

I CIELI IN UNA STANZA

**Una storia della meccanica celeste dagli epicicli di
Tolomeo ai tori di Kolmogorov**

Bruno Cordani

Proprietà letteraria riservata
© libreriauniversitaria.it edizioni
Webster srl, Padova, Italy

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento totale o parziale con
qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche)
sono riservati per tutti i Paesi.

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, distribuita o trasmessa
in qualsivoglia forma senza l'autorizzazione scritta dell'Editore, a eccezione di
brevi citazioni incorporate in recensioni o per altri usi non commerciali permessi
dalla legge sul copyright. Per richieste di permessi contattare in forma scritta
l'Editore al seguente indirizzo:

libreriauniversitaria.it Editore

Via Stefano Breda, 26
35010 - Limena PD
info@webster.it

ISBN: inserire
Prima edizione: inserire

Il nostro indirizzo internet è:
www.libreriauniversitaria.it

La home page dell'autore è:
<http://www.mat.unimi.it/users/cordani>

Per segnalazioni di errori o suggerimenti relativi a questo volume potete contattare:

Webster srl
Via Stefano Breda, 26
Tel.: +39 049 76651
Fax: +39 049 7665200 35010 - Limena PD
redazione@libreriauniversitaria.it

Indice

Prefazione	v
1 Ascesa e caduta dell'universo geocentrico	1
1.1 La Terra al centro dell'universo	1
1.2 Osservare il cielo con un computer	3
1.3 Il modello tolemaico	5
1.4 Il Sole al centro dell'universo	7
1.5 Ritorno di fiamma del geocentrismo	11
1.6 Digressione sulle coniche	13
1.7 Via gli epicicli, arrivano le ellissi	15
1.8 Eppure si muove!	18
1.9 Sia Newton! E tutto fu luce	21
1.9.1 Spazio e tempo assoluti	23
1.9.2 Vettori, velocità, accelerazione	24
1.9.3 Forza, massa, energia	27
1.9.4 Le tre leggi della meccanica	28
1.9.5 La legge di gravitazione universale	29
2 L'età dell'oro	33
2.1 Le equazioni differenziali	33
2.2 Il problema dei due centri fissi	37
2.3 Le forze apparenti	43
2.4 Il problema circolare ristretto dei tre corpi	47
2.4.1 I punti di equilibrio lagrangiani	48
2.4.2 Stabilità dei punti lagrangiani	51
2.5 Achille, la tartaruga e le serie convergenti	55
2.6 Il problema planetario	58
2.6.1 Il calcolo delle perturbazioni	61
2.6.2 Dove sta Nettuno?	71

2.6.3	Mutamenti climatici: di chi la colpa?	75
3	L'irruzione del caos	83
3.1	I trent'anni che sconvolsero la fisica	83
3.1.1	La relatività ristretta	84
3.1.2	La relatività generale	88
3.1.3	La meccanica quantistica	91
3.2	Poincaré e il problema dei tre corpi	98
3.2.1	Un concorso sbagliato?	98
3.2.2	Il caos e il pendolo	103
3.2.3	L'errore e la scoperta	106
3.2.4	Un caos esemplare	111
3.3	Intermezzo su numeri, tori e insiemi	115
3.3.1	Numeri razionali e irrazionali	115
3.3.2	Il moto lineare sul toro	118
3.3.3	Insiemi di Cantor	121
3.3.4	Crescita e decrescita	123
3.4	La teoria KAM	123
3.4.1	Kolmogorov e la stabilità perpetua	130
3.4.2	Altre dimostrazioni	132
3.4.3	Dentro le risonanze	135
3.4.4	Nekhoroshev e la stabilità esponenziale	136
3.4.5	Tre regimi (non totalitari)	139
3.5	Ordine e caos nel micro e macrocosmo	141
3.5.1	Diagnosi del caos	142
3.5.2	L'atomo di idrogeno in un campo elettrico e magnetico	144
3.5.3	Il sistema solare	148
	Postfazione	155
A	Appendice: Il ferro di cavallo di Smale	161
B	Appendice: Le variabili angolo-azione	169
C	Appendice: Il teorema di Kolmogorov	171
D	Appendice: Il teorema di Nekhoroshev	177

