Laboratorio nr. 9

ESERCIZIO

Si consideri la seguente equazione differenziale alle derivate ordinarie

$$\begin{cases} y'(t) = -ty^2, \quad 0 < t < T \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{1}$$

1. Si calcoli la soluzione analitica di (1), procedendo per separazione di variabili; si rappresenti graficamente tale soluzione e si identifichi il suo comportamento per $T >> 1$.

2. Sia (1) della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

con $f(t, y(t)) = -ty^2$ e $y^0 = 2$.
Si consideri la suddivisione di $(0, T]$ in N intervalli di ampiezza Δt, tali che $t_n = n * \Delta t, n = 0, \ldots, N$ e si definisca $y^n = y(t_n)$ e u^n l'approssimazione di y^n al tempo t_n. Si fissi $T = 1, \Delta t = 0.01$
Si discretizzi (1) usando i seguenti metodi alle differenze (si implementi per ciascuno di essi un opportuno codice MATLAB)

(a) Eulero esplicito

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(t^n, u^n) \\ u^0 = y^0 \end{cases}$$

(b) Eulero implicito

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot f(t^{n+1}, u^{n+1}) \\ u^0 = y^0 \end{cases}$$

(c) Crank-Nicholson

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot \frac{1}{2}(f(t^n, u^n) + f(t^{n+1}, u^{n+1})) \\ u^0 = y^0 \end{cases}$$

Nel caso dei metodi di Eulero implicito e di Crank-Nicholson, si risolva ad ogni passo la risultante equazione nonlineare utilizzando la function MATLAB `fzero` (leggerne attentamente l'`help`)!

3. Tracciare sul medesimo grafico le approssimazioni della soluzione trovate al punto precedente, insieme con la soluzione esatta. Quale è l'approssimazione migliore?

4. Si considerino ora i valori $\Delta t = [1, 0.1, 0.01, 0.001]$ e si tracci il grafico in scala logaritmica di $\max\limits_{t \in [0,T]} |y - u|$ al variare di Δt. Cosa si osserva?