Cognome: ____________ Nome: ____________ Matricola: ________

Calcolo Numerico - Corsi di Laurea Area Informatica
Docente: P. Causin
Appello del 07/11/2006 - 3 Esercizi da svolgere in 2 ore

Per ogni punto degli esercizi seguenti, scrivere, oltre alla soluzione, i principali comandi Matlab utilizzati; tracciare inoltre, se ve ne sono, una copia qualitativa dei grafici ottenuti.

ESERCIZIO 1 [11 punti]

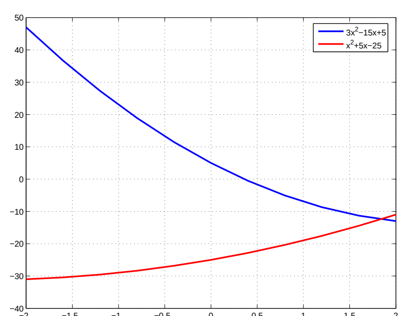
Siano assegnate le seguenti curve

$$y_1(x) = 3x^2 - 15x + 5, \quad y_2(x) = x^2 + 5x - 25,$$

e sia A l'area della regione compresa tra le due curve nell'intervallo $[-2, 2]$.

1. Si calcoli A usando opportunamente il metodo di quadratura di Simpson composito. Si può assumere tale valore come esatto? Perché?
2. Si usi opportunamente il metodo di quadratura dei trapezi composito per approssimare A. Si determini sperimentalmente il numero di intervalli di integrazione n_t necessari affinché l'errore commesso sia inferiore a 10^{-3}
3. Si usi opportunamente il metodo di quadratura del punto medio composito per approssimare A. Si determini sperimentalmente il numero di intervalli di integrazione n_m necessari affinché l'errore commesso sia inferiore a 10^{-3}.
4. Si commenti la differenza tra n_t e n_m, basandosi sulle stime dell'errore di quadratura conosciute

Soluzione



1. L'area della regione compresa tra $y_1(x) = 3x^2 - 15x + 5$ e $y_2(x) = x^2 + 5x - 25$ si calcola con la formula

$$A = \int_{-2}^{2} |(y_1(x) - y_2(x))| dx.$$

```
function f=fun(x);
f=inline('abs((3*x.^2-15*x+5)-(x.^2+5*x-25))','x');

function int=simpson(a,b,m,fun)
h=(b-a)/m;
x=[a:h/2:b];
dim=max(size(x));
y=fun(x);
if(size(y)==1)
    y=diag(ones(dim))*y;
end;
int=(h/6)*(y(1)+2*sum(y(3:2:2*m-1))+4*sum(y(2:2:2*m))+y(2*m+1));
```

Il metodo di Simpson ha il grado di esatteza 3; stiamo approssimando l'integrale di un polinomio del secondo grado con un metodo che ha grado di esatezza 3, quindi il valore della area A calcolata con il metodo di Simpson è esatto. La formula di quadratura di Simpson composito è:

$$I_{2m}(f) = \frac{H}{6}\left\{ f(x_0) + 2\sum_{r=1}^{m-1} f(x_{2r}) + 4\sum_{s=0}^{m-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2m}) \right\},$$

dove i nodi di quadratura sono $x_k = a + kH/2$, per $k = 0, \ldots, 2m$ e $H = (b-a)/m$.

2. La formula del trapezio composita è

$$I_{1,m} = \frac{H}{2}\sum_{k=0}^{m-1} \left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right)$$

dove i nodi di quadratura sono: $x_k = a + kH$, $k = 0, \ldots, m$ e $H = (b-a)/m$. L'errore di quadratura associato è dato da

$$E_{1,m}(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f''(\xi),$$

purchè $f \in C^2(a,b)$ ed essendo $\xi \in (a,b)$.

```
function [int,m]=trapezc(a,b,fun,ValoreEsatto)
m=1;
err=1;
while (err>1e-3)
    m=m+1;
    h=(b-a)/m;
    x=[a:h:b];
    dim=max(size(x));
    y=fun(x);
    int=h*(0.5*y(1)+sum(y(2:m))+0.5*y(m+1));
    err=abs(int-ValoreEsatto)
end;
```

```
>> [int,m]=trapezc(-2,2,fun,130.9941)

int =

  130.9950


m =

   148
```

