Laboratorio nr. 6

ESERCIZIO 1. Approssimazione delle derivate

t

Si consideri la funzione $f(x) = x\mathrm{e}^x$ sull'intervallo $I = [0, 5]$. Si definisca il vettore `x=0:dx:5` e la stringa `f='x.*exp(x)'`.

1. Si calcoli utilizzando una differenza finita all'avanti l'approssimazione $\delta_+ f$ della derivata $f'(x)$ in I; si calcoli in $x = 1$ l'errore

   $$E_+ = |f'(x) - \delta_+ f|$$

   per valori del passo di incremento `dx=[1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4]` e se ne tracci un grafico in scala logaritmica (comando `loglog`).

2. Si calcoli utilizzando una differenza centrata l'approssimazione $\delta_c f$ della derivata $f'(x)$; si calcoli in $x = 1$ l'errore

   $$E_c = |f'(x) - \delta_c f|$$

   per valori del passo di incremento `dx=[1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4]` e se ne tracci un grafico in scala logaritmica

3. Quali conclusioni si traggono?

ESERCIZIO 2. Funzioni spline

Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{11}{15}(x+1)^3 + \frac{19}{15}(x+1) + 5 & x \in [-1, 0], \\ -\frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{5}x^2 + \frac{52}{15}x + 7 & x \in [0, 1], \\ \frac{29}{15}(x-1)^3 - \frac{29}{5}(x-1)^2 - \frac{2}{15}(x-1) + 10 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

1. Si verifichi che $f(x)$ è una spline cubica naturale interpolante i nodi

   $$(-1, 5), (0, 7), (1, 10), (2, 6).$$

   Si rappresenti $f(x)$ su un grafico.

2. Si utilizzi la function MATLAB `spline` per cstruire la spline cubica not-a-knot interpolante i nodi al punto 1. Si rappresenti la spline ottenuta sul medesimo grafico del punto 1. Quali sono le differenze tra le due spline?

3. Si verifichi che la spline al punto 2 è di tipo not-a-knot, ovvero che vale

   $$f_+^{'''}(0) = f_-^{'''}(0) \qquad f_-^{'''}(1) = f_+^{'''}(1),$$

   calcolandone numericamente la derivata terza.
   Si consideri a tale scopo l'approssimazione con differenze finite centrate delle derivate prima, seconda e terza con passo di incremento pari a `dx=1e-3`. Si riutilizzi il codice scritto nell'esercizio 1.

4. Si rappresentino graficamente le derivate terza delle due spline per $x \in [0, 2]$, utilizzando per la spline naturale la derivata analitica e per la spline not-a-knot

la derivata numerica calcolata al punto precedente. Cosa si trova? (attenzione alla scala!)

ESERCIZIO 3. Integrazione numerica

$$I = \int_0^5 \mathrm{e}^{x-1}\,dx.$$

1. Si approssimi I con la formula del punto medio semplice. Si stimi l'errore commesso.
2. Si consideri ora la formula del punto medio composito. Si trovi il minimo numero di sottointervalli M per approssimare I con un errore assoluto minore di 10^{-4}.