

Laboratorio nr. 7

ESERCIZIO 1.

Si consideri il sistema $Ax = b$, dove A è la matrice di Hilbert di ordine 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

e b è scelto in modo che $b = Ax$, per $x = (1, 1, 1)^T$.

1. Dopo aver costruito in MATLAB la matrice A , se ne calcoli il numero di condizionamento $K(A)$.
2. Si stimi l'errore relativo $\|\delta x\|_2/\|x\|_2$ sulla soluzione x per una perturbazione $\delta b = 10^{-10}(1, 1, 1)^T$, ricordando che

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|(x + \delta x) - x\|_2}{\|x\|_2} \leq K(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}.$$

ESERCIZIO 2.

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Si vuole risolvere tale sistema con il metodo di eliminazione di Gauss (MEG).

1. È possibile portare a termine il MEG senza pivotazione? Perché?

2. Si calcolino con il comando MATLAB `lu` i fattori L e U di A e la matrice di permutazione P . Si verifichi che:
 - (a) L e U sono matrici triangolari inferiori e superiori, rispettivamente; si usi a questo scopo il comando `spy`
 - (b) $\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii}$, $\det(L) = 1$
 - (c) $P^T = P^{-1}$
3. Si scrivano (su carta) tutte le tappe successive della risoluzione del sistema $Ax = b$ utilizzando la fattorizzazione calcolata al punto precedente e si calcoli la soluzione dei due sistemi triangolari con MATLAB.

ESERCIZIO 3.

Si consideri la matrice A (matrice di Hilbert di ordine 10), definita come

```
>> A=hilb(10);
```

e il sistema lineare $Ax = b$, dove b è tale che la soluzione esatta è `x=ones(10,1)`

1. Si verifichi che la matrice A è simmetrica e definita positiva
2. Si può utilizzare la fattorizzazione di Cholesky per fattorizzare A ? Quali sono i vantaggi? Si utilizzi quindi - se possibile - il comando `chol` di matlab (tale comando calcola la matrice R tale che $A = R^T R$) per risolvere il sistema $Ax = b$. Si verifichi la precisione del risultato, calcolando la norma dell'errore relativo.