Esercizio 1. Risoluzione di sistemi non lineari

1. Per trovare un'espressione esplicita del tipo $y = g(x)$, procediamo nel seguente modo:

$$e^{x+y} - 1 = 0 \rightarrow e^{x+y} = 1 \rightarrow e^{x+y} = e^0.$$

Poiché l'esponenziale è una funzione biettiva, abbiamo che

$$x + y = 0 \rightarrow y = -x.$$

Quindi, la prima equazione del sistema può essere scritta come $y = g_1(x)$, con $g_1(x) = -x$.

Per la seconda equazione del sistema procediamo analogamente:

$$e^{x-y} - 1 = 0 \rightarrow e^{x-y} = 1 \rightarrow e^{x-y} = e^0,$$

e quindi

$$x - y = 0 \rightarrow y = x.$$

La seconda equazione del sistema può essere dunque scritta come $y = g_2(x)$, con $g_2(x) = x$.

Da queste considerazioni, deduciamo facilmente che la soluzione esatta del problema è $(x^*, y^*) = (0, 0)$.

Per tracciare in MATLAB il grafico di $g_1(x)$ e $g_2(x)$, scriviamo

```
>> x=-5:0.01:5;
>> plot(x,-x,'r-',x,x,'g-');
>> grid
```

2. Il sistema può essere scritto in forma astratta come $F(x) = 0$, dove la funzione F è definita da $\mathbf{R}^2$ a valori in $\mathbf{R}^2$, e
$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, con $f_1(x) = e^{x+y} - 1,\ f_2(x) = e^{x-y} - 1$.
L'espressione dello Jacobiano di $F(x)$ è
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

3. Il metodo di Newton applicato alla risoluzione del sistema è
$$J(x^k, y^k) \begin{pmatrix} \delta x^k \\ \delta y^k \end{pmatrix} = -F(x^k, y^k),$$
dove abbiamo definito $\delta x^k = (x^{k+1} - x^k)$, $\delta y^k = (y^{k+1} - y^k)$.

4. La prima iterazione del metodo di Newton è
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{e}^3 & \mathrm{e}^3 \\ \mathrm{e}^{-1} & -\mathrm{e}^{-1} \end{bmatrix}}_{J(x^0,y^0)} \begin{pmatrix} \delta x^0 \\ \delta y^0 \end{pmatrix} = \underbrace{-\begin{pmatrix} \mathrm{e}^3 - 1 \\ \mathrm{e}^{-1} - 1 \end{pmatrix}}_{-F(x^0,y^0)}$$
La soluzione di questo sistema (2×2) (che in questo semplice caso possiamo calcolare esattamente a mano), è
$$\delta x^0 = 0.3840,\ \delta y^0 = -1.3342,$$
da cui
$$x^1 = x^0 + \delta x^0 = 1.3840,\ y^1 = y^0 + \delta y^0 = 0.6657.$$

5. Risolviamo numericamente il sistema con MATLAB

```
>>f1='exp(x(1)+x(2))-1';
>>f2='exp(x(1)-x(2))-1';
>>J11='exp(x(1)+x(2))';
>>J12='exp(x(1)+x(2))';
>>J21='exp(x(1)-x(2))';
>>J22='-exp(x(1)-x(2))';
>>x0=[1;2];
>>nmax=100;
>>toll=1e-4;
>>[xr,nit]=...
qssnewtonxsys(x0,toll,nmax,f1,f2,J11,J12,J21,J22);

Numero di Iterazioni : 7
 x(1) =   0.00000000
 x(2) =   0.00000000

xr =

   1.00000000000000   2.00000000000000
   1.38403444841345   0.66575261995441
   0.69221025689286   0.48633912971456
   0.25304164125157   0.23323255006697
   0.05069114129085   0.05049623036854
   0.00247553398676   0.00247551499286
```

```
0.00000611812030    0.00000611812030
0.00000000003743    0.00000000003743
```

```
nit = 8
```

Osserviamo che la seconda riga del vettore `xr` fornisce il vettore (x^1, y^1) (da confrontarsi con il risultato al punto precedente, dove abbiamo risolto esattamente e non numericamente il sistema $J(x^0, y^0)\delta = -F(x^0, y^0)$).

