

ESERCIZIO 1

Scrivere una semplice function MATLAB `newton.m` che implementi il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero α della funzione $f(x)$: dato x_0 , calcolare

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k \geq 1.$$

1. La function deve prendere in ingresso la funzione $f(x)$ e la sua derivata prima $f'(x)$ (come stringhe), il numero massimo di iterazioni `nmax`, il valore x_0 e una prefissata tolleranza `toll`.
2. La function deve restituire la radice calcolata, il numero di iterazioni compiuto e un vettore contenente le approssimazioni successive di α calcolate

Si implementino i seguenti possibili test d'arresto:

i) $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \text{toll}$

ii) $\|f(x_k)\| \leq \text{toll}$

oltre al vincolo `it < nmax`

Utilizzando la function `newton.m`:

1. si consideri il calcolo (banale!) dello zero positivo di $f(x) = x^2 - 9$, partendo da un opportuno valore x_0 . Si esamini l'ordine di convergenza del metodo. Si verifichi quindi l'affidabilità dei criteri di arresto proposti, confrontando il grafico dell'errore reale $\|\alpha - x_k\|$ con quello dello stimatore in funzione di k .

2. si consideri il calcolo dello zero $\alpha \simeq 8.52$ della funzione $f(x) = \exp(x) - 5000$. Si verifichi l'affidabilità dei criteri di arresto proposti, commentando i risultati;
3. si consideri ora il calcolo dello zero $\alpha = 1$ di $f(x) = (x - 1)^{m-1} \log(x)$ con $m = 11$ e $m = 21$. Si verifichi l'ordine di convergenza del metodo di Newton. Cosa succede in questo caso?
4. (facoltativo) si modifichi la function precedentemente scritta per ottenere il metodo delle corde e si verifichi l'ordine di convergenza per il calcolo dello zero positivo di $f(x) = x^2 - 9$.

ESERCIZIO 2

Per il calcolo dell'unica radice reale α della funzione

$$f(x) = e^x - x^2$$

si utilizzi il metodo di punto fisso $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k \geq 0$ con ciascuna delle seguenti funzioni di iterazione ϕ :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \exp\left(\frac{x}{2}\right), & \phi_2(x) &= -\exp\left(\frac{x}{2}\right), \\ \phi_3(x) &= x - \frac{e^x - x^2}{e^x - 2x}. \end{aligned}$$

1. Si studi consistenza e ordine di convergenza per ciascuna scelta di ϕ .
2. Si utilizzi il programma `qssptofis`, per i soli metodi convergenti, con `xv=0`, `nmax=1000`, `toll=1e-6`,

riportando il numero di iterazioni impiegate per convergere e l'errore assoluto effettivamente commesso ($\alpha = -0.7034674$)

3. Si riconosce il metodo con funzione di iterazione ϕ_3 ?
Si poteva stabilire a priori l'ordine di convergenza di tale metodo?