Cognome______________________________Nome________________________matr.________

Se nello scritto raggiungo il punteggio di almeno 15/30, chiedo di sostenere l'orale nel periodo (spuntare il periodo che interessa): ☐ *9 – 10 febbraio* ☐ *13 – 17 febbraio* ☐ *20 – 24 febbraio*   con l'esclusione, NEL PERIODO SCELTO, dei seguenti giorni (non più di 2): ....   Se il punteggio dello scritto è ≥15 ma < ... /30 intendo sostenere la prova scritta del 23/2
indirizzo e-mail:

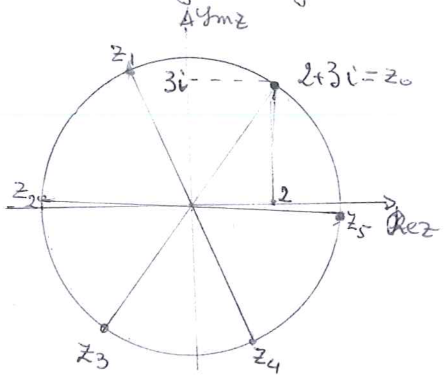
Consegnare solo questo foglio, non la brutta. È necessario riportare, oltre ai risultati, anche le giustificazioni e i passaggi fondamentali. La prova dura 3 ore.

Matematica del Continuo per Informatica Musicale (8/2/2017)

1. (4 punti) Sia $z = 2+3i$ una delle radici seste di un numero complesso w. Rappresentare nel piano di Argand - Gauss, calcolare ed esprimere in forma algebrica <u>le restanti radici seste</u> di w.

Premessa: NON si chiede di calcolare le radici seste di z, ma quelle di $w = z^6$.

Se $z = 2+3i$ è una delle radici seste di w, le altre sono nei restanti vertici di un esagono regolare con centro in $(0,0)$, inscritto in una circonferenza di raggio $|z| = \sqrt{13}$.



Basta quindi moltiplicare $z_0 = 2+3i$ per le radici seste dell'unità per ottenere le altre radici.
In realtà dato che

$$z_3 = -z_0 \ , \ z_4 = -z_1 \ , \ z_5 = -z_2$$

basta moltiplicare z_0 per $(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3})$ e per $(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{3}))$ ottenendo così z_1 e z_5 e ricavare le altre radici come opposte:

$$z_1 = (2+3i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_4 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) - i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$$

$$z_5 = (2+3i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) \Rightarrow z_2 = -\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$$

$$z_3 = -2 - 3i.$$

2. (5 punti) Dopo aver evidenziato eventuali forme di indecisione, calcolare il limite per n che tende a $+\infty$ della successione di termine generale: $a_n = \left(\dfrac{3n^2 - 1}{3n^2 + n}\right)^n$.

Per $n \to +\infty$ $\left\{\dfrac{3n^2-1}{3n^2+n}\right\} \to \dfrac{3}{3} = 1$ quindi $\{a_n\}$ presenta la forma di indecisione $[1^\infty]$ Volendo si poteva dire prima che $\left\{\dfrac{3n^2-1}{3n^2+n}\right\}$ presenta la F.I. $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ ... ma è una forma di indecisione facile.

Per risolvere la F.I. $[1^\infty]$ ci riconduciamo al <u>limite di Nepero</u>, osservando che

$$\frac{3n^2-1}{3n^2+n} = \frac{3n^2+n-n-1}{3n^2+n} = 1 + \frac{-n-1}{3n^2+n} \quad e$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{-n-1}{3n^2+n}\right)^{\frac{3n^2+n}{-n-1}}}_{\text{Successione di tipo Nepero}} {}^{\cdot \frac{-n-1}{3n^2+n} \cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^2-n}{3n^2+n}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

Metodo più veloce, dopo aver visto che $\frac{3n^2-1}{3n^2+n} \to 1$:

$$a_n = e^{n \ln\left(1 + \frac{-n-1}{3n^2+n}\right)}$$

Osservare che per $n \to +\infty$ $\ln\left(1 + \frac{-n-1}{3n^2+n}\right) \sim \frac{-n-1}{3n^2+n}$ e quindi il limite dell'esponente è $= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^2-n}{3n^2+n} = -\frac{1}{3}$

3. (12 punti) Della funzione $f(x) = \ln(25x-4) + \frac{1}{x} - 5$ determinare nell'ordine:

a) l'insieme di definizione e i limiti (con eventuali asintoti) negli estremi dello stesso;
b) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto del grafico di ascissa $x = 1$;
c) gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di estremo relativo e i valori assunti in essi dalla funzione;
d) quanti zeri ha e quale è il suo segno negli intervalli da essi determinati;
e) il grafico qualitativo.

