq 0.00296384113811$ e rifacciamo i conti. Si ottiene `IPMC=54.23025074243800`, e in questo caso l'errore è

$$|I - IPMC| \simeq 1.984953479450269e - 005 < 10^{-4}.$$