Corso di Calcolo Numerico - A.A. 2004/2005 - Docente: P. Causin

Seconda prova in itinere 09/06/05

NOME.. **COGNOME** ....

Matricola............................ **CORSO DI LAUREA** ....

NOTA BENE: riportare sul foglio tutti i comandi Matlab utilizzati nello svolgimento degli esercizi. Scrivere le risposte negli spazi riquadrati.

Esercizio 1 [punti 11]

Sia $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

e $A = D - E - F$ lo splitting di A tale che D è la parte diagonale di A, $-E$ la sua parte triangolare inferiore e $-F$ la sua parte triangolare superiore. Per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, si considera il metodo iterativo

$$x_{k+1} = B_\alpha x_k + f,$$

dove $B_\alpha = (I - \alpha(D-E)^{-1}A)$ è la matrice d'iterazione, con $\alpha \in [-0.5, 2.5]$ parametro d'accelerazione (prendere in MATLAB `alpha=[-0.5:0.1:2.5]` e I matrice identità $\in \mathbb{R}^{4\times 4}$, e dove f è una funzione nota di b.

1. Stabilire utilizzando MATLAB per quali valori di α il metodo iterativo è convergente. A questo scopo, utilizzare il criterio necessario e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo.

2. Dedurre dai risultati del punto precedente qual è il valore ottimale di α. Quanto vale il raggio spettrale di B_α in corrispondenza del valore ottimale di α?

3. Che metodo si ottiene per $\alpha = 1$? Esiste un criterio sufficiente che garantisce la convergenza di tale metodo per il sistema $Ax = b$ in esame?

4. Risolvere poi tale sistema, con `b=A*ones(4,1)`, usando opportunamente il programma `itermeth` con `toll=1e-6, nmax=100, x0=zeros(4,1)`. Quante iterazioni sono necessarie? Quanto vale il residuo all'ultima iterazione? Come è collegato il residuo all'errore vero?

Esercizio 2 [punti 11]

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

1. Si verifichi se il criterio necessario e sufficiente per poter portare al termine il metodo di Gauss senza pivotazione è soddisfatto.

2. Si calcolino con MATLAB la fattorizzazione LU della matrice A.

3. Utilizzando la fattorizzazione LU, si calcoli su carta la soluzione del sistema $Ax = b$.

Esercizio 3 [punti 11]

Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

si considera il metodo di Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{h} = \dfrac{1}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right], \quad n = 0, 1, \ldots \\ u_0 = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

dove h è il passo di discretizzazione temporale.

1. Scrivere il metodo di Crank-Nicolson applicato alla risoluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} y'(t) = -t\, y^2(t), \quad 0 < t < 1 \\ y(0) = 2, \end{cases} \tag{3}$$

   la cui soluzione esatta è $y(t) = 2/(1 + t^2)$.

2. La tabella seguente mostra gli errori commessi nell'integrazione del problema (3) dai metodi X e Y all'istante $t = 5$, per differenti valori di h :

h	metodo X	metodo Y
1	3.052276e-02	5.215832e-03
0.5	1.460741e-02	1.034686e-03
0.25	7.161485e-03	2.497104e-04
0.125	3.548112e-03	6.189158e-05
0.0625	1.765997e-03	1.543977e-05

   Aiutandosi con un opportuno grafico Matlab, si identifichi quale delle due colonne può corrispondere al metodo di Crank-Nicolson, giustificando la risposta.

3. A quale metodo numerico per l'integrazione di equazioni differenziali ordinarie può corrispondere l'altra colonna? Si scriva tale metodo applicato alla discretizzazione del problema (3), discutendone eventuali limitazioni su h legate all'assoluta stabilità dello schema.