Il valore della funzione in $x = 5$ dà qualche informazione interessante per localizzare gli zeri?

La funzione $f(x) = \ln(25x-4) + \frac{1}{x} - 5$

a) è definita purché $\begin{cases} 25x-4>0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ cioè in $(4/25, +\infty)$

$\lim_{x \to 4/25^+} f(x) = -\infty$: asintoto verticale $x = 4/25$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, senza asintoto obliquo, poiché per $x \to +\infty$ $f(x) \sim \ln(25x)$ che non è lineare, quindi non ha asintoto.

b) $f'(x) = \frac{25}{25x-4} - \frac{1}{x^2} = \frac{25x^2 - 25x + 4}{x^2(25x-4)}$

Poiché $f(1) = \ln 21 - 4$ e $f'(1) = \frac{25}{21} - 1 = \frac{4}{21}$, l'equazione della retta tangente in $(1, \ln 21)$ al grafico della funzione è $y + 4 - \ln 21 = \frac{4}{21}(x-1)$

c) $f'(x) \geq 0 \iff \begin{cases} x \in (4/25, +\infty) \\ 25x^2 - 25x + 4 \geq 0 \end{cases}$: l'equazione ha sol $x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 25 \cdot 16}}{25 \cdot 2} = \frac{25 \pm 15}{25 \cdot 2} = \begin{matrix} 4/5 \\ 1/5 \end{matrix}$

Quindi $f'(x) > 0$ in $(4/25, 1/5)$ e in $(4/5, +\infty)$: in tali intervalli la funzione cresce

$f'(x) < 0$ in $(1/5, 4/5)$: in tale intervallo la funzione decresce

$f(x)$ ha un punto di MAX rel. in $x = \frac{1}{5}$: $f(\frac{1}{5}) = 0$

min rel in $x = \frac{4}{5}$: $f(\frac{4}{5}) = \ln 16 + \frac{5}{4} - 5 = \ln 16 - \frac{15}{4}$.

d) uno zero per la funzione è stato determinato $(x = \frac{1}{5})$

La funzione non ha altri zeri in $(4/25, 4/5)$ poiché in $(4/25, 1/5]$ è crescente con max $= 0$ e quindi è sempre < 0; in $(1/5, 4/5)$ è decrescente, con max$=0$ e quindi sempre < 0.

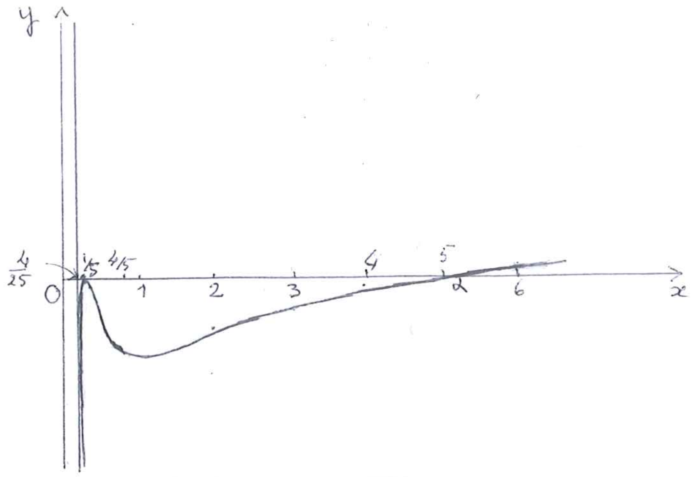
Nell'intervallo $(4/5, +\infty)$ la funzione ha un altro zero in quanto $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ quindi per $\bar{x}$ abbastanza grande deve essere $f(\bar{x}) > 0$; la funzione è continua in $[4/5, \bar{x}]$ ha valori di segno opposto negli estremi, quindi per il teor. degli zeri, ha almeno uno zero. Di fatto 1 solo poiché in tale intervallo $f(x)$ è monotona crescente.

