Laboratorio nr. 10-Soluzione

1. Condizione sufficiente per la convergenza del metodo di Jacobi è che la matrice A sia a dominanza diagonale stretta per righe. Una matrice si dice a dominanza diagonale stretta per righe se

   $$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, \ldots, n.$$

   Le condizioni da imporre sui parametri $\beta,\ \gamma,\ \kappa$ sono quindi le seguenti:

   $$|\gamma| > |\kappa|, \quad |\gamma| > |\kappa| + |\beta|, \quad |\gamma| > |\beta|$$

   Condizioni sufficienti perché il metodo di Gauss-Seidel sia convergente sono (alternativamente):

   - A simmetrica definita positiva
   - A a dominanza diagonale stretta, per righe o per colonne

   Per la prima condizione sufficiente, le restrizioni sui parametri sono quelle viste nel caso di Jacobi (in questo esempio la dominanza diagonale per colonne fornisce le stesse restrizioni che la dominanza diagonale per righe!).
   Alternativamente, possiamo osservare che A è simmetrica per costruzione. Per vedere se è anche definita positiva, calcoliamone gli autovalori e imponiamo che siano tutti positivi. Ricordiamo che gli autovalori di A sono le radici dell'equazione

   $$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow$
$(\gamma-\lambda)\left[(\gamma-\lambda)^2-\beta^2-\kappa^2\right]=0,$
e quindi la matrice A ha autovalori:

$$\lambda_1=\gamma,\ \lambda_2=\gamma-\sqrt{\beta^2+\kappa^2},\ \lambda_3=\gamma+\sqrt{\beta^2+\kappa^2}.$$

Imponiamo le condizioni:

- $\lambda_1>0 \ \Leftrightarrow \ \gamma>0$
- $\lambda_2>0 \ \Leftrightarrow \ \gamma-\sqrt{\beta^2+\kappa^2}>0 \ \Leftrightarrow \ \gamma^2>\beta^2+\kappa^2$
- $\lambda_3>0 \ \Leftrightarrow \ \gamma+\sqrt{\beta^2+\kappa^2}>0$;
  Osserviamo che le condizioni $\lambda_1>0$ e $\lambda_2>0$ assicurano automaticamente che $\lambda_3>0$.

2. Il metodi di Jacobi è:

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right).$$

In forma matriciale, il metodo può essere scritto come:

$$x^{(k+1)}=D^{-1}(D-A)x^{(k)}+g$$

dove $g=D^{-1}b$ e $D=\mathrm{diag}(A)$. Quindi la matrice di iterazione per il metodo di Jacobi è
$B_J=D^{-1}(D-A)$. Nel nostro caso,

$$B_J=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\kappa}{\gamma} & 0 \\ -\frac{\kappa}{\gamma} & 0 & -\frac{\beta}{\gamma} \\ 0 & -\frac{\beta}{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

La condizione necessaria e sufficiente perché il metodo di Jacobi sia convergente è $\rho(B_J)<1$, dove $\rho(B_J)$

è il raggio spettrale della matrice B_J, cioè il massimo in modulo degli autovalori di B_J.
Calcoliamo gli autovalori di B_J :
$\det(B_J - \lambda \cdot I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot \left(\frac{\beta^2+\kappa^2}{\gamma^2} - \lambda^2\right) = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{\beta^2+\kappa^2}}{\gamma},\ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{\beta^2+\kappa^2}}{\gamma}$
quindi il raggio spettrale è:

$\rho(B_J) = \max\{|\lambda_1|,\ |\lambda_2|,\ |\lambda_3|\} = \frac{\sqrt{\beta^2+\kappa^2}}{|\gamma|}$. Quindi, sui parametri $\beta,\ \gamma,\ \kappa$ dobbiamo imporre la condizione

$$\frac{\sqrt{\beta^2+\kappa^2}}{|\gamma|} < 1 \Longleftrightarrow \gamma^2 > \beta^2 + \kappa^2$$

In MATLAB, il raggio spettrale di una matrice A può essere calcolato con il comando:

```
>>RaggioSpettrale=max(abs(eig(A)));
```

Adesso confrontiamo la condizione sufficiente per cui il metodo di Jacobi è convergente con la condizione necessaria e sufficiente per cui il metodo di Jacobi è convergente.

La condizione necessaria $|\kappa|+|\beta| < |\gamma|$ implica (prendendone il quadrato)

$$\gamma^2 > \kappa^2 + \beta^2 + 2|\kappa||\beta| > \beta^2 + \kappa^2.$$

Quindi, la condizione di dominanza diagonale stretta per righe per la matrice A (condizione sufficiente) è più forte rispetto alla condizione $\rho(B_J) < 1$.