3. La formula del punto medio composita è

$$I_{0,m} = H \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k),$$

dove i nodi di quadratura sono $x_k = a + (2k+1)H/2$, per $k = 0, \ldots, m-1$, $H = (b-a)/m$. L'errore di quadratura è

$$E_{0,m} = \frac{b-a}{24} H^2 f''(\xi)$$

purchè $f \in C^2(a,b)$ ed essendo $\xi \in (a,b)$.

```
function [int, m]=midpntc(a,b,fun,ValoreEsatto)
m=1;
err=1;
while(err>1e-3)
    m=m+1;
    h=(b-a)/m;
    x=[a+h/2:h:b];
    dim=max(size(x));
    y=fun(x);
    int=h*sum(y);
    err=abs(int-ValoreEsatto);
end;
```

```
>> [int, m]=midpntc(-2,2,fun,130.9941)

int =

  130.9931


m =

   120
```

4. Osserviamo che il metodo del punto medio ha bisogno di un numero minore di intervalli ciò è dovuta alla migliore costante dell'errore ($\frac{1}{24}$ contro $\frac{1}{12}$) rispetto al metodo dei trapezi.

ESERCIZIO 2 [11 punti]

Per la risoluzione del sistema lineare a blocchi (dove cioè A_1, A_2, B sono matrici quadrate)

$$\begin{bmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

si consideri il seguente metodo iterativo:

$$\begin{cases} A_1 x^{(k+1)} + B y^{(k)} = b_1 \\ B x^{(k+1)} + A_2 y^{(k+1)} = b_2. \end{cases} \tag{2}$$

1. Supponendo che A_1 e A_2 siano invertibili, dopo aver ricavato dalla prima equazione l'esspressione di $x^{(k+1)}$ in funzione di $y^{(k)}$ e di averla sostituito nella seconda equazione, si scriva il metodo (2) nella forma

   $$P y^{(k+1)} = N y^{(k)} + b.$$

   Attenzione alle moltiplicazioni tra matrici.
2. Si enunci la condizione sufficiente per la quale il metodo è convergente
3. Si scriva un pseudoalgoritmo per risolvere il siistema (1) con il metodo (2).

Soluzione

1. - dalla prima equazione otteniamo:

     $$A_1 x^{(k+1)} = b_1 - B y^{(k)} \iff x^{(k+1)} = A_1^{-1}\left(b_1 - B y^{(k)}\right)$$

   - sostituisco l'espressione di $x^{(k+1)}$ nella seconda equazione

     $$B\left(A_1^{-1}(b_1 - B y^{(k)})\right) + A_2 y^{(k+1)} = b_2$$

   - faccio i conti

     $$A_2 y^{(k+1)} = B A_1^{-1} B y^{(k)} + b_2 - B A_1^{-1} b_1$$

   - quindi

     $$P = A_2, \qquad N = B A_1^{-1} B$$

2. La condizione necessaria e sufficiente per la quale il metodo (2) è convergente:

   $$\rho(P^{-1}N) < 1$$

3. pseudo-algoritmo Matlab:
   $x^{(k+1)} = A_1 \backslash \left(b_1 - By^{(k)}\right)$
   $y^{(k+1)} = A_2 \backslash (b_2 - Bx^{(k+1)})$

ESERCIZIO 3 [11 punti]

Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) = -10y(t), & t \in (0, 2], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(t) = \mathrm{e}^{-10t}$. Per l'approssimazione di tale problema, si consideri lo schema del punto medio

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n),$$

dove h è il passo uniforme di discretizzazione in tempo.

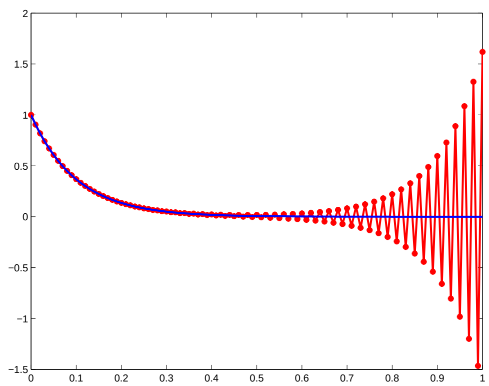
1. Lo schema del punto medio è esplicito o implicito? A quanti passi è?
2. Si scriva un semplice codice Matlab che implementa tale metodo (si prendano le condizioni iniziali $u_0 = 1, u_1 = \mathrm{e}^{-10h}$)

Soluzione

1. Lo schema del punto medio è esplicito, a due passi.
2. ```
   function [u,err]=PuntoMedio(a,b,h)
   t=[a:h:b];
   u(1)=1;
   u(2)=exp(-10*h);

   dim=max(size(t));
   n=2;
   while(n<dim)
       u(n+1)= u(n-1)+2*h*(-10*u(n));
       n=n+1;
   end;

   SolEsatta=exp(-10*t);
   err=max(abs(u-SolEsatta));
   ```
3. Prendendo $h = 1e-1$, il metodo presenta oscillazioni per tempi lunghi. Tale fenomeno si riduce prendendo h più piccoli (provare!)
   ```


2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1