Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: ________

Calcolo Numerico - Corsi di Laurea Area Informatica
Docente: P. Causin
Appello del 20/07/2006 - 3 Esercizi da svolgere in 2 ore

Per ogni punto degli esercizi seguenti, scrivere, oltre alla soluzione, i principali comandi Matlab utilizzati; tracciare inoltre, se ve ne sono, una copia qualitativa dei grafici ottenuti.

ESERCIZIO 1 [10 punti]

Sia A la matrice $\in \mathbb{R}^{10\times 10}$ definita come $A = \text{pentadiag}(-1,-1,12,-1,-1)$ e sia $\mathbf{b} = (1,1,1,1,1,0,0,0,0,1)^T$.

Per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ si consideri il seguente metodo iterativo per $k \geq 0$

$$(D+M)\mathbf{x}^{(k+1)} = -N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \tag{1}$$

dove $A = D+M+N$, con $D = \text{diag}(10,\dots,10) \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, $M = \text{pentadiag}(-1,-1,1,0,0) \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ e $N = M^T$.

1. Si scriva l'espressione matematica della matrice di iterazione B e del termine noto $\mathbf{g}$ del metodo (1), tali che
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g} \tag{2}$$
2. Quanto vale il raggio spettrale ρ di B? Quale è la condizione necessaria e sufficiente affinché il metodo (2) sia convergente? Essa è soddisfatta nel presente caso?
3. Si calcoli l'iterata $\mathbf{x}^{(4)}$ prodotta da (2), partendo da un vettore $\mathbf{x}^{(0)}$ nullo.

SOLUZIONE

1. definiamo le matrici $A,\ M,\ N,\ D$ e il vettore b :

```
A=diag(-ones(8,1),-2)+diag(-ones(9,1),-1)+...
  diag(12*ones(10,1),0)+diag(-ones(9,1),1)+diag(-ones(8,1),2);
b=[1,1,1,1,1,0,0,0,0,1]';
D=diag(10*ones(10,1));
M=diag(-ones(8,1),-2)+diag(-ones(9,1),-1)+diag(1*ones(10,1),0);
N=M';
```

La matrice di iterazione è $B = -(D+M)^{-1}N$ e il termine noto $g = (D+M)^{-1}b$.

2. Usando Matlab, il raggio spettrale di si calcola come segue

```
B=-inv(D+M)*N;
RaggioSpettrale=max(abs(eig(B)))
RaggioSpettrale =

    0.1191
```

Un metodo iterativo è convergente se e solo se il raggio spettrale della matrice di iterazione è minore di 1. Nel nostro caso $\rho(B) = 0.1191$ quindi il metodo è convergente.

3.
```
x=zeros(10,1);
g=inv(D+M)*b;
for i=1:4
    x=B*x+g;
end
```

$$x = \begin{bmatrix} 0.1026 \\ 0.1112 \\ 0.1193 \\ 0.1130 \\ 0.1054 \\ 0.0201 \\ 0.0121 \\ 0.0105 \\ 0.0090 \\ 0.0850 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2 [12 punti]

Si voglia approssimare l'integrale (il cui valore esatto è riportato tra parentesi)

$$I = \int_{-5}^{5} \frac{1}{1+x^2}\, dx \qquad (= \text{atan}(5) - \text{atan}(-5))$$

1. Si scriva una function che, partendo da un numero di sottointervalli $m = 1$, approssimi I con la formula dei *trapezi composito* e iterativamente raddoppi il numero di sottointervalli $m \to 2m$ fino a che la quantità $|I_{2m} - I_m|$, che rappresenta una stima dell'errore vero, sia minore della soglia `toll=1e-6`.
2. Si verifichi se l'approssimazione ottenuta con l'algoritmo precedente produce un errore vero che è effettivamente inferiore alla precisione richiesta. Quante iterazioni $m \to 2m$ sono necessarie?

SOLUZIONE

1.
```
function [Im,m,iter]=trapezc(a,b,fun,toll)
m=1;
iter=1;
Im=(b-a)/2*(fun(a)+fun(b));
err=1;
while (err>toll)
    m=2*m;
    h=(b-a)/m;
    x=[a:h:b];
    dim=max(size(x));
    y=fun(x);
    I2m=h*(0.5*y(1)+sum(y(2:m))+0.5*y(m+1));
    err=abs(Im-I2m);
```

```
    Im=I2m;
    iter=iter+1;
end;

>> [Im,m,iter]=trapezc(-5,5,inline('1./(1+x.^2)','x'),1e-6)

Im =

    2.7468


m =

        1024


iter =

    11

>> abs(atan(5)-atan(-5)-Im)

ans =

  2.3513e-007
```

ESERCIZIO 3 [11 punti]

Sia data la funzione

$$f(x) = \sin(x)$$

e i nodi equispaziati

$$x_0 = 0,\ x_1 = \pi/4,\ x_2 = \pi/2,\ x_3 = 3\pi/4,\ x_4 = \pi.$$

1. Si vuole interpolare f con un interpolante composito lineare. Si studi teoricamente l'errore commesso.
2. Si costruisca con il comando `interp1` l'interpolante composito $\mathrm{I}_1^c f$ e lo si rappresenti in un grafico.
3. Usando i comandi `polyfit` e `polyval` si approssimi f nel senso dei minimi quadrati, con la retta di regressione lineare $T_1(x)$.
4. Si calcoli l'errore commesso

   $$\max_x |f(x) - \mathrm{I}_1^c f(x)|,\ \max_x |f(x) - \mathrm{T}_1(x)|$$

   utilizzando l'interpolante composito e l'interpolazione ai minimi quadrati, rispettivamente. Cosa si osserva?

SOLUZIONE

1. Se $f \in \mathcal{C}^2(I)$ con $I = [x_0, x_n]$, allora

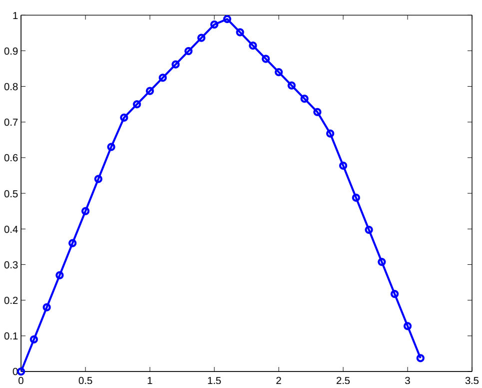
$$Errore := \max_{x \in I} |f(x) - \Pi_1^c f(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in I} |f''(x)|$$

   essendo h la massima ampiezza dei sottointervalli I_i. Nel nostro caso, $h = \pi/4$ e $f''(x) = -\sin(x)$; quindi $Errore \leq \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \max_{x \in [0,\pi]} |-\sin(x)| = 0.0771$

2.
```
xi=[0 pi/4 pi/2 3*pi/4 pi];
f=inline('sin(x)','x');
yi=f(xi);
h=0.1;
x=[0:h:pi];
y=interp1(xi,yi,x);

err_interp1=max(abs(y-f(x)));

plot(x,y,'bo-','LineWidth',2);
```

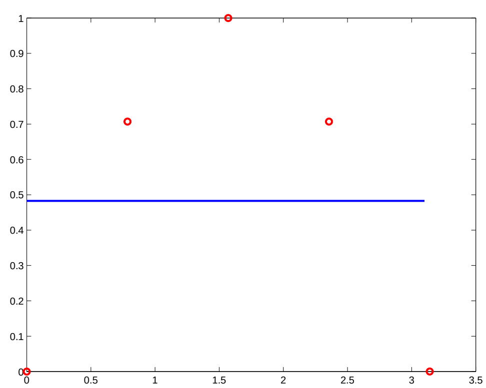


3.
```
p=polyfit(xi,yi,1);
y=polyval(p,x);

errMinQuad=max(abs(y-f(x)));

plot(x,y,'b',xi,yi,'ro','LineWidth',2);
```

4.
```
errMinQuad=0.5167
err_interp1=0.0703
```


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5