Esercizio 2. Interpolazione di Lagrange

1. L'interpolante $\Pi_2 f$ della funzione $f(x)$ è un polinomio del secondo grado che passa per i punti: $(0, 1)$, $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2})$, $(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2})$.
2. L'espressione dei polinomi di Lagrange $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ è

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - \frac{1}{3}\pi)(x - \frac{2}{3}\pi)}{(0 - \frac{1}{3}\pi)(0 - \frac{2}{3}\pi)} =$$

$$= \frac{9}{2\pi^2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - \frac{2}{3}\pi)}{(\frac{1}{3}\pi - 0)(\frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi)} =$$

$$= -\frac{9}{\pi^2} x \left(x - \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{3}\pi)}{(\frac{2}{3}\pi - 0)(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi)} =$$
$$= \frac{9}{2\pi^2} x \left(x - \frac{1}{3}\pi \right)$$

La derivata prima di L_0 è $L_0' = \frac{9}{\pi^2}x - \frac{9}{2\pi}$, quindi $x = \frac{1}{2}\pi$ è il punto di minimo per L_0, nell'intervallo $[0, \frac{2}{3}\pi]$. La derivata seconda $L_0''(x) = \frac{9}{\pi^2}$ è strettamente positiva, quindi L_0 è convessa e non ha punti di flesso.

La derivata prima di L_1 è $L_1' = -\frac{18}{\pi^2}x + \frac{6}{\pi}$, quindi $x = \frac{1}{3}\pi$ è il punto di massimo per L_1, nell'intervallo $[0, \frac{2}{3}\pi]$. La derivata seconda $L_1''(x) = \frac{18}{\pi^2}$ è strettamente negativa, quindi L_1 è concava e non ha punti di flesso.

La derivata prima di L_2 è $L_2' = \frac{9}{\pi^2}x - \frac{3}{2\pi}$, quindi $x = \frac{1}{6}\pi$ è il punto di minimo per L_2, nell'intervallo $[0, \frac{2}{3}\pi]$. La derivata seconda $L_2''(x) = \frac{9}{\pi^2}$ è strettamente positiva, quindi L_2 è convessa e non ha punti di flesso. Osserviamo inoltre che L_0 e L_2 sono simmetriche rispetto ad un asse verticale che passa per il punto medio dell'intervallo $[0, \frac{2}{3}\pi]$.

3. $\Pi_2 f(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) L_i(x) = -\frac{9x^2 + 3x\pi - 4\pi^2}{4\pi^2}$

4. Calcoliamo l'errore di interpolazione puntuale

$$\Pi_2 f(1) = -\frac{9+3\pi-4\pi^2}{4\pi^2} \simeq 0.53329492216690,$$
$$\cos(1) = 0.54030230586814,$$

per cui l'errore è $|\Pi_2 f(1) - \cos(1)| \simeq 0.007$.

5. Calcoliamo l'errore di interpolazione in norma infinito

```
>> xnodes=[0 pi/3 2*pi/3]';
>> fnodes=[1 1/2 -1/2]';
>> xv=[0:0.001:2*pi/3]';
>> px=qsslagrange(xnodes,fnodes,xv);
>> fx=eval('cos(xv)');
>> err=norm(fx-px,inf)
err =0.06458828758888
```

Nota: alternativamente all'uso della function `qsslagrange` potevamo costruire esplicitamente il polinomio di interpolazione basandoci sull'espressione della base di Lagrange calcolata al punto 2.

6. • nodi equispaziati

```
>> f='cos(x)';
>> [xnodes, fnodes,x,fx,px]=qssinterpol(0,2*pi/3,5,1,f);
>> err1=norm(fx-px,inf)
err1 = 7.455127189726074e-005
```

• nodi di Chebyshev

```
>> [xnodes, fnodes,x,fx,px]=qssinterpol(0,2*pi/3,5,2,f);
>> err2=norm(fx-px,inf)
err2 = 3.438445208603369e-005
```

7. Per i nodi $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}\pi, x_2 = \pi$ i polinomi di Lagrange sono:
$L_0(x) = \frac{2}{\pi^2}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)(x-\pi)$,
$L_1(x) = -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)$,
$L_2(x) = \frac{2}{\pi^2}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\Pi_2 f(x) = \cos(0) \cdot L_0 + \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) \cdot L_1 + \cos(\pi) \cdot L_2 =$$
$$= L_0 - L_2 = -\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right).$$

Per questa scelta dei nodi, l'interpolante è dunque un polinomio di primo grado, che può essere visto come una parabola degenere. Usando questi nodi per approssimare il valore cos(1), si osserva che l'errore

$$\|f(x) - \Pi_2 f(x)\|_\infty$$

è più grande rispetto all'errore ottenuto al punto 5.

```
>> xnodes=[0 pi/2 pi]';
>> fnodes=[1 0 -1]';
```

```
>> xv=[0:0.001:pi]';
>> fx=eval('cos(xv)')';
>> px=qsslagrange(xnodes,fnodes,xv);
>> err=norm(fx-px,inf)
err = 0.21051365793074
```