Prefazione

Il cielo stellato sopra di me, la legge morale dentro di me.
– I. KANT Critica della ragion pratica

Che fai tu, luna, in ciel? dimmi, che fai, silenziosa luna?
– G. LEOPARDI Canto notturno di un pastore errante dell'Asia

*Sostenuti, guidati, sembrava, dai numeri, invisibili in quell'ora
ma presenti, gli astri rigavano l'etere con le loro traiettorie esatte.
Fedeli agli appuntamenti le comete si erano abituate a presentarsi
puntuali fino al minuto secondo dinanzi a chi le osservasse.
Ed esse non erano messaggere di catastrofi: la loro apparizione
prevista era anzi il trionfo della ragione umana che si proiettava
e prendeva parte alla sublime normalità dei cieli.*
– G. TOMASI DI LAMPEDUSA Il Gattopardo

La visione notturna della volta celeste ha da sempre riempito di meraviglia e ammirazione ogni essere umano, come è ben testimoniato dal kantiano “cielo stellato sopra di me” o dallo stupore metafisico del leopardiano pastore errante innanzi allo splendore della luna. Eppure dalla contemplazione degli astri può sprigionarsi un altro fascino, più sottile e intellettuale anche se non da tutti immediatamente percepibile, in quanto richiedente, o almeno così sembra, nozioni non banali di fisica e matematica. È il sentimento ben avvertito dal principe di Salina, il protagonista del *Gattopardo*, che nello studio dei cieli non cessa di sorprendersi ogni volta che un corpo celeste si presenta all'appuntamento previsto dalla razionalità umana con la precisione del minuto secondo.

Fascino quindi percepibile inevitabilmente solo da pochi? Siamo ancora una volta di fronte al vecchio e forse fin troppo dibattuto (tanto da apparire ormai un po' logoro) problema delle due culture, quella umanistico-filosofica e quella scientifica? La risposta è negativa: troppe volte si dimentica, o addirittura si ignora, che la storia della scienza, anche di quella fisico-matematica, è essenzialmente storia di idee, concetti, visioni del mondo, doverosamente esprimibili senza ricorrere a

formule astruse e incomprensibili per il non addetto ai lavori. Ovviamente senza ricorrere a formule matematiche non si può sperare di diventare un esperto di meccanica celeste, giacché costui, per definizione, deve essere in grado di risolvere *quantitativamente* problemi concreti e specifici. Ma chi leggerà questo libro con attenzione e anche un po' di impegno non potrà alla fine non provare lo stesso stupore del pastore errante di fronte questa volta al fatto che si possa, nel chiuso della propria stanza e col solo ausilio di carta e penna, giungere a comprendere e prevedere il moto dei cieli.

Come in ogni narrazione storica, anche se di storia delle idee più che dei fatti si tratta, è utile suddividere il periodo considerato, che abbraccia circa due millenni, in sotto-periodi, tre nel nostro caso, scanditi nel passaggio dall'uno all'altro da due autentiche rivoluzioni, riguardanti non solo la meccanica celeste ma la concezione stessa del mondo.

i) Ascesa e caduta dell'universo geocentrico: da Tolomeo (II secolo d.C.) a Newton (1687)

Come è ben noto, nell'antichità classica e durante tutto il medioevo la concezione dominante fu quella geocentrica¹: l'intero cosmo si pensava avesse una struttura a simmetria sferica in cui la nostra Terra occupava una posizione privilegiata, il centro. Non si trattava però di una concezione scientifica nel senso moderno del termine, in quanto non ci si interrogava su leggi naturali e nemmeno si escogitavano esperimenti tesi a convalidarle (o falsificarle). Piuttosto, il mondo e i vari fenomeni che in esso accadevano erano considerati espressione diretta della volontà divina; l'uomo poteva descriverli e tuttalpiù cercare di decifrarne il significato.

Secoli e secoli di osservazioni del cielo, compiute a occhio nudo e senza strumenti di misura, sfociarono infine, nel II secolo dopo Cristo, nel sistema tolemaico che poi dominò incontrastato fino al XVI secolo, quando fu messo in discussione da Copernico. L'idea centrale consiste nell'assumere che i moti naturali e spontanei di un corpo, dovendo rispecchiare la simmetria sferica dell'universo, siano i moti circolari uniformi, cioè i moti su una circonferenza percorsa a velocità costante. Combinando così in maniera ingegnosa questi moti si riesce a dare una descrizione che si accorda molto bene con le osservazioni: ogni pianeta si muove su un cerchio, detto epiciclo, il cui centro si muove a sua volta su un cerchio principale, detto deferente, nel cui centro sta la Terra. Aggiungendo ulteriori epicicli, il cui centro si muove sull'epiciclo precedente, è possibile affinare sempre più la rappresentazione.

¹Ricordiamo che il modello *geocentrico* suppone la Terra immobile al centro dell'universo, mentre quello *eliocentrico* suppone che sia il Sole fisso.

Più o meno vaghi ricordi scolastici, che rinviano a pianeti percorrenti ellissi intorno al Sole, faranno immediatamente – ed erroneamente – apparire questa rappresentazione come strana e sbagliata.

Che essa sia, al contrario, estremamente naturale è provato semplicemente da un'attenta osservazione del moto dei cieli. Per nostra fortuna non abbiamo bisogno al giorno d'oggi di passare innumerevoli notti insonni, come furono costretti a fare gli studiosi del passato. È sufficiente un normale computer e un programma astronomico gratuitamente scaricabile dalla Rete (ne indicheremo esplicitamente uno dei tanti) per potere, con quei pochi comandi che descriveremo, rendersene conto. Per inciso, sarà questa l'occasione per recuperare quell'antico sapere riguardante il moto degli astri, ben noto a qualunque contadino ma oggi divenuto estraneo al moderno abitante delle grandi e inquinate città.

Che inoltre la rappresentazione tolemaica, con la Terra immobile al centro dell'universo, non sia nemmeno sbagliata di certo apparirà ai più sorprendente e per questo la questione andrà meglio chiarita nel corso del libro. Molto brevemente ci limitiamo qui a dire che la centralità del Sole non è una semplice constatazione sperimentale di cui prendere atto – come avviene, ad esempio, per la sfericità della Terra – ma un'affermazione che acquista senso, prima ancora che verità, solo all'interno di una vasta e imponente teoria fisica, quella newtoniana, che ristrutturava radicalmente la nostra visione del mondo. Se infatti quella tolemaica si limita a descrivere l'esistente, la teoria di Newton – che fu preceduta dagli studi fondamentali di Copernico, Galileo e Keplero – penetra molto più a fondo e partendo da due semplici leggi universali *dimostra* matematicamente, oltre a molte altre cose, qual è il moto dei pianeti.

ii) L'età dell'oro: da Newton (1687) a Poincaré (1890)

Con la scoperta delle due leggi fondamentali della meccanica e con il perfezionamento del calcolo infinitesimale, introdotto da Leibniz e Newton stesso, inizia l'età dell'oro della meccanica celeste. Ora i matematici possiedono la soluzione esatta del problema dei due corpi e di conseguenza la soluzione esatta del problema di un numero qualsiasi di pianeti purché, considerando solo l'attrazione del Sole, si trascuri la piccola interazione tra i pianeti stessi. Per tener conto anche di quest'ultima e dato che la soluzione esatta del problema dei tre o più corpi sembra per il momento fuori portata (ma in realtà, come vedremo, lo sarà in un certo senso per sempre), i matematici mettono a punto un metodo detto *perturbativo*. Il metodo è sì approssimato ma tramite i cosiddetti *sviluppi in serie* permette, o almeno così sembra, di avvicinarsi di quanto si vuole alla soluzione esatta, anche se a prezzo di calcoli sempre più lunghi e complicati.

Il metodo comunque funziona straordinariamente bene e in mano a giganti come Eulero, Lagrange e Laplace porta nel giro di un secolo a una teoria matematica che calcola in maniera estremamente aderente alla realtà il moto dei corpi del sistema solare. E un autentico trionfo si celebra nel 1846 quando Adams e Le Verrier, indipendentemente uno dall'altro e grazie anche ad alcune fortunate coincidenze, scoprono col puro calcolo perturbativo l'esistenza del nuovo pianeta Nettuno.

Tutto sembra andare quindi per il meglio anche se un matematico rigoroso farebbe notare a questo punto che nessuno ha mai dimostrato la *convergenza* degli sviluppi in serie perturbativi. In altre parole, nessuno può avere la certezza che, calcolando sempre più termini, a un certo punto dello sviluppo in serie non ci si allontani dalla soluzione esatta, invece che avvicinarsi sempre di più.

Vi è inoltre un secondo scheletro nell'armadio: il problema dei tre corpi. Nessuno è ancora riuscito a trovare la soluzione generale esatta del moto di tre – e a maggior ragione di quattro o più – corpi soggetti ad attrazione gravitazionale newtoniana.

Sembrano però in fondo due problemi marginali, almeno dal punto di vista pratico. Invece saranno proprio loro che, dimostrandosi in un certo qual modo legati, daranno l'avvio alla seconda rivoluzione concettuale che caccerà la meccanica celeste dal paradiso della precisione assoluta.

iii) L'irruzione del caos: da Poincaré (1890) a Kolmogorov (1954), e fino ai giorni nostri

All'inizio del XX secolo due rivolgimenti scuotono le fondamenta stesse delle conoscenze fisiche. La teoria relativistica di Einstein e la meccanica quantistica dimostrano che lo spazio, il tempo, l'energia e la realtà materiale stessa sono profondamente diversi da come appaiono nella vita di tutti i giorni.

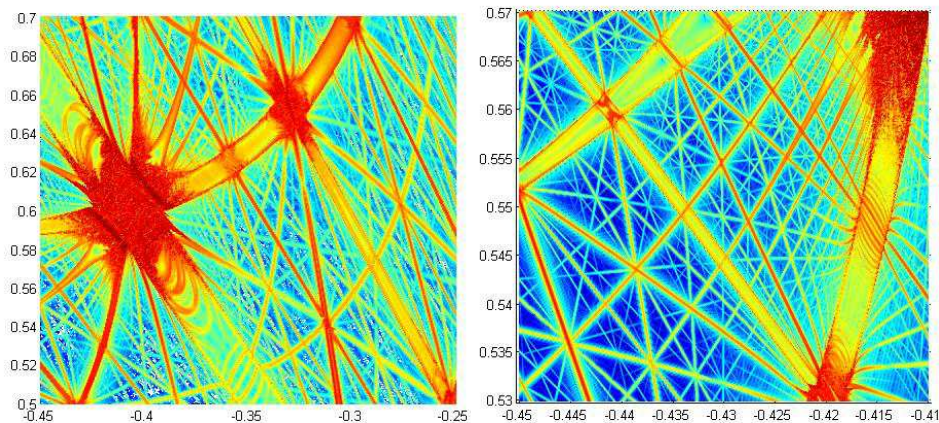
Qualche anno prima uno sconvolgimento di portata analoga era avvenuto nel campo della meccanica celeste: Poincaré, studiando il problema dei tre corpi, si era per la prima volta imbattuto nel caos deterministico, descrivendone perfettamente l'essenza in poche e mirabili pagine (ma dovranno passare circa 70 anni, fino all'avvento dei computer, prima che la comunità scientifica realizzi in pieno il loro significato). Un'immediata conseguenza di tutto ciò è che molto probabilmente gli sviluppi in serie perturbativi *non* sono convergenti.

Siamo così di fronte a una situazione paradossale: da una parte due secoli di successi del metodo perturbativo ne testimoniano la sostanziale validità; dall'altra il risultato di Poincaré non può non minare fortemente la nostra fiducia in esso.

Il dilemma sarà risolto da Kolmogorov che enuncerà nel 1954 uno straordinario teorema insieme alla traccia della sua dimostrazione, completata successivamente da Arnold e Moser. Una buona parte del presente libro sarà dedicata all'illustra-

zione di questo fondamentale teorema, che è sottile e profondo. Per il momento anticipiamo solamente che il punto di partenza è la descrizione del moto dei pianeti non nello spazio fisico usuale ma in uno spazio astratto (potere della matematica!) in cui i pianeti stessi non si muovono lungo ellissi ma si avvolgono “a elica” su tori. Qui per toro non intendiamo ovviamente l’animale ma piuttosto la superficie di una ciambella o di uno pneumatico d’automobile: il termine è chiaramente mutuato dal linguaggio architettonico. Risulta in definitiva che alcuni di questi tori vengono leggermente deformati dall’azione della perturbazione ma topologicamente si conservano, mentre altri vengono distrutti: nel primo caso le serie convergono, nel secondo caso no. Si noti che ogni toro contiene *infinite* orbite fisiche, che condividono tutte il medesimo destino; semplificando, e a costo di qualche imprecisione: moti stabili e ordinati nel primo caso, moti caotici nel secondo.

Ma la sorpresa maggiore deriva dalla constatazione che tori che si conservano e tori che si distruggono sono inestricabilmente mischiati fra di loro, un po’ come i numeri razionali con i numeri irrazionali. Per avere un’idea della complessità coinvolta si considerino le due immagini seguenti, la seconda essendo un piccolo dettaglio della prima: ogni punto rappresenta un toro, il colore blu un toro che si conserva e il colore rosso o giallo un toro che si distrugge. Ebbene, queste figure sono auto-similari, come i frattali: ingrandendo un piccolo dettaglio si ottiene ancora un’immagine dello stesso tipo, e così via all’infinito.



Siamo infine giunti ai giorni nostri. Ormai lo scopo della meccanica celeste non è più, come nell’Ottocento, quello di calcolare le orbite dei pianeti con sempre maggiore precisione (il problema può considerarsi risolto per durate di qualche milione di anni) quanto piuttosto quello di stabilire, ad esempio con figure come quelle mostrate, la distribuzione di ordine e caos all’interno del sistema solare. E infatti quest’ultimo appare sempre meno simile a un meccanismo a orologeria, perfetto ed eternamente immutabile, come si dava per scontato in passato. E

invece sempre più si mostra soggetto a caos diffuso, anche se ben mascherato poiché necessita di parecchie decine di milioni d'anni per manifestarsi, cosicché la speranza di poter dominare per l'eternità la sua evoluzione è perduta per sempre.

I prerequisiti per leggere questo libro sono, tutto sommato, abbastanza limitati e l'aver completato un buon liceo dovrebbe permettere al lettore di seguire almeno il filo logico dell'esposizione. I primi due anni del corso di una laurea scientifica sono poi sicuramente più che sufficienti per una completa comprensione. Nelle quattro Appendici vengono esposti alcuni argomenti a un livello matematico superiore; seppure non esaustive, le dimostrazioni ivi contenute possono servire come introduzione allo studio approfondito della letteratura scientifica pertinente. Si tenga in ogni caso presente che i dettagli tecnici vengono omessi per non appesantire l'esposizione e che il lettore desideroso di approfondire l'argomento può consultare le due seguenti monografie dell'autore stesso, ove troverà anche un'ampia bibliografia:

- *The Kepler Problem - Group Theoretical Aspects, Regularization and Quantization, with Application to the Study of Perturbations*, Birkhäuser-Springer, 2003;
- *Geography of Order and Chaos in Mechanics - Investigations of Quasi-Integrable Systems with Analytical, Numerical, and Graphical Tools*, Birkhäuser-Springer, 2013.

Si tenga presente che in esse la trattazione è alquanto specializzata, essendo rivolta agli studiosi del settore.

Nel secondo dei due volumi citati è anche descritto il software dell'autore con cui sono stati prodotti tutti i grafici e le figure tecniche di questo libro. I ritratti sono invece opera di Diletta Cordani.

Ringrazio tutti gli amici e colleghi che con i loro suggerimenti e incoraggiamenti mi sono stati di grande aiuto. Un ringraziamento particolare va a Enrico Barazzetti, Niccolò Guicciardini e Giuseppe Molteni per le loro puntuali e utilissime osservazioni.