

Laboratorio 8. Soluzione

1. Sia $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = L$ una discretizzazione uniforme dell'intervallo $[0, L]$.

Imponiamo che l'equazione differenziale sia soddisfatta per ogni punto $x_j, j = 1, \dots, n-1$

$$u''(x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n-1}$$

Per $x = x_0$ e $x = x_n$, imponiamo che $u(x_0) = u_0, u(x_n) = u_L$

Data una funzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sufficientemente regolare in un intorno di un generico punto $\bar{x} \in (a, b)$, la differenza finita centrata

$$\delta^2 u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} - h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} + h)}{h^2}$$

fornisce un'approssimazione di $u''(\bar{x})$ di ordine 2 rispetto a h .

In ciascun nodo $j = 1, \dots, n-1$ avremo dunque la seguente relazione

$$-\frac{u(x_j - h) - 2u(x_j) + u(x_j + h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) = f(x_j)$$

2. Se ora scriviamo la relazione sopra per ogni nodo interno e trascuriamo il termine dell'errore, otteniamo un sistema lineare le cui incognite sono i valori della temperatura nei nodi interni. Il sistema è del tipo

$$Au = b,$$

dove $A \in \mathcal{M}_{n-1 \times n-1}, b \in \mathcal{M}_{n-1 \times 1}$

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \cdot & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{1}{h^2}u_0 \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{1}{h^2}u_L \end{pmatrix}$$

3. Costruiamo in MATLAB la matrice A e il vettore b :

```
>>n=30;
>>L=2*pi;
>>h=L/n;

>>u0=10;
>>uL=20;

>>A=sparse(n-1,n-1);
>>A=(-diag(ones(n-2,1),-1)+...
diag(2*ones(n-1,1),0)-...
diag(ones(n-2,1),1))/h^2;

>>b=zeros(n-1,1);
>>b(1)=sin(x(1))+u0/h^2;
>>for i=2:n-2
b(i)=sin(x(i));
end;
>>>b(n-1)=sin(x(n-1))+uL/h^2;
```

4. Risolviamo il sistema $Au = b$ con il comando `\` e conserviamotale soluzione come riferimento.

```
>>u=A\b;
```

5. Se la matrice A è simmetrica e definita positiva, allora si può applicare il metodo di Gauss-Seidel. Per costruzione, sappiamo che A è simmetrica e definita positiva; verifichiamolo:

```
>>simmetrica=isequal(A,A');  
>>autovalori=eig(A)
```

Applichiamo il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema $Ax = b$:

```
>>uiniz=15*ones(n-1,1);  
>>[uGS,iterGS,xdifGS]=qssgs(A,b,uiniz,1000,1e-4,n-1);
```

6. La matrice $P = I$ è invertibile e la matrice $P^{-1}A$ è simmetrica e definita positiva: si può dunque applicare il metodo di Richardson stazionario. Possiamo calcolare il parametro α_{ott} con la seguente formula: $\alpha_{ott} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$, dove λ_{min} è l'autovalore minimo di $P^{-1}A \equiv A$ e λ_{max} è l'autovalore massimo di $P^{-1}A \equiv A$

```
>>I=eye(n-1);  
>>alpha_ott=2/(min(autovalori)+max(autovalori))  
>>[uR,iterR,xdifR,errR]=...  
qssrichstaz(A,b,I,uiniz,1000,1e-4,alpha_ott,n-1);
```

7. Utilizziamo il metodo del gradiente coniugato, una versione del metodo di Richardson che considera un

parametro di accelerazione α variabile di iterazione in iterazione. Il metodo del gradiente coniugato è implementato in MATLAB con il comando `pcg`:

```
>>[uPCG_I,flag_I,relres_I,iterPCG_I,resvect_I] = ...  
pcg(A,b,1e-4,1000,I,I,uiniziale);
```

```
>>P=sparse(n-1,n-1);  
>>P=diag(diag(A),0);  
>>[uPCG_P,flag_P,relres_P,iterPCG_P,resvect_P] = ...  
pcg(A,b,1e-4,1000,P,I,uiniziale);
```

8. Confrontiamo le soluzioni calcolate in termine di numero di iterazioni e precisione:

```
iterGS =523  
iterR = 349  
iterPCG_I =28  
iterPCG_P =28  
  
norm(u-uGS,inf)=0.0023  
norm(u-uR,inf)= 0.0521  
norm(u-uPCG_I,inf)=3.0427e-004  
norm(u-uPCG_P,inf)=3.0427e-004
```

Osserviamo dunque che come numero di iterazioni e precisione, il metodo `pcg` fornisce i migliori risultati.