Preparazione alla I Prova in Itinere

Esercizio 1. (Approssimazione di funzioni)

Si consideri la funzione `sin(x)` definita sull'intervallo $[0, 3\pi]$.

a) Utilizzando il codice `qssinterpol` si calcoli il polinomio di interpolazione di Lagrange $\Pi_n f(x)$ su nodi equispaziati per $n = 1, \ldots, 5$ e si comparino graficamente tali approssimazioni con la funzione data.

b) Si stimi teoricamente l'errore di interpolazione $E_n(\sin) = \max_{x\in[0,3\pi]} |\sin(x) - \Pi_n \sin(x)|$ per $n = 1, \ldots, 5$. Si calcoli poi con MATLAB tale errore in funzione di n e lo si rappresenti su un grafico.

Esercizio 2. (Approssimazione di funzioni)

Si consideri la fuzione f definita come

```
>> x=[0:1/9:1];
>> f=10*x+rand(size(x));
```

a) Si calcoli utilizzando il programma `qssinterpol` il polinomio $\Pi_9 f(x)$ che interpola $f(x)$ in corrispondenza dei dati assegnati (perché abbiamo preso proprio grado 9?). Si calcoli poi il polinomio $T_1 f(x) = a_0 + a_1 x$ di ordine 1 (retta di regressione) che approssima f nel senso dei minimi quadrati, ricordando che

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

b) Si confrontino graficamente i polinomi calcolati rispetto ai dati assegnati

c) Si utilizzino $\Pi_9 f(x)$ e T_1 per estrapolare il valore di f nel punto `x=2`. Si confrontino i valori ottenuti con il valore "esatto" di `f`, che si ottiene come

```
>> xv=2;
>> f=10*xv+rand(size(xv));
```

Cosa si deduce?

d) Se si ripete il calcolo di f, il vettore `rand` cambia e quindi anche i valori di f cambiano conseguentemente. Si commentino le proprietà rispettive dell'approssimazione ai minimi quadrati e dell'interpolazione di Lagrange in termini di sensibilità rispetto alle perturbazioni sui dati (perturbazioni sui valori di f date da `rand`).

Esercizio 3. (Metodo di bisezione)

Si consideri la seguente funzione: $f(x) = \ln(x) - 5 + x$.

a) Si usi il comando `plot` per localizzare graficamente lo zero α di f.

b) Per un intervallo $[a, b]$ determinato, si giustifichi l'applicabilità del metodo di bisezione per la ricerca di α.

c) Si calcolino a mano le prime due iterazioni del metodo di bisezione.

d) Si stimi teoricamente quante iterazioni sono necessarie per trovare α con un errore inferiore a $toll = 10^{-10}$.

e) Si verifichi il risultato dal punto precedente, utilizzando il programma `qssbisez`.

f) Si stimi teoricamente quante iterazioni supplementari sono necessarie per ridurre l'errore precedentemente trovato di un fattore 100. Si verifichi tale risultato utilizzando il programma `qssbisez`

Esercizio 4. (Metodo di Newton)

Si consideri la seguente funzione $f(x) = (x - 2)^4$.

a) Si determini il procedimento iterativo che caratterizza il metodo di Newton.

b) Si calcolino a mano le prime due iterazioni del metodo di Newton.

c) Utilizzando la function `qssnewton.m` si verifichi l'ordine di convergenza del metodo di Newton. L'ordine di convergenza può essere migliorato? Si giustifichi la risposta.

d) Si confronti il grafico dell'errore reale $||\alpha - x_k||$ con quello dello stimatore di k $||x_k - x_{k-1}||$. Cosa si osserva?

Esercizio 5. (Metodo del punto fisso)

Per l'approssimazione degli zeri della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 1}$, si considerino i seguenti metodi di punto fisso:

a) $x^{k+1} = \phi_1(x^k)$, essendo $\phi_1(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 2}{x - 1}$;

b) $x^{k+1} = \phi_2(x^k)$, essendo $\phi_2(x) = x - 2 + \dfrac{x}{x - 1}$.

c) $x^{k+1} = \phi_3(x^k)$, essendo $\phi_3(x) = x - \dfrac{(2x^2 - 3x - 2)/(x - 1)}{(2x^2 - 4x + 5)/(x - 1)^2}$

Per ciascun metodo di punto fisso:

- Si studi consistenza e ordine di convergenza
- Per i metodi convergenti, si utilizzi il programma `qssptofis.m` per l'approssimazione degli zeri di f
- Si riconosce il metodo con funzione di iterazione ϕ_3? Si poteva stabilire a priori l'ordine di convergenza di tale metodo?

Esercizio 6. (Approssimazione di funzioni)

Si consideri la funzione $f(x) = \sin(2\pi x)$, valutata in 21 nodi equispaziati nell'intervallo$[-1, 1]$.

a) Si calcoli il polinomio interpolatore di Lagrange. utilizzando il programma `qssinterpol.m`.

b) Si calcoli la spline cubica interpolatoria utilizzando la function `spline`.

c) Si confrontino tali curve con il grafico di f

d) Si sostituiscano alle valutazioni $f(x_i)$ le seguente valutazioni perurbate: $f(x_i)+(-1)^{i+1}10^{-4}$ e si riprenda il confronto. Per calcolare il polinomio interpolatore di Lagrange, si usi `qsslagrange.m`. Cosa si può concludere?

Esercizio 7. (Differenziazione numerica)

Si ricavi utilizzando un opportuno sviluppo in serie di Taylor l'ordine di accuratezza delle seguenti formule di differenziazione numerica per l'approssimazione di $f'(x)$ nel punto x_i:

a) $\dfrac{-11f(x_i) + 18f(x_{i+1}) - 9f(x_{i+2}) + 2f(x_{i+3})}{6h}$

b) $\dfrac{f(x_{i-2}) - 6f(x_{i-1}) + 3f(x_i) + 2f(x_{i+1})}{6h}$

c) $\dfrac{f(x_{i-2}) - 8f(x_i) + 8f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{12h}$

Esercizio 8. (Integrazione numerica)

Si consideri il calcolo del seguente integrale

$$I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx,$$

dove n e m sono due valori interi entrambi maggiori o uguali a 1.

a) Si scrivano i metodi del punto medio, del trapezio e di Simpson semplici per l'approssimazione di I.

b) Per quali valori di n e m la formula del punto medio semplice fornisce il valore esatto dell'integrale? E il metodo di Simpson semplice?

c) Si prenda ora $m = 3$ e $n = 1$. Si scriva l'errore commesso utilizzando il metodo del trapezio semplice.