

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____

Calcolo Numerico - Corsi di Laurea Area Informatica

Docente: P. Causin

Appello 18/01/2006 - 3 Esercizi da svolgere in 2 ore

Per ogni punto degli esercizi seguenti, scrivere, oltre alla soluzione, i principali comandi Matlab utilizzati; tracciare inoltre, se ve ne sono, una copia qualitativa dei grafici ottenuti.

ESERCIZIO 1 [13 punti]

Si consideri il seguente problema ai limiti:

trovare $u(x)$ tale che

$$\begin{cases} -u''(x) + \gamma u = 0, & x \in (0, 1) \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

dove γ è una costante positiva.

Dopo aver introdotto una discretizzazione equispaziata di passo h e $n = 1/h$, si discretizzi il problema (1) con un metodo alle differenze finite, utilizzando un'approssimazione centrata per la derivata seconda.

1. Si scriva l'equazione alle differenze per ciascun nodo interno $j = 1, \dots, n-1$
2. Si scriva (per n generico) la forma della matrice dei coefficienti A e il termine noto b (tenendo conto opportunamente delle condizioni al bordo) del sistema lineare che si ottiene dalla discretizzazione al punto precedente
3. Si considerino i valori $\gamma = 2$ e $n = 20$ e si costruiscano in Matlab la matrice A e il vettore b (per costruire A si utilizzi opportunamente il comando `diag`)
4. Quali sono le caratteristiche del sistema lineare risultante?
5. Sulla base del punto precedente, si utilizzi un opportuno metodo per la risoluzione del sistema lineare e si tracci un grafico della soluzione ottenuta in funzione dell'ascissa x
6. Cosa succede considerando i valori $\gamma = 0.25$ e $n = 20$? Si tracci un grafico della soluzione ottenuta in questo caso, sovrapponendolo al precedente e si commenti il risultato.

ESERCIZIO 2 [10 punti]

Si vuole approssimare l'integrale

$$I_f = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

utilizzando la seguente formula di quadratura

$$I_\gamma = \frac{1}{2}(f(\gamma_0) + f(\gamma_1))$$

con $\gamma_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

1. Si implementi la formula di quadratura qui proposta in un semplice codice Matlab che prenda in ingresso i nodi di quadratura e la funzione data come stringa e restituisca il valore I_γ
2. Si verifichi sperimentalmente utilizzando il codice scritto al punto sopra il grado di esattezza di tale formula.

ESERCIZIO 3 [10 punti]

Si analizzino al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ le proprietà di convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel applicati alla risoluzione di sistemi lineari di matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Si trattino sia le condizioni sufficienti, sia quelle necessarie e sufficienti.