Esercizio 1. Interpolazione su nodi di Chebyshev e interpolazione composita

1. I nodi di Chebyshev x_k, $k = \overline{0,n}$ vengono calcolati usando la seguente formula:
$$x_k = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2} \ , \ t = -\cos\frac{\pi k}{n}.$$
Nel nostro caso, i nodi di Chebyshev sono:
$x_0 = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2}$, $t = -\cos\left(\frac{0 \cdot \pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow x_0 = 0$
$x_1 = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2}$, $t = -\cos\left(\frac{1 \cdot \pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$
$x_2 = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2}$, $t = -\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}$
$x_3 = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2}$, $t = -\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x_3 = 1$

Dalla teoria, sappiamo che se f è una funzione derivabile con continuità $n+1$ volte in intervallo I contenente tutti i nodi di interpolazione, allora $\forall x \in I$, $\exists \xi \in I$ tale che
$E_n f(x) := f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$.
Quindi $\max_{x \in [0,1]} |E_3 f(x)| \le \frac{1}{4} \cdot \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| \cdot \max_{x \in [0,1]} \left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right|$
$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} \cdot (1+x)^{-7/2} \Rightarrow \max_{x \in I} |f^{(4)}(x)| = \frac{15}{16}$.

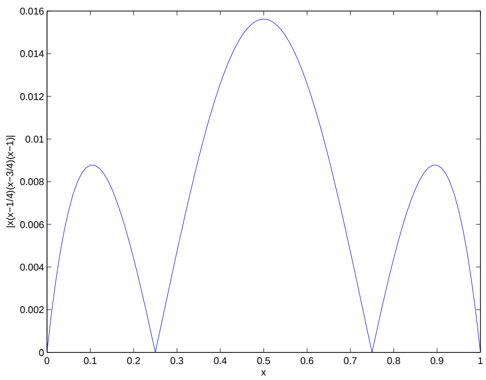

FIG. 1 – $|\omega_4(x)|$

Dal grafico, risulta $\max_{x \in [0,1]} \left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right| < 0.016$.
Possiamo concludere che l'errore commesso è $\le \ \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot 0{,}016 \simeq 3{,}75 \cdot 10^{-3}$

2. Se $f \in \mathcal{C}^2(I)$ con $I = [x_0, x_n]$, allora
$$\max_{x \in I} |f(x) - \Pi_1^c f(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{x \in I} |f''(x)|$$

essendo h la massima ampiezza dei sottointervalli I_i.
Se si vuole interpolare con un interpolante composito lineare con un errore minore di $3.75 \cdot 10^{-3}$, dobbiamo scegliere un passo h tale che $\frac{h^2}{8} \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| \leq 3.75 \cdot 10^{-3}$.

Per la nostra funzione, $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$,
$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$. Quindi $\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \frac{1}{4}$ e

$\frac{h^2}{8} \cdot \frac{1}{4} \leq 3{,}75 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow h^2 \leq 30 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow h \approx 0.1732.$

3.

```
>> h=sqrt(30e-3)
h =0.17320508075689
>> x=[0:h:1];
>> y=sqrt(1+x);
>> xi=[0:0.001:1];
>> yi=interp1(x,y,xi);
>> f='sqrt(xi+1)';
>> fx=eval(f);
>> norm(fx-yi,inf)
ans =8.296621376202573e-004
```

4.

$$\prod_1^c f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),\ x \in I_i = [x_i,x_{i+1}].$$

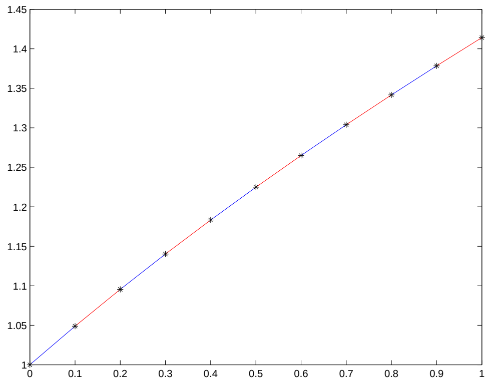

Fig. 2 – $h = 0.1$

Esercizio 2. Minimi quadrati

1.

$$D = (n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{D}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i)\right)\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{D}\left[(n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\right)\right]$$

```
>>format long
>>n=5;
>>x=[-4.5,-3.2,-1.4,0.8,2.5,4.1];
>>y=[0.7,2.3,3.8,5.0,5.5,6.6];

>>D=(n+1)*sum(x.^2)-(sum(x))^2;
>>a0=(sum(y)*sum(x.^2)-sum(x)*sum(x.*y))/D;
>>a1=((n+1)*sum(x.*y)-sum(x)*sum(y))/D;


>>f1='a0+a1*x1'; x1=[-4.5:0.1:4.1]; f1x=eval(f1);
>>plot(x,y,'ob',x1,f1x,'r');
>>legend('plot(x,y)','retta diregressione',4);
```

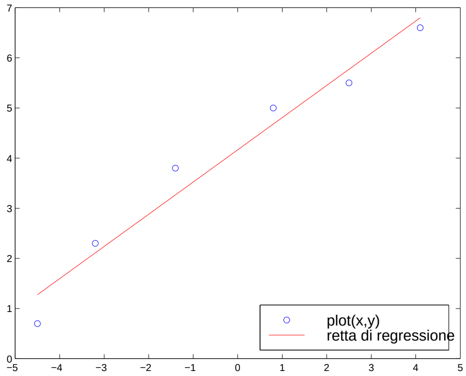

Fig. 3 – *retta di regressione*

2. Il grafico del polinomio $\widetilde{f}_2(x) = 4.5752 + 0.6217x - 0.0444x^2$ è tracciato in rosso.

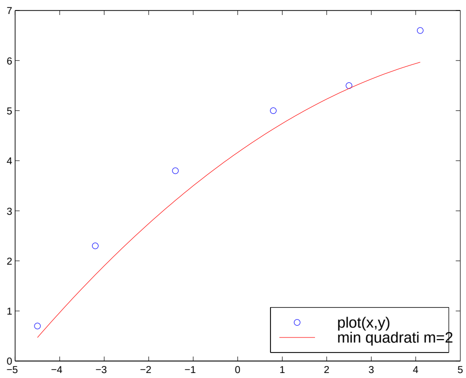

Fig. 4 – *Aprossimazione nel senso dei minimi quadrati, $m = 2$*

3. $\Phi_2 = 0.26875622780400$, $\Phi_1 = 0.86767342295141$, quindi il polinomio ai minimi quadrati di ordino 2 fornisce un'approssimazione migliore.
4. La retta di regressione lineare ha equazione generica $(d): \ y = a_0 + a_1 x$. Vogliamo verificare che il punto di coordinate (x^*,y^*) appartiene alla retta (d). Questa significa che le coordinate (x^*,y^*) soddisfano la relazione $y^* = a_0 + a_1 x^*$.

   Quindi, poichè $x^* = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n} x_i$, $y^* = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n} y_i$

   $a_0 + a_1 x^* =$

   $$\frac{1}{D}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i)\right)\right] +$$

   $$+\frac{1}{D}\left[(n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i\right) =$$

$$= \frac{1}{D}\left[\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{D}\frac{1}{n+1} D \sum_{i=0}^{n} f(x_i) = y^*$$

L'approssimazione nel senso dei minimi quadrati rinuncia alla richiesta fondamentale dell'interpolazione (dati (x_i,y_i), $i = \overline{0,n}$ trova f tale che $f(x_i) = y_i$) però esiste un punto (x^*,y^*), in cui la richiesta fondamentale dell'interpolazione è soddisfatta, cioè $\widetilde{f}(x^*) = y^*$.

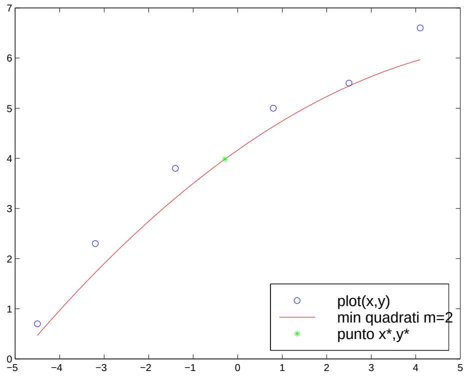

FIG. 5