Poiché $f(5) = \ln 121 - \frac{24}{5} = 4{,}7957\ldots - 4{,}8 = -0{,}0042\ldots$

$f(6) = \ln 146 - \frac{29}{6} = 4{,}9836\ldots - 4{,}8\bar{3} = 0{,}1502\ldots$

il secondo zero α cade nell'intervallo $(5,6)$ molto prossimo a 5. Infatti, grossolanamente il grafico di f in questo intervallo si può approssimare con la retta di equazione $y - f(5) = (f(6) - f(5))(x-5)$ che, ancora con un'approssimazione posso descrivere come $y = 0{,}1545x - 0{,}7766$ che interseca l'asse x in $x = 5{,}027\ldots$

E' poi ovvio che $f(x) < 0$ in $(\frac{4}{25}, \frac{1}{5})$ e in $(\frac{1}{5}, \alpha)$ mentre $f(x) > 0$ per $x > \alpha$.



Nel tracciare il grafico si è tenuto conto di un'osservazione non richiesta: nel passaggio dal punto di massimo (funzione concava) a quello di minimo (funzione convessa) ci deve essere un punto di flesso, così come nell'intervallo successivo, visto che la funzione va all'∞ come un logaritmo (che è concavo

$$f''(x) = \frac{-25^2}{(25x-4)^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-25^2x^3+2\cdot 25^2x^2-400x+32}{x^3(25x-4)^2}$$

è non negativa nel dominio di $f(x)$ quando lo è il numeratore.

Lo studio dell'annullamento di $P(x) = -25^2x^3+2\cdot 25^2x^2-400x+32$ è difficile, ma tenendo conto che $P(x)$ è continua, si può usare il teorema degli zeri per localizzare i suoi tre zeri.

Il primo cade in $(0, 4/25)$ e quindi non ci interessa (infatti $P(0)=32>0$ mentre $P(\frac{4}{25})<0$)

Inoltre $P(1/5)<0$ – coerentemente col fatto che $x=1/5$ è un punto di MAX rel –

e $P(4/5)>0$ – " " " " $x=4/5$ " " " " min rel –

e quindi P ha uno zero in $(1/5, 4/5)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ ha un flesso qui

Infine $P(1)=257>0$ mentre $P(2)=-768<0$ e quindi $P(x)$ ha un terzo zero in $(1,2)$ e $f(x)$ ha un punto di flesso in tale intervallo.

Non ci possono essere più di 3 zeri per $P(x)$ poiché il polinomio ha grado 3.

4. (5 punti) Considerare il sistema lineare $\begin{cases} 3x + y - 2z = k^2 \\ x + z = k \\ 3x + 2y - 7z = 0 \end{cases}$

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k esso è risolubile.

b) Posto $k = \frac{3}{2}$, determinarne <u>tutte</u> le soluzioni.

<u>Considerazioni preliminari</u>: per $k=0$ ho un sistema lineare omogeneo che ha sempre almeno 1 soluzione: $(0,0,0)$. Inoltre mi chiedono di determinare le soluzioni per $k=3/2$ e quindi probabilmente ci sono. Inoltre per $k=\frac{3}{2}$ mi chiedono di trovare TUTTE le soluzioni; quindi ce ne sarà più di una (cioè ∞^1..) Non posso avere risultati contraddittori con questa analisi del testo.

a) Per stabilire quando il sistema è risolubile devo applicare il teorema di <u>Rouché-Capelli</u>. Vedo che la matrice A dei coefficienti ha determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7-4-6+3=0 \Rightarrow rkA \leq 2$$

e, visto che $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $rkA = 2$

Dunque il sistema è risolubile (R-C) $\Longleftrightarrow$ $rk(A|b) = 2$, ove $(A|b)$ è la matrice completa

Orlo la sottomatrice quadrata di ordine 2 di cui ho stabilito che ha det$\neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & k^2 \\ 0 & 1 & k \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & k^2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & -3 & -2k^2 \end{vmatrix} = -2k^2+3k = 0 \Longleftrightarrow k=0 \text{ o } k=\frac{3}{2}.$$

