Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: ________

Calcolo Numerico - Corsi di Laurea Area Informatica
Docente: P. Causin
Appello straordinario 16/11/2005 - 3 Esercizi da svolgere in 2 ore

Per ogni punto degli esercizi seguenti, scrivere, oltre alla soluzione, i principali comandi Matlab utilizzati; tracciare inoltre, se ve ne sono, una copia qualitativa dei grafici ottenuti.

EXERCIZIO 1 [11 punti]

Sia assegnata la funzione $f(x) = \mathrm{e}^x(x-4)$ e sia α il suo zero.

1. Per l'approssimazione di α si consideri dapprima il metodo di Newton, implementato nel codice `newton.m`. Si utilizzino a questo scopo i parametri: `xv=0, nmax=500, toll=1e-6`. Come si comporta il metodo? Perché?
2. Si trovi sperimentalmente il valore `xv`$<\alpha$ perché il metodo di Newton converga. Cosa succede prendendo `xv=3`?
3. Si consideri ora un algoritmo costruito effettuando dapprima alcune iterazioni del metodo di bisezione, seguite da alcune iterazioni del metodo di Newton a partire dal valore ottenuto in uscita dal metodo di bisezione.
   (a) Si discuta quali sono i possibili vantaggi di questo algoritmo rispetto al precedente, soffermandosi sulle proprietà di convergenza attese
   (b) Si implementi l'algoritmo proposto sopra, utilizzando opportunamente i codici `qssbisez.m` e `newton.m`. Si arresti il metodo di bisezione quando esso ha raggiunto una accuratezza della soluzione pari a `toll*10e3`, considerando l'intervallo di partenza `a=0, b=5`. Si arresti successivamente il metodo di Newton quando la tolleranza raggiunta è `toll`. Si discutano quindi i risultati ottenuti.

EXERCIZIO 2 [11 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una assegnata funzione.

1. Si scriva per esteso l'espressione del polinomio di Lagrange $\Pi_2 f(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + 2h,\ x_2 = a + 3h,$$

   dove $a \in \mathbb{R}$ e $h > 0$. Si ricordi a questo scopo che la i-esima funzione di Lagrange è definita come $L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, 2.$

2. Si calcoli quindi l'espressione dei coefficienti $A_0,\ A_1,\ A_2$ nella formula di quadratura

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx \backsimeq \int_a^{a+2h} \Pi_2 f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

ESERCIZIO 3 [11 punti]

Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \cos(2y(t)),\ t \in (0,1], \quad y(0) = 0$$

la cui soluzione esatta è $y(t) = \frac{1}{2}\arcsin((\mathrm{e}^{4t} - 1)/(\mathrm{e}^{4t} + 1))$. Si consideri il seguente schema per l'approssimazione della soluzione, detto metodo di Heun

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n))]$$

dove h è il passo uniforme di discretizzazione in tempo.

1. Lo schema di Heun è esplicito o implicito? A quanti passi è?
2. Si scriva un semplice codice Matlab che implementa tale metodo
3. Si calcoli l'errore in $t = 1$ prendendo $h = \frac{1}{8}$. Si valuti sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo, considerando successivamente i valori $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.