Laboratorio nr.11 - Soluzioni

Esercizio 1

1. L'equazione $y' = -y^2(t) + 1$ è un'equazione di Riccati; dettagliamo qui di seguito il procedimento per calcolare la sua soluzione (in generale sarà richiesta solo la soluzione di equazioni più semplici).

   Cerchiamo dapprima una soluzione particolare del tipo $\overline{y} = k,\ k \in \mathbb{R}$:
   $$0 = -k^2 + 1 \ \Rightarrow k = \pm 1.$$
   La soluzione generale è del tipo
   $$y = \overline{y} + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z},$$
   da cui calcoliamo
   $$y' = \left(1 + \frac{1}{z}\right)' = -\frac{z'}{z^2}.$$
   Quindi possiamo riscrivere l'equazione come
   $$-\frac{z'}{z^2} = -\left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 + 1 \ \Rightarrow \ z' = 2z + 1,$$
   ovvero dobbiamo risolvere l'equazione lineare
   $$z' = 2z + 1.$$

Poniamo:

$$\mu(t) = \int -2dt = -2t + \mathcal{C},$$

che dà

$$z(t) = e^{-(-2t+\mathcal{C})} \int e^{-2t+\mathcal{C}} \cdot 1dt \;\Rightarrow\; z(t) = -\frac{1}{2} + C_1 \cdot e^{2t-\mathcal{C}}.$$

Definiamo la costante $C = C_1 \cdot e^{-\mathcal{C}}$, e quindi

$$z(t) = -\frac{1}{2} + Ce^{2t}.$$

Ritornando alla variabile $y(t)$ troviamo

$$y(t) = 1 + \frac{1}{z(t)} \;\Leftrightarrow\; y(t) = \frac{2Ce^{2t} + 1}{2Ce^{2t} - 1}$$

Per trovare la costante C, impongo la condizione iniziale $y(0) = 0$ e ottengo $C = -\frac{1}{2}$, quindi

$$y(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

2. Il problema di Cauchy può essere scritto come segue

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

dove $f(t, y(t)) = 1 - y^2(t)$. Per riportarci al problema modello, usiamo uno sviluppo in serie di Taylor di f nell'intorno del punto $(\overline{t}, \overline{y})$.

$$y'(t) = f(\bar{t}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, \bar{y})(t - \bar{t}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{t}, \bar{y})(y(t) - \bar{y}) \tag{2}$$

Poniamo

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{t}, \bar{y}).$$

Nel nostro caso $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -2y$. Poiché per $t > 0$ la soluzione $y(t)$ è positiva, abbiamo che $\lambda < 0$ e dunque il problema modello associato è asintoticamente stabile (problema dissipativo).
Inoltre, poniamo

$$\begin{cases} g(t) = f(\bar{t}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, \bar{y})(t - \bar{t}) \\ w(t) = y(t) - \bar{y} \end{cases}$$

Osserviamo che nel nostro caso si ha che $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.
Quindi il problema (2) può essere scritto nella forma:

$$w'(t) = \lambda w(t) + g(t)$$

Per lo studio della assoluta stabilità il termine forzante $g(t)$ non ha influenza. Il metodo di Eulero in avanti è allora assolutamente stabile se

$$h < \frac{2}{|\lambda|} \leq \frac{2}{\max_t |\frac{\partial f}{\partial y}|} = 1$$

3. Per verificare sperimentalmente l'assoluta stabilità del metodo di Eulero esplicito usiamo il codice `eulesp.m`

```
>>t0=0;
>>y0=0;
>>tf=20;
>>f='1-y.^2';
>>h=1.1;
>>[tn11,yn11]=eulesp(t0,y0,tf,h,f);
>>h=0.9;
>>[tn09,yn09]=eulesp(t0,y0,tf,h,f);
>>t=[0:0.1:20];
>>y='(exp(2*t)-1)./(exp(2*t)+1)';
>>fy=eval(y);
>>plot(t,fy,tn11,yn11,tn09,yn09);
>>legend('sol exacta','h=1.1','h=0.9');
```