Questi sono i due valori per cui il sistema è risolubile.

b) Sia $k=3/2$. Poiché $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ le prime 2 equazioni sono indipendenti e, da sole, forniscono un sistema equivalente a quello dato $\begin{cases} 3x+y-2z = 9/4 \\ x + z = 3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ z = 3/2 - t \\ 3t+y-3+2t = 9/4 \end{cases}$

Soluzioni: $\{(t, \frac{21}{4}-5t, \frac{3}{2}-t),\ t\in\mathbb{R}\}$.

<u>Oppure</u> uso il metodo di Gauss $\begin{cases} x + z = 3/2 \\ -y+5z = 9/4 \\ 3x+2y-7z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=3/2 \\ -y+5z=9/4 \\ 2y-10z=-9/2 \end{cases}$ sono una multipla dell'altra $\Rightarrow$ 1 si scarta

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3/2 - t \\ y = -9/4+5t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$ Soluzioni: $\{(3/2-t, -9/4+5t, t),\ t\in\mathbb{R}\}$

5. (4 punti) Calcolare la primitiva della funzione $\dfrac{3}{(x+1)(1-2x)}$, che in $x = 0$ vale $\ln(3)$, precisandone l'intervallo massimale di definizione.

La funzione $\dfrac{3}{(x+1)(1-2x)}$ è definita purché il denominatore sia $\neq 0$ e quindi in $(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$ ed è continua in ciascuno dei tre intervalli: quindi (teorema fond. del calcolo) gli intervalli massimali su cui può essere definita una primitiva sono $(-\infty,-1)$, $(-1,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},+\infty)$. La primitiva richiesta deve essere definita in $x=0$: quindi il suo intervallo massimale di definizione è $(-1,\frac{1}{2})$.

Per determinare l'integrale indefinito osservare che

$$\frac{3}{(x+1)(1-2x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{1-2x} = \frac{A-2Ax+Bx+B}{(x+1)(1-2x)} \iff 3 \overset{\forall x \in I.D.}{\equiv} A+B+(B-2A)x \iff \begin{cases} B=2A \\ A+B=3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}$$

Quindi $\dfrac{3}{(x+1)(1-2x)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{2x-1} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{3}{(x+1)(1-2x)}\,dx = \int\frac{dx}{x+1} - \int\frac{2dx}{2x-1} =$

$$= \ln|x+1| - \ln|2x-1| + c$$

che visto che vogliamo una primitiva definita in $x=0$ (cioè in $(-1,\frac{1}{2})$) diventa $\ln\dfrac{(x+1)}{(1-2x)} + c$. Questa primitiva in $x=0$ vale $0+c=\ln 3$.

Quindi la primitiva cercata è $\ln\left(\dfrac{x+1}{1-2x}\right) + \ln 3 = \ln 3\left(\dfrac{x+1}{1-2x}\right)$.

6. (5 punti) Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{1^+}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

Attenzione: c'è un doppio integrale improprio!

$\displaystyle\int_{1^+}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$ è integrale improprio di 1^a e di 2^a specie poiché $(1,+\infty)$ è un intervallo illimitato e $\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ è illimitata su di esso pur essendo continua. Spezzo l'integrale in un punto comodo dell'intervallo. Quindi conviene prima determinare una primitiva

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=t \\ x-1=t^2 \\ dx=2t\,dt\end{array}}}{=} \int \frac{2t\,dt}{t(t^2+1)} = 2\arctan t + c = 2\arctan\sqrt{x-1} + c$$

Spezziamo in $x=2$:

$$\int_{1^+}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 1^+}\left[2\arctan\sqrt{x-1}\right]_{\varepsilon}^{2} + \lim_{\omega\to+\infty}\left[2\arctan\sqrt{x-1}\right]_{2}^{\omega} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1^+}\left(\cancel{\frac{\pi}{2}} - 2\arctan\sqrt{\varepsilon-1}\right) + \lim_{\omega\to+\infty}\left(2\arctan\sqrt{\omega-1} - \cancel{\frac{\pi}{2}}\right) = \pi - 0 = \pi.$$