3. Osserviamo che $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$. Questa proprietà è valida per qualsiasi matrice A definita positiva

e tridiagonale. In questo caso, il metodo di Gauss-Seidel converge più rapidamente del metodo di Jacobi, infatti il raggio spettrale fornisce un'indicazione della velocità di convergenza del metodo. Quanto più il raggio spettrale è prossimo a zero, tanto più il metodo converge rapidamente.

4. Il grafico del raggio spettrale di B_J e B_{GS} in funzione di γ (per $\beta = 1$ e $\kappa = 1/2$ fissati) è riportato nella figura seguente.

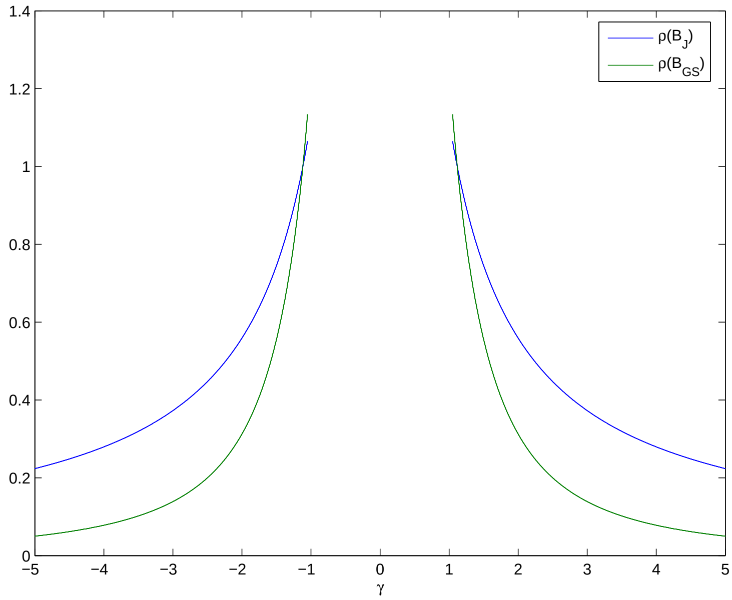

Figura 1: Raggio spettrale di B_J e B_{GS} in funzione di γ

5. (a) Utilizziamo la function `itermeth` per risolvere il sistema $Ax = b$ con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

```
>>beta=1;
>>kappa=1/2;
```

```
>>gamma=3;
>>A=[gamma kappa 0; kappa gamma beta; 0 beta gamma];
>>x=ones(3,1);
>>b=A*x;
>>x0=[0; 0 ;0];
>>tol=1e-6;
>>nmax=100;
>>[xJ, iterJ, resJ]= itermeth(A,b,x0,nmax,tol,'J');
>>[xGS, iterGS, resGS]= itermeth(A,b,x0,nmax,tol,'G');
```

(b) Risolviamo il sistema $Ax = b$ con il metodo di Richardson dinamico, usando la function `itermeth`:

```
>>P=diag(diag(A),0)
>>[xR, iterR, resR]= itermeth(A,b,x0,nmax,tol,P);
```

(c) Il grafico del residuo è:

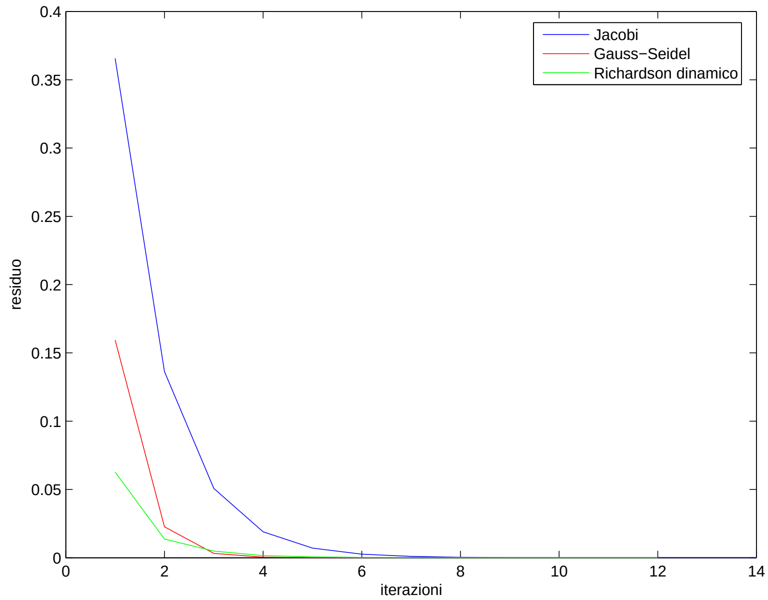

Figura 2: