*Cognome*______________________________*Nome*_________________________*matr.*__________

*Se nello scritto raggiungo il punteggio di almeno 15/30, chiedo di sostenere l'**orale** nel giorno* (spuntare il giorno che interessa): ☐ ***18 luglio*** ☐ ***25 luglio*** o, COMPILARE SOLO SE impossibilitati in ENTRAMBI i giorni, *segnalo come date possibili (ALMENO 2)*: ....
indirizzo e-mail:

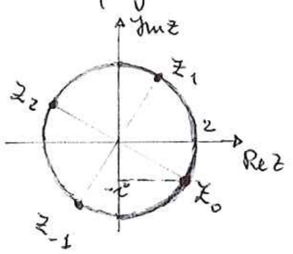
Consegnare solo questo foglio, non la brutta. È necessario riportare, oltre ai risultati, anche le giustificazioni e i passaggi fondamentali. La prova dura 3 ore.

Matematica del Continuo per Informatica Musicale (13/7/2017)

1. (4 punti) Dato il numero complesso $w = \dfrac{8\sqrt{3} - 8i}{i}$
   a) determinarne modulo e argomento principale;
   b) rappresentare nel piano di Argand-Gauss le sue radici quarte,
   c) calcolare tali radici in forma algebrica.

a) $|w| = \dfrac{|8\sqrt{3} - 8i|}{|i|} = \dfrac{8\sqrt{3+1}}{1} = 16$; $\arg w = \arg(8\sqrt{3} - 8i) - \arg(i) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3}$
è principale poiché $\in (-\pi, \pi]$.

b) le radici quarte di w hanno la forma
$z_K = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ con $k = -1, 0, 1, 2$ e quindi sono ai vertici di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio 2 e centro 0 come in figura:



c) $z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$

$z_1 = z_0 \cdot i = 1 + \sqrt{3}i$ (infatti la rotazione di $\pi/2$ equivale al prodotto per i)

$z_2 = -z_0 = -\sqrt{3} + i$

$z_{-1} = -z_1 = -1 - \sqrt{3}i$

2. (4 punti) Calcolare il limite per x che tende a $+\infty$ della funzione $x \ln\left(\dfrac{4x^2 - 3}{4x^2 + x}\right)$ evidenziando le <u>forme</u> di <u>indecisione</u> che si presentano nel calcolo stesso.

Osserviamo che per $x \to +\infty$: $\frac{4x^2-3}{4x^2+x}$ presenta la F.I. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Ora:

$\dfrac{4x^2-3}{4x^2+x} = \dfrac{4x^2+x-x-3}{4x^2+x} = 1 - \dfrac{x+3}{4x^2+x} \to 1$ poiché $\frac{x+3}{4x^2+x} \to 0$ dato che il polinomio al numeratore ha grado inferiore a quello al denominatore. Quindi $\ln\left(\frac{4x^2-3}{4x^2+x}\right) \to 0$ e di conseguenza il limite presenta la F.I. $[\infty \cdot 0]$.

D'altra parte, dato che $t = -\frac{x+3}{4x^2+x} \to 0$ e per $t \to 0$ vale l'asintotico $\ln(1+t) \sim t$, si può riscrivere il limite come segue:

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{4x^2-3}{4x^2+x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(-\frac{x+3}{4x^2+x}\right) = -\frac{1}{4}$$

Volendo usare de l'Hospital invece dell'asintotico bisogna prima passare alla forma $\left[\frac{0}{0}\right]$:

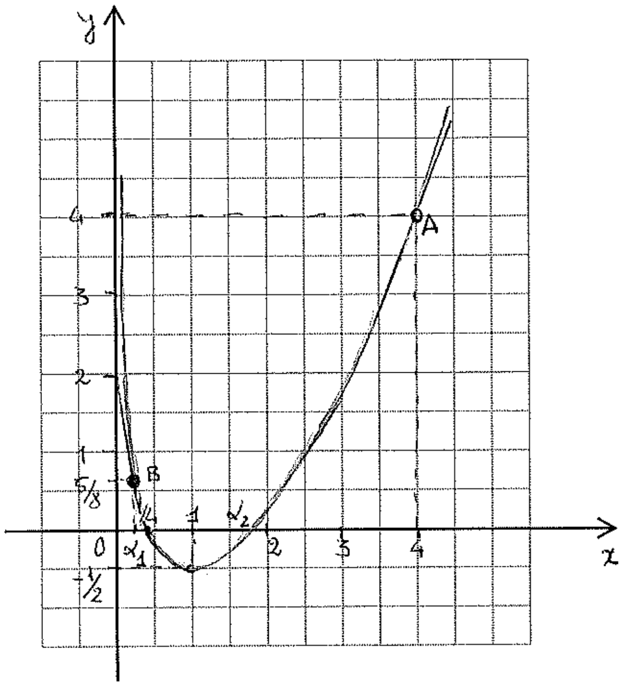
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{4x^2-3}{4x^2+x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{8x(4x^2+x) - (8x+1)(4x^2-3)}{(4x^2-3)(4x^2+x)}}{-1/x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+24x-3}{-16x^2} = -\frac{1}{4}$$

(Per gestire bene il DENOM. osservare che $\dfrac{1/(4x^2-3)(4x^2+x)}{-1/x^2} = \dfrac{-x^2}{(4x^2-3)(4x^2+x)} \sim \dfrac{-x^2}{16x^4}$ per $x \to +\infty$)

3. (12 punti) Della funzione $f(x) = \sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$ determinare <u>nell'ordine</u>:

a) l'insieme di definizione (ID);
b) i limiti e gli eventuali asintoti agli estremi dell'ID;
c) le equazioni delle rette tangenti al grafico nei punti di ascissa $x = 4$ e $x = \frac{1}{4}$;
d) gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di estremo <u>relativo</u> e/o <u>assoluto</u> e i valori assunti in essi dalla funzione;
e) gli intervalli di convessità.

Utilizzare i dati ricavati nei punti (c) e (d) per stabilire la presenza di zeri e il segno della funzione. Tracciarne infine il grafico qualitativo nel diagramma sottostante (lato del quadretto di misura 0,5).



a) Perché siano definite $\sqrt{x^3}$ e $\sqrt{x}$ deve risultare $x \geq 0$; perché sia definita la frazione deve essere $x \neq 0$. Quindi l'I.D. è $(0, +\infty)$ ove l'ESTREMO FINITO 0 è ESCLUSO.

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$

Quindi $x = 0$ è asintoto verticale per la funzione.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3} = +\infty$

tra $x^{3/2}$ e $x^{1/2}$ il primo è infinito di ordine superiore e quindi l'altro è trascurabile

Per $x \to +\infty$ non vi è quindi asintoto obliquo. (l'ordine di infinito di $x^{3/2}$ è > di quello di x e quindi $x^{3/2}/x$ non può tendere a un numero finito).

c) per determinare le equazioni delle tangenti serve conoscere la derivata prima:

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

Poiché $f(4) = 8 - 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 4$ e $f'(4) = 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{39}{16}$, l'eq. della retta tang. al grafico in $A = (4,4)$ è $\boxed{y - 4 = \frac{39}{16}(x - 4)}$, cioè $y = \frac{39}{16}x - \frac{23}{4}$.

Poiché $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ e $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} - 2 - \frac{8}{2} = -\frac{21}{4}$, l'eq. della retta tang. al grafico in $B = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right)$ è $\boxed{y - \frac{5}{8} = -\frac{21}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right)}$, cioè $y = -\frac{21}{4}x + \frac{31}{16}$.

d) $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2\sqrt{x^3}} \geq 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ 3x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ (3x+1)(x-1) \geq 0 \end{cases} \iff x \geq 1.$

Quindi la funzione è decrescente in $(0, 1)$, crescente in $(1, +\infty)$ e ha un minimo – relativo e assoluto – in $x = 1$. Il valore nel punto di minimo è $f(1) = -\frac{1}{2}$. La funzione non ha invece punti di massimo, neanche assoluto, essendo superiormente illimitata.

e) La funzione è convessa su tutto l'I.D. $(0, +\infty)$. Infatti le derivate di ciascuno dei 3 addendi che danno $f'(x)$ sono positive:

$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{3}{4\sqrt{x^5}} > 0 \quad \forall x \in I.D.$

Dato che $f(x)$ è continua in $(0,+\infty)$ e - in particolare - in $[1/4, 1]$ e in $[1,4]$ e dato che $f(1/4)\cdot f(1)<0$ e $f(1)\cdot f(4)<0$, per il teor. degli zeri la funzione ammette almeno uno zero in $[1/4, 1]$ e almeno uno in $[1,4]$. Di fatto ammette esattamente uno zero in ciascuno dei due intervalli poiché su ciascuno di essi la funzione è monotona. Detto α_1 lo zero che sta in $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ e α_2 lo zero che sta in $[1,4]$, si ha:

$f(x)>0$ in $(0,\alpha_1)$ e in $(\alpha_2,+\infty)$ | Infatti in $[1/4, 1]$ la funzione è decrescente
$f(x)<0$ in (α_1,α_2) | e in $[1,4]$ " " è crescente

Gli zeri possono anche essere localizzati meglio poiché

$f(1/2)= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}} + \cancel{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} < 0$ e $f(9/25)= \frac{27}{5^3} - \frac{6}{5} + \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{5^3} - \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{1}{6} > 0$ e quindi

$\alpha_1 \in (9/25, 1/2)$, mentre

$f(2) = \cancel{2\sqrt{2}} - \cancel{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} > 0$ e $f\left(\frac{25}{16}\right) = \frac{125}{64} - 2\cdot\frac{5}{4} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{64} - 3 + \frac{4}{5} < 0$ e quindi

$\alpha_2 \in \left(\frac{25}{16}, 2\right)$.

4. (5 punti) Considerare il sistema lineare $\begin{cases} \quad\ \ 2y \ \ -kz = 0 \\ -x \ +ky \ \ -z = k+1 \\ \ \ x \ \ +3y \ +2z = 0 \end{cases}$

a) Stabilire per quali valori del parametro reale k esso è risolubile.
b) Determinarne <u>tutte</u> le soluzioni nei casi $k=-1$ e $k=0$.

a) Associamo al sistema lineare la sua <u>matrice completa</u> (dipendente da k): $(A_k \mid \underline{b}_k) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -k & 0 \\ -1 & k & -1 & k+1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Per determinare il rango di A_k incominciamo a calcolarne il determinante:

$\det A_k = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -k \\ -1 & k & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Laplace su 1a colonna}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -k \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -k \\ k & -1 \end{vmatrix} = 4+3k-2+k^2 = k^2+3k+2 = (k+1)(k+2)$.

Quindi se $k\neq -1$ e $k \neq -2$ si ha $\det A_k \neq 0$ e $rg A_k = 3$: poiché la matrice completa è una 3×4, essa non può avere rango >3; di conseguenza per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile (e per di più la soluzione è unica: $\underline{x} = A_k^{-1}\cdot \underline{b}_k$).

Per $\boxed{k=-1}$ la matrice completa è $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$: il sistema è omogeneo e quindi certamente risolubile con soluz. dipendenti da 1 parametro dato che $rg A_{-1} = 2$.

Per $\boxed{k=-2}$ la matrice completa è $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ e ha rango 3 come si vede dal fatto che $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, mentre $rg A_{-2} = 2$: quindi il sistema <u>non è risolubile</u>.

Dunque il sistema è risolubile se e solo se $k\neq -2$.

b) Per $k=-1$ l'ultima equazione dipende linearmente dalle altre; quindi basta risolvere $\begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$: l'insieme delle soluzioni è $\{(x,y,z)=(t,t,-2t),\ t\in\mathbb{R}\}$ $(\subseteq \mathbb{R}^3)$.

Per $k=0$ il sistema è $\begin{cases} 2y=0 \\ -x-z=1 \\ x+2z=0 \end{cases}$ e ha soluzione (unica): $(x,y,z)=(-2,0,1)$. 3

L'esercizio può anche essere risolto usando il metodo di Gauss (vedi pag 3 bis)

Riscrivo il sistema come

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2y-kz=0 \\ -x+ky-z=k+1 \end{cases}$$

Ho avuto cura di lasciare come 1^a un'equazione priva di parametri e come seconda una che ha parametro solo in z: quindi non dovrò dividere per un coefficiente contenente parametro.

La matrice associata (completa) è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 \\ -1 & k & -1 & k+1 \end{array}\right)$$

applico il metodo di Gauss sommando la 1^a riga alla 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 \\ 0 & k+3 & 1 & k+1 \end{array}\right)$$

divido la 2^a riga per 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -k/2 & 0 \\ 0 & k+3 & 1 & k+1 \end{array}\right)$$

sommo $-(k+3)$ volte la 2^a riga alla 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -k/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k(k+3)/2 & k+1 \end{array}\right)$$

moltiplico per 2 la 3^a riga

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -k/2 & 0 \\ 0 & 0 & (k+1)(k+2) & 2(k+1) \end{array}\right)$$

Se $k+2=0$ la terza equazione $(0 \cdot z=-2)$ è impossibile e quindi il sistema è impossibile

Se $k+1=0$ la terza equazione $(0z=0)$ è indeterminata, cioè soddisfatta da ogni valore di z. Posto $z=s$

$$\begin{cases} z=s \\ y=-\frac{1}{2}s \\ x=-2s+\frac{3}{2}s \end{cases} \Rightarrow \text{Insieme delle soluzioni: } \{(x,y,z)=(-\tfrac{1}{2}s,-\tfrac{1}{2}s,s),\ s\in\mathbb{R}\}$$

Se $k\neq-1$ e $k\neq-2$ il sistema ha soluzione unica:

$$\begin{cases} z=2/(k+2) \\ y=kz/2=k/(k+2) \\ x=-3k/(k+2)-2\cdot2/(k+2)=-(3k+4)/(k+2) \end{cases}$$

cioè $(x,y,z)=\left(-\frac{(3k+4)}{k+2},\ \frac{k}{k+2},\ \frac{2}{k+2}\right)$ che, particolarizzato per $k=0$

dà proprio $(-2,0,1)$.

5. (4 punti) Calcolare la primitiva della funzione $\dfrac{2x-3}{x^2-3x-10}$ che in $x=0$ vale 0, precisandone l'intervallo massimale di definizione.

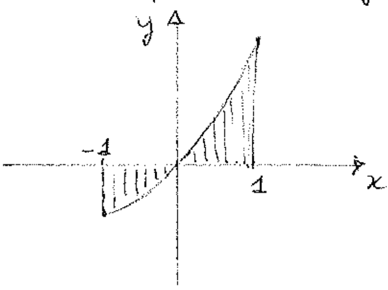
La funzione integranda è definita purchè $x^2-3x-10\neq 0$, cioè per $x\neq -2$ e $x\neq 5$ e quindi è continua in ognuno dei 3 intervalli $(-\infty,-2)$, $(-2,5)$, $(5,+\infty)$.
Dato che si vuole una primitiva definita in $x=0$ (che appartiene all'intervallo $(-2,5)$) e che, per essere in grado di applicare il teor. fondamentale del calcolo che garantisce l'esistenza di una primitiva, la funzione integranda deve essere continua,
La primitiva cercata avrà come intervallo massimale di definizione $(-2,5)$.

Si vede poi che $(x^2-3x-10)'=2x-3$, quindi la funzione assegnata ha integrale indefinito quasi immediato (sostituire $t=x^2-3x-10$, $dt=(2x-3)dx$)
$\ln|x^2-3x-10|+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Dato che la funzione primitiva deve essere def. in $x=0$ si deve porre $|x^2-3x-10|=10+3x-x^2$
Inoltre, dato che in $x=0$ deve valere 0, $\ln 10+c=0$.
Cioè la primitiva cercata è $\ln(10+3x-x^2)-\ln 10=\ln\left(1+\frac{3x-x^2}{10}\right)$

6. (5 punti) Considerare la funzione, definita nell'intervallo $I=[-1,1]$ dalla legge $f(x)=xe^{x/2}$. Tracciarne (con brevi considerazioni riguardanti zeri, segno e monotonia) il grafico, limitatamente al dominio indicato. Tratteggiare la regione *limitata* R del piano xOy delimitata dal grafico e dalle rette di equazioni $y=0$, $x=-1$ e $x=1$ e calcolare l'area di R.

La funzione $f(x)=xe^{x/2}$ è positiva in $(0,1]$ e negativa in $[-1,0)$ e ha uno zero in $x=0$.
$f'(x)=e^{x/2}+\frac{x}{2}e^{x/2}=e^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)$ è positiva in tutto l'intervallo $I=[-1,1]$ su cui quindi la funzione $f(x)$ risulta crescente. $f(-1)=-e^{-1/2}$; $f(1)=e^{1/2}$.



La regione R tratteggiata in figura ha area
$$a=\int_{-1}^{0}\left(0-xe^{x/2}\right)dx+\int_{0}^{1}\left(xe^{x/2}-0\right)dx$$

Serve determinare una primitiva di $xe^{x/2}$.
Procediamo per parti con x fattor finito:

$$\int xe^{x/2}dx=2xe^{x/2}-2\int e^{x/2}dx=2xe^{x/2}-4e^{x/2}+c.$$
Quindi
$$a=\left[2e^{x/2}(2-x)\right]_{-1}^{0}+\left[2e^{x/2}(x-2)\right]_{0}^{1}=2\left(1\cdot 2-3e^{-1/2}\right)+2\left(-e^{1/2}+2\right)=2\left(4-3e^{-1/2}-e^{1/2}\right)=$$
$$=2\left(e^{1/2}-1\right)\left(3-e^{1/2}\right)e^{-1/2}$$
(L'ultima scrittura serve solo per verificare velocemente il fatto che il numero con cui rappresentiamo l'area è >0)