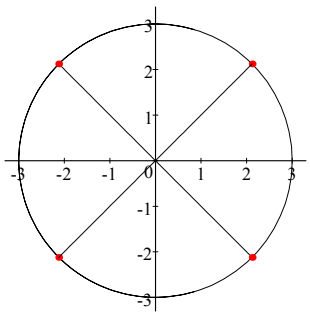
Soluzioni del compito di Istituzioni di Matematiche per Chimica (6/2/07)

1. Il numero complesso -81 ha modulo 81 ed argomento π. Dunque le sue radici quarte hanno modulo $\sqrt[4]{81} = 3$ e argomenti $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, con $k = 0, 1, 2, 3$, cioè sono numeri complessi che stanno sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio 3 su raggi che formano con l'asse x gli angoli sopra elencati. Ne segue che hanno la forma $w_k = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right]$, con $k = 0, 1, 2, 3$, cioè, in forma algebrica, $w_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $w_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $w_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $w_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$



2. La funzione $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$

   (a) è definita purché risulti $x^3 - 3x + 2 \geq 0$. Visto che $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ e che un quadrato è sempre non negativo, questo succede purché x appartenga a $[-2, +\infty)$; inoltre il segno della funzione è positivo tranne che in $x = -2$ ed in $x = 1$, dove la funzione si annulla.

   (b) La funzione dove è definita è continua (in quanto composizione di funzioni continue) e quindi $\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) = 0$; inoltre: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3} = +\infty$ senza asintoti, poiché $x^{3/2}$ ha un ordine di infinito superiore a x.

   (c) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x + 2}} \geq 0$ se e solo se $x \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ e $x^2 \geq 1$, cioè se e solo se $x \in (-2, -1)$ oppure $x \in (1, +\infty)$.

   Ne segue che la funzione cresce in $(-2, -1)$ e in $(1, +\infty)$ decresce in $(-1, 1)$ e in $x = -1$ ha un punto di massimo relativo mentre (pur non essendo ivi derivabile) in $x = 1$ ha un punto di minimo relativo. Si ha $f(-1) = 2$.

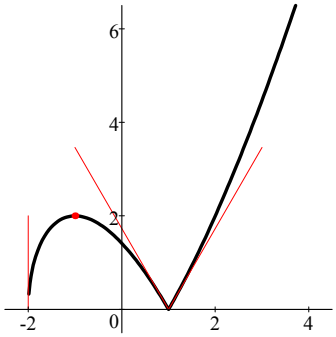
   (d) $f''(x) = \dfrac{3}{2}\left[(x^2-1)(x^3-3x+2)^{-1/2}\right]' =$

   $= \dfrac{3}{2}\left[2x(x^3-3x+2)^{-1/2} - \dfrac{3}{2}(x^2-1)^2(x^3-3x+2)^{-3/2}\right] =$

   $= \dfrac{3}{4}(x^3-3x+2)^{-3/2}\left[4x(x-1)^2(x+2) - 3(x^2-1)^2\right] =$

   $= 3\dfrac{(x-1)^2(x^2+2x-3)}{4(x^3-3x+2)^{3/2}} > 0$ se e solo se $x \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ e $x^2 + 2x - 3 > 0$, cioè se e solo se $x \in (1, +\infty)$: quindi la funzione è convessa in $(1, +\infty)$ e concava in $(-2, 1)$ e non ha punti di flesso in quanto in $x = 1$ la funzione presenta un punto angoloso (vedi punto successivo).

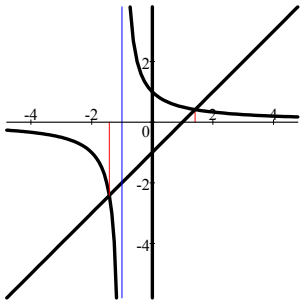
   (e) Sotto viene riportato il grafico di $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$.
   Si osserva che in $x = -2$ la tangente al grafico ha equazione $x = -2$, poiché $\lim_{x\to -2^+} f'(x) = +\infty$.



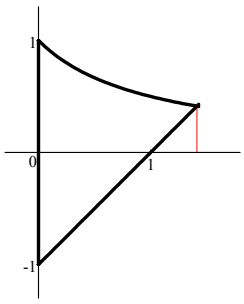
Invece, essendo $f'(x) = \dfrac{3(x-1)(x+1)}{2|x-1|\sqrt{x+2}}$, risulta $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{-3(x+1)}{2\sqrt{x+2}} = -\sqrt{3}$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}} = \sqrt{3}$: quindi i coefficienti angolari delle rette tangenti in $x = 1$ da destra e da sinistra sono diversi.

