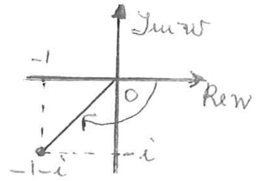
Svolgimento del Fac-simile 2 (Matematica del Continuo per Inf. Musicale)

1. Il numero complesso $w=-1-i$ ha modulo $|w|=\sqrt{2}$ e argomento principale $-\frac{3\pi}{4}$



Quindi

$$w^{12}=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos 12\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\,12\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)= \boxed{\text{poichè } -9\pi=\pi-10\pi}$$

$$=2^6(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)=-2^6=-64.$$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-3^n}{\sqrt{n+2^n}-5^{n/2}}$

$\boxed{\text{Esame delle forme di indecisione:}}$

<u>numeratore</u>: $[\infty-\infty]$ ma $n^2=o(3^n)$ (per il confronto tra potenze positive ed esponenziali di base>1) quindi il numeratore si comporta come

$$-3^n+o(3^n)$$

<u>denominatore</u>: $n+2^n$ non presenta forme di indecisione; conviene però osservare che $n+2^n=2^n(1+n/2^n)\Rightarrow\sqrt{n+2^n}=2^{n/2}\sqrt{1+o(1)}=2^{n/2}+o(2^{n/2})$

$\sqrt{n+2^n}-5^{n/2}$: $[\infty-\infty]$. Ma l'esame del radicale dice che è come fare

$$2^{n/2}+o(2^{n/2})-5^{n/2}=-5^{n/2}\left(1-\left(\tfrac{2}{5}\right)^{n/2}+o\left(\left(\tfrac{2}{5}\right)^{n/2}\right)\right):$$

tutti gli addendi tra parentesi tendono a zero, quindi il denominatore si comporta come

$$-5^{n/2}+o(5^{n/2})$$

Dunque il limite si può riscrivere come:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-3^n}{-5^{n/2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^{n/2}=+\infty$$

poichè la base dell'esponenziale è >1 e l'esponente $n/2$ tende a $+\infty$.

3. La funzione $f(x)=7+\frac{1}{2}x-\dfrac{8}{\sqrt{1-x}}$

(a) è definita purchè sia $1-x>0$ cioè per $x\in(-\infty,1)$

$\displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}7+\frac{1}{2}-\frac{8}{\sqrt{1-x}}=-\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; è inoltre immediato che per $x\to-\infty$ la funzione ha asintoto obliquo $y=7+\frac{1}{2}x$

(b) $f'(x)=\frac{1}{2}-8\cdot(1-x)^{-3/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)=\frac{1}{2}-4(1-x)^{-3/2}$

Poichè $f(0)=7-8=-1$ e $f'(0)=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}$, l'equazione della retta tangente al grafico in $(0,-1)$ è

$$y+1=-\frac{7}{2}x.$$

(c) $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-8(1-x)^{-3/2}\right)\geqslant0 \iff 1\geqslant8(1-x)^{-3/2}\iff(1-x)^{3/2}\geqslant8\iff1-x\geqslant4\iff$

