Lab.10

Esercizio

Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & \kappa & 0 \\ \kappa & \gamma & \beta \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

dove β, γ, κ sono tre parametri reali.

1. Fornire delle condizioni sufficienti sui parametri β, γ, κ tali per cui il metodo di Jacobi applicato alla risoluzione del sistema $Ax = b$ sia convergente. Fornire delle condizioni sufficienti sui parametri β, γ, κ tali per cui il metodo di Gauss-Seidel sia convergente.
2. Scrivere la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi e dare le condizioni necessarie e sufficienti su β, γ, κ perché tale metodo risulti convergente. Confrontare i risultati con quelli ottenuti al punto precedente, relativamente al metodo di Jacobi. Cosa si osserva ?
3. Confrontare le velocità di convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, sapendo che $\rho(B_{GS}) = \frac{\beta^2+\kappa^2}{\gamma^2}$.
4. Fissare $\beta = 1, \kappa = \frac{1}{2}$ e disegnare in MATLAB il grafico del raggio spettrale di B_J e B_{GS} in funzione di γ, verificando i risultati trovati ai punti precedenti (per calcolare l'inversa di una matrice, si utilizzi il comando `inv`.
5. Prendere ora $\gamma = 3$ e scegliere b tale che `x=ones(3,1)`.
   (a) Utilizzare opportunamente la function `itermeth` per risolvere il sistema $Ax = b$ con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel, prendendo `x0=[0 ;0 ;0]` e `toll=1e-6` ;

(b) risolvere, sempre usando la function `itermeth` il sistema con il metodo di Richardson dinamico, scegliendo $P = \mathrm{diag}(\mathrm{A})$;

(c) riportare in un grafico il residuo in funzione dell'iterazione k per i metodi dei punti precedenti e commentare il risultato ottenuto.