3. $\displaystyle\int \frac{6x^2+1}{x}\left(\ln x + 3x^2\right)^8 dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{per sostituzione}\\ \ln x + 3x^2 = t,\\ \left(\dfrac{1}{x} + 6x\right)dx = dt\end{array}} = \int t^8 dt = \frac{t^9}{9} + c = \frac{\left(\ln x + 3x^2\right)^9}{9} + c.$

4. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ ha per grafico una iperbole con asintoti $x = -1$ e $y = 0$ che interseca l'asse y in $(0,1)$. La funzione $g(x) = x - 1$ ha per grafico una retta parallela alla bisettrice del I-III quadrante che interseca l'asse y in $(0,-1)$.



I due grafici si intersecano allorché $(x-1)(x+1) = 1$, cioè per $x = \pm\sqrt{2}$. Dal grafico è evidente che l'unica regione limitata delimitata dai due grafici è il triangoloide R delimitato nella seconda figura dalla linea spessa. Poiché nell'intervallo $\left[0, \sqrt{2}\right]$ si ha $f(x) \geq g(x)$ la sua area è data da



$$\mathcal{A}(R) = \int_0^{\sqrt{2}} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x+1} + 1 - x\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} + \ln|x+1|\right]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

5. La funzione $f(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$

   (a) è definita purché
   $$\begin{cases} 1 + t \geq 0 \text{ (insieme di definizione del logaritmo)} \\ t > 0 \text{ (insieme di definizione della potenza razionale negativa)} \end{cases}$$
   cioè per $t \in (0, +\infty)$.

   In $(0, +\infty)$ la funzione è continua e sempre positiva.

   (b) Per $t \to 0^+$, $f(t) \simeq \dfrac{t}{t^{3/2}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$ (e quindi la funzione diverge, e in particolare risulta illimitata sul suo insieme di definizione). Per $t \to +\infty$, invece, risulta $f(t) \simeq \dfrac{\ln t}{t^{3/2}}$ (e quindi la funzione tende a zero, per il confronto tra infiniti).

   (c) Per l'osservazione appena fatta $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0^+}^{1} f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ è un integrale improprio contemporaneamente di prima e di seconda specie.

La funzione $f(t)$ è positiva in $(0,+\infty)$: quindi si può applicare un criterio di convergenza per gli integrali impropri, in particolare quello del confronto asintotico.

Visto che, per $t \to 0^+$, $f(t) \simeq \dfrac{1}{t^{1/2}}$ e l'integrale improprio <u>di seconda specie</u> $\int_{0^+}^{1} \dfrac{1}{t^{1/2}} dt$ converge (poiché al denominatore della funzione integranda c'è una potenza di t con esponente < 1), anche l'integrale improprio di seconda specie $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ converge.

Inoltre converge per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ poiché, per $t \to +\infty$, risulta $f(t) \simeq \dfrac{\ln t}{t^{3/2}}$ ed è convergente l'integrale improprio <u>di prima specie</u> $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^{3/2}} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} \dfrac{\ln t}{t^{3/2}} dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-2t^{-1/2}\ln t - 4t^{-1/2}\right]_1^x = 0 + 4$.

Dunque $\boxed{\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge}}$, poiché entrambi gli integrali di cui è somma convergono.

In realtà tale integrale improprio può anche essere calcolato. Osserviamo che $\int \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt = -2t^{-1/2}\ln(1+t) + 2\int \dfrac{dt}{t^{1/2}(1+t)} = -2t^{-1/2}\ln(1+t) + 4\arctan t^{1/2} + c$ e quindi $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt = \pi - 2\ln 2$ (si tenga presente che $\lim_{x\to0^+} -2t^{-1/2}\ln(1+t) = \lim_{x\to0^+} -2t^{1/2} = 0$), mentre $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt = 0 + 2\pi - 0 - \pi = \pi$ (si tenga presente che, per il confronto di infiniti, $\lim_{x\to+\infty} -2t^{-1/2}\ln(1+t) = \lim_{x\to+\infty} -2t^{-1/2}\ln t = 0$). Dunque $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\pi - 2\ln 2$.

6. La funzione di due variabili $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 5y^2$ ha derivate parziali $f_x(x,y) = 2x - 2y^2$ e $f_y(x,y) = -4xy + 10y$. I suoi punti critici sono quelli le cui coordinate annullano il gradiente $\mathbf{grad}\,(f(x,y)) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$, cioè le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x = y^2 \\ y(5-2x) = 0 \end{cases}$ che equivale ai due sistemi $\begin{cases} x = y^2 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = y^2 \\ 5 - 2x = 0 \end{cases}$. Il primo ha soluzione $(0,0)$ il secondo ha due soluzioni: $\left(\frac{5}{2}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$: questi sono i punti critici.

Tenuto conto che l'hessiano è $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -4y \\ -4y & 10-4x \end{vmatrix}$, si vede che

$H(0,0) = 20 > 0$ e quindi, essendo $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$, $\boxed{(0,0) \text{ è un punto di minimo locale}}$;

$H\left(\frac{5}{2}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{10} \\ -2\sqrt{10} & 0 \end{vmatrix} = -40 < 0$ e quindi $\boxed{\left(\frac{5}{2}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \text{ sono punti di sella}}$.

7. $y' = 3y - 5y^2$ è un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili che può essere riscritta come $y' = y(3-5y)$, prodotto di una funzione costante in t e di un polinomio in y (entrambe sono palesemente funzioni continue su tutto l'asse reale).

   (a) Quest'equazione ammette due soluzioni costanti: $y(t) = 0$ e $y(t) = \frac{3}{5}$ e l'integrale generale si può ricavare risolvendo l'equazione integrale $\int \dfrac{dy}{y(3-5y)} = \int dt$.

Allo scopo osserviamo che $\dfrac{3}{y\,(3-5y)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{5}{3-5y}$; dunque integrando:

$\frac{1}{3}\left(\ln|y| - \ln|5y-3|\right) = t + k \ (\text{con } k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \left|\dfrac{y}{5y-3}\right| = e^{3k}\cdot e^{3t} \ (\text{con } k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$\boxed{\dfrac{y}{5y-3} = ce^{3t}}$ (con $c \in \mathbb{R}$).

Risolvendo rispetto a y quest'ultima uguaglianza, che tiene conto anche della soluzione $y(t) = 0$, da $y\,(1-5ce^{3t}) = -3ce^{3t}$ si ricava l'integrale generale $\boxed{y(t) = \dfrac{3ce^{3t}}{5ce^{3t}-1}}$.

Le funzioni di questo tipo sono soluzioni (cioè sono derivabili e soddisfano l'equazione differenziale) purché il denominatore sia diverso da 0, quindi per ogni t reale se $c \le 0$ mentre se $c > 0$ solo per $t \in \left(-\infty, -\frac{\ln 5c}{3}\right)$ o per $t \in \left(-\frac{\ln 5c}{3}, +\infty\right)$.

(b) Perché la funzione soluzione $y(t)$ soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 1$, basta che sia $\dfrac{y(0)}{5y(0)-3} = ce^0$ cioè $c = \frac{1}{2}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è la funzione $\boxed{y(t) = \dfrac{3e^{3t}}{5e^{3t}-2}}$, il cui dominio, dovendo contenere $t = 0$, è $\left(-\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}, +\infty\right)$.
Invece nessuna di queste soluzioni soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 3/5$; l'unica funzione che la soddisfa è la soluzione particolare evidenziata all'inizio: $y(t) = 3/5$, che ha per dominio tutto l'asse reale.

8. Il sistema $\begin{cases} x - ky = 2 \\ kx + y + z = -1 \\ 5x + y + 3z = k \end{cases}$ ha matrice completa associata $\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 2 \\ k & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & k \end{pmatrix}$. La matrice dei coefficienti ha rango almeno 2 in quanto contiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ che ha determinante $\neq 0$. Inoltre il suo determinante (calcolato lungo l'ultima colonna)
$-\begin{vmatrix} 1 & -k \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{vmatrix} = -1 - 5k + 3 + 3k^2 = 3k^2 - 5k + 2$ si annulla per $k = 1$ e per $k = 2/3$.
Quindi $\boxed{\text{per valori di } k \text{ diversi da 1 e } 2/3}$ la matrice dei coefficienti è invertibile e quindi il sistema ammette una ed $\boxed{\text{una sola soluzione}}$.

Per $\boxed{k = 1}$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 ma anche quella completa $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2 (in base al metodo di Kronecker) poiché è nullo anche il secondo determinante della sottomatrice di ordine 3 ottenuta orlando $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(1+3) + 2(3-1) = 0$: ne segue per il teorema di Rouché-Capelli che il sistema è risolubile e $\boxed{\text{le soluzioni dipendono da 1 parametro reale}}$.

Invece per $\boxed{k = 2/3 \text{ il sistema non è risolubile}}$ poiché il rango della matrice completa è 3 visto che contiene una sottomatrice di ordine 3 con determinante non nullo:
$\begin{vmatrix} -2/3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/3 & 2 \\ 1 & -2/3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2/3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4/9 - 2 - 2 + 6 \neq 0.$