4. Applichiamo il metodo di Heun al problema modello:
$$\begin{cases} u^*_{n+1} = u_n + h \cdot \lambda u_n \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[\lambda \cdot u_n + \lambda \cdot u^*_{n+1}\right] \end{cases}$$
sostituiamo l'espressione di u^*_{n+1} nella seconda equazione
$$\begin{cases} u^*_{n+1} = (1 + h \cdot \lambda)u_n \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[\lambda \cdot u_n + \lambda \cdot (1 + h\lambda)u_n\right]. \end{cases}$$
Otteniamo:

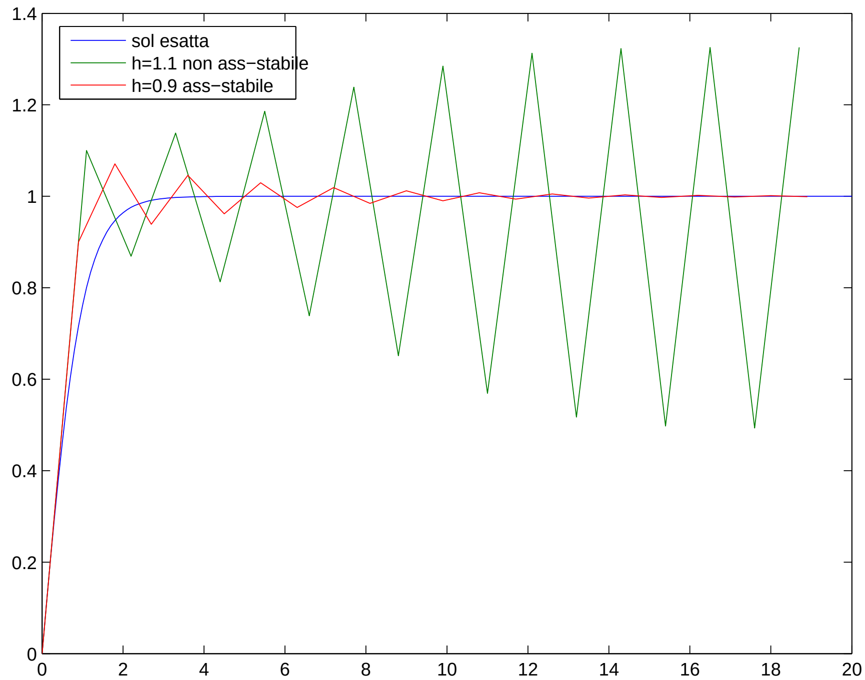

Figura 1: Soluzione esatta e soluzioni numeriche ottenute con il metodo di Eulero in avanti per h differenti.

$$u_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right) u_n$$

Quindi, al passo $n+1$, la soluzione numerica soddisfa

$$u_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right)^n u_0.$$

Un metodo numerico per l'approssimazione del problema modello è assolutamente stabile se $|u_n| \to 0$ per $t_n \to \infty$. Per il metodo di Heun, per avere l'assoluta stabilità dobbiamo impore

$$\left|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right| < 1,$$

ma essendo $1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$ sempre positivo, questa condizione equivale a chiedere che $0 < 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} < 1 \Rightarrow -2 < h\lambda < 0$

Esercizio 2

La soluzione esatta $y = y(t)$ del problema di Cauchy si ottiene per separazione delle variabili

$$\frac{dy}{y} = -2tdt \Rightarrow \log(y) = -t^2 + C \Rightarrow y(t) = e^{-t^2+C}. \tag{3}$$

Il valore della costante C si ottiene imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, da cui

$$y(0) = 1 = e^C \Rightarrow C = 0.$$

La soluzione di (3) è quindi la funzione $y(t) = e^{-t^2}$. Poiché $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, il problema di Cauchy in esame è *asintoticamente stabile*.

Studiamo l'assoluta stabilità dei tre metodi considerati. Anzitutto, è necessario costruire il *problema modello* associato a (3):

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \qquad t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Poiché il problema di Cauchy (3) è asintoticamente stabile, la costante λ sarà negativa. Nel caso in esame, λ si calcola come:

$$\lambda = -\max_{t>0} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = -\max_{t>0} \left|-2\frac{\partial (ty)}{\partial y}\right| = -2\max_{t>0} |-t|.$$

Poiché l'intervallo di integrazione è $(0, 10)$, si ha $\lambda = -20$.

Metodo di EA:
La condizione di assoluta stabilità per il metodo di EA richiede che valga:

$$0 < h < \frac{2}{|\lambda|} \equiv h_0.$$

Nel caso in esame $h_0 = 0.1$. Per verificare sperimentalmente l'assoluta stabilità del metodo usiamo il codice `eulesp`. Abbiamo:

```
>> t0=0; y0=1; tf=10; h=0.1; f='-2*t.*y';
>> [tn, yn] = eulesp (t0, y0, tf, h, f);
>> plot(tn,yn,'bo-'), hold on
>> plot(tn,exp(-tn.^2),'r-')
```

Osserviamo come la soluzione numerica soddisfi la definizione di assoluta stabilità, in quanto

$$\lim_{n \to \infty} |u_n| = 0.$$

Osserviamo inoltre che la successione $\{u_n\}$ generata dal metodo di EA si mantiene limitata, per $n \to \infty$, anche in corrispondenza di valori di h *maggiori* della stima di h_0 precedentemente ottenuta. Ciò si può verificare prendendo ad esempio $h = 0.2$ ed eseguendo le medesime istruzioni `Matlab` di cui sopra. Il motivo di questo comportamento è dovuto al fatto che il valore determinato per h_0 è una stima pessimistica di tale quantità a causa della maggiorazione della derivata $\partial f / \partial y$ sull'intervallo di integrazione temporale.

Metodo di EI:
in questo caso lo schema numerico è incondizionatamente assolutamente stabile. Verifichiamo tale proprietà con le seguenti istruzioni `Matlab`:

```
>> t0=0; y0=1; tf=10; h=0.1; f='-2*t.*y';
>> [tn, yn] = eulimp (t0, y0, tf, h, f);
>> plot(tn,yn,'bo-'), hold on
>> plot(tn,exp(-tn.^2),'r-')
```

Riportiamo in figura 2 il grafico della soluzione esatta (in rosso), sovrapposto ai grafici delle successioni $\{u_n\}$

per $h = 0.5$ (in verde) e $h = 1$ (in blu). I risultati mostrano che il metodo di EI è incondizionatamente assolutamente stabile. Chiaramente, se h diventa grande, la soluzione numerica è poco precisa.

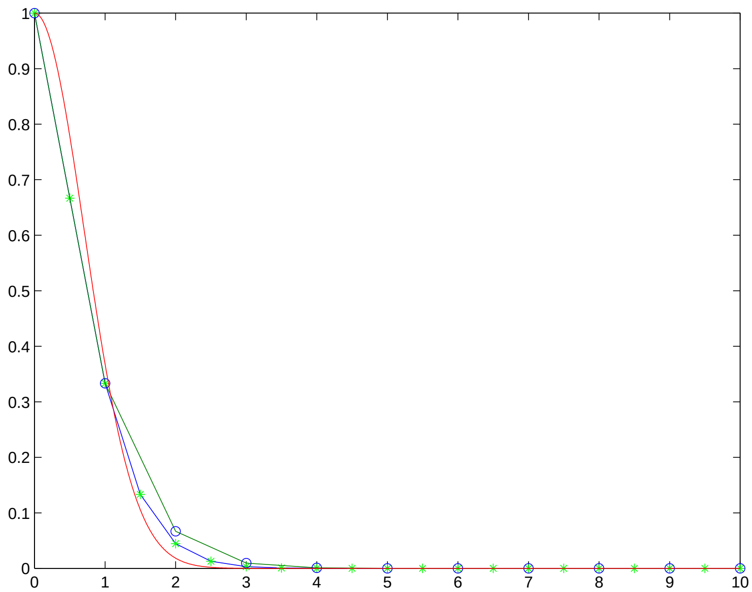

Figura 2: Il metodo di EI.