Laboratorio nr.5

Esercizio 1. Interpolazione su nodi di Chebyshev e interpolazione composita

Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$ assegnata sull'intervallo $I = [0,1]$.

1. Trovare le ascisse dei nodi di Chebyshev x_0, x_1, x_2, x_3 in I. Stimare la quantità
$$\max_{x \in I} |f(x) - \Pi_3 f(x)|,$$
dove $\Pi_3 f(x)$ è l'interpolante di grado 3 ottenuto considerando i precedenti nodi di interpolazione. (Suggerimento. Si tracci un grafico di $|\omega_4(x)| = |\prod_{i=0}^{3}(x - x_i)|$ e se ne stimi graficamente il massimo.)
2. Si interpoli ora $f(x)$ con un interpolante lineare a tratti $\Pi_1^c f(x)$. Qual è il valore massimo del parametro di discretizzazione uniforme h tale che si commetta lo stesso errore che al punto 1. ?
3. Verificare tale risultato utilizzando la funzione MATLAB `interp1`.
4. Disegnare (su carta) sul medesimo grafico $f(x)$ e $\Pi_1^c f(x)$ nel caso $h = 0.1$.

Esercizio 2. Minimi quadrati

Si considerino le $n+1$ coppie di dati

$$(-4.5, 0.7),\ (-3.2, 2.3),\ (-1.4, 3.8),\ (0.8, 5.0),\ (2.5, 5.5),\ (4.1, 6.6)\ .$$

1. Si tracci la retta di regressione lineare $\widetilde{f}_1(x_i)$ che approssima tali dati nel senso dei minimi quadrati, dopo aver calcolato il valore dei coefficienti a_0 e a_1 che caratterizzano tale funzione
2. Sapendo che i coefficienti del polinomio $\widetilde{f}_2(x)$ ai minimi quadrati di ordine 2 sono $a_2 = -0.0444, a_1 = 0.6217, a_0 = 4.5752$, si tracci la funzione $\widetilde{f}_2$.
3. Si calcoli con MATLAB il valore $\Phi_2 = \sum_{i=1}^{6} [y_i - \widetilde{f}_2(x_i)]^2$ e lo si confronti con il valore $\Phi_1 = \sum_{i=1}^{6} [y_i - \widetilde{f}_1(x_i)]^2$. Cosa si ottiene ? Qual è la migliore approssimazione in questo caso ?
4. Si verifichi che la retta di regressione lineare passa per il punto di ascissa $x^* = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x_i$ e ordinata $y^* = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$. Si interpreti teoricamente tale proprietà e il suo significato.