Preparazione alla II Prova in Itinere

Esercizio 1. (Risoluzione di sistemi lineari. Metodi diretti)
Si consideri la seguente matrice

$$A_\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1-\epsilon & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

1. Per quale valore di ϵ è possibile calcolare la fattorizzazione di Cholesky di A? Sia ϵ^* tale valore; in corrispondenza di esso, si calcolino i fattori di Cholesky della matrice con il comando `chol` di Matlab, utilizzandoli quindi per risolvere il sistema lineare $A_{\epsilon^*}x = b$, con `b=A*ones(3,1)` .
2. Si prenda $\epsilon = \epsilon^*$; usando opportunamente i fattori di Cholesky di A_{ϵ^*} trovati al punto precedente, si proponga un metodo per calcolare l'inversa di A_{ϵ^*}.

Esercizio 2. (Risoluzione di sistemi lineari. Metodi iterativi)
Si consideri il sistema lineare $A_\epsilon \mathbf{x} = \mathbf{b}_\epsilon$, dove

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} (-2+\epsilon) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (-2+\epsilon) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (-2+\epsilon) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (-2+\epsilon) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (-2+\epsilon) \end{pmatrix},$$

e dove $\mathbf{b}_\epsilon$ è scelto in modo tale che $b_\epsilon = A_\epsilon \cdot (1, 1, \ldots, 1)^T$

1. Si costruisca la famiglia di matrici A_ϵ per $\epsilon = [0 : 0.1 : 0.5]$, utilizzando opportunamente il comando Matlab `diag` e successivamente costruire il termine $\mathbf{b}_\epsilon$ corrispondente.
2. Si disegni il grafico del raggio spettrale delle matrici di iterazione del metodo di Jacobi $B_J(\epsilon) = D_\epsilon^{-1}(E_\epsilon + F_\epsilon)$ e del metodo di Gauss-Seidel $B_{GS}(\epsilon) = (D_\epsilon + E_\epsilon)^{-1}F_\epsilon$. Per il calcolo di D_ϵ^{-1} e di $(D_\epsilon + E_\epsilon)^{-1}$, si utilizzi il comando `inv` di Matlab. Cosa si osserva in relazione alla velocità di convergenza dei due metodi?
3. Si verifichino i risultati ottenuti al punto 2., utilizzando il programma `itermeth.m` . Si scelga `nmax=1000,` `toll=1e-6` e si considerino i valori $\epsilon = [0.15, 0.2, 0.3]$.

Esercizio 3. (Risoluzione di sistemi lineari. Metodi iterativi)
Per la soluzione del sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

si consideri il seguente metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = B(\theta)x^{(k)} + g(\theta),\ k \geq 0$$

con $x^{(0)}$ dato dove θ è un parametro reale e

$$B(\theta) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2\theta^2 + 2\theta + 1 & -2\theta^2 + 2\theta + 1 \\ -2\theta^2 + 2\theta + 1 & 2\theta^2 + 2\theta + 1 \end{bmatrix} \quad g(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \end{bmatrix}$$

1. Si verifichi che il metodo è consistente $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$
2. Si determinino quindi i valori di θ per il quale il metodo è convergente.
3. Si calcoli il valore ottimale del parametro θ

Esercizio 4. (Approssimazione di problemi ai limiti)
Consideriamo il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + \frac{k}{T} u(x) = \frac{1}{T} f(x), \ x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove $u(x)$ rappresenta lo spostamento verticale di una fune lunga 1 metro, soggetta ad un carico transversale di intensità $f(x)$ per unita di lunghezze. T è la tensione e k il coeficiente di elasticità della fune. Si prendano $f(x) = 1 + sin(4\pi x),\ T = 1$ e $k = 0.1$

1. Si discretizzi (1) con un metodo alle differenze finite centrate, introducento una discretizzazione equispaziata di passo h
2. Si scriva (per $n \equiv 1/h$ generico) la matrice dei coefficienti A e il termine noto b (tenendo conto opportunamente delle condizioni al bordo).
3. Per $h = 1/j,\ j = 10,\ 20,\ 40$ si costruiscano in MATLAB la matrice A e il vettore b. Per ogni h, si risolva il sistema con il comando \. Si verifichi sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo. (Come soluzione esatta, consideriamo una soluzione approssimata relativa ad una griglia estremamente fitta, ponendo ad esempio $h = 1e - 4$.)
4. Il metodo di Gauss-Seidel può essere applicato? In caso possitivo, si utilizzi opportunamente la function `itermeth` .

Esercizio 5. (Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie)
Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -te^{-t},\ t \in (0,1) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1. Si calcoli la soluzione analitica di (2), procedendo per separazioni di varabili; si rappresenti graficamente tale soluzione.
2. Si fissi $\Delta t = 0.1$ Si discretizzi (2) usando il metodo di Eulero implicito e si implementi l'opportuno codice MATLAB.
3. Si discretizzi (2) usando il metodo di Crank-Nicholson; si risolva ad ogni passo la risultante equazione nonlineare utilizzando il metodo di Newton (la function `qssnewton`)

Esercizio 6. (Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie)

Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

si consideri la seguente famiglia di metodi (detti θ-metodo):

$$u_{n+1} = u_n + h\theta f(t_{n+1}, u_{n+1}) + h(1-\theta) f(t_n, u_n),$$

dove h è il passo di discretizzazione e $\theta \in [0, 1]$.

1. Si verifichi che:
$$\begin{cases} \theta = 0 & \rightarrow \text{ Eulero esplicito} \\ \theta = 1 & \rightarrow \text{ Eulero implicito} \\ \theta = \frac{1}{2} & \rightarrow \text{ Crank-Nicolson} \end{cases}$$

2. Sia ora λ un parametro reale negativo assegnato. Si consideri il problema modello:
$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

   (a) si scriva il θ-metodo per la discretizzazione del problema modello e la si ponga nella forma
   $$u_{n+1} = G(h\lambda; \theta) u_n = (G(h\lambda; \theta))^n y_0$$

   (b) si scriva la condizione su $G(h\lambda; \theta)$ che permette di ottenere la stabilità assoluta del metodo. Si trovi la limitazione corrispondente su h in funzione di θ.

   (c) si ritrovino, a partire dal risultato del punto precedente, le condizioni di stabilità assoluta per Eulero esplicito, Eulero implicito e Crank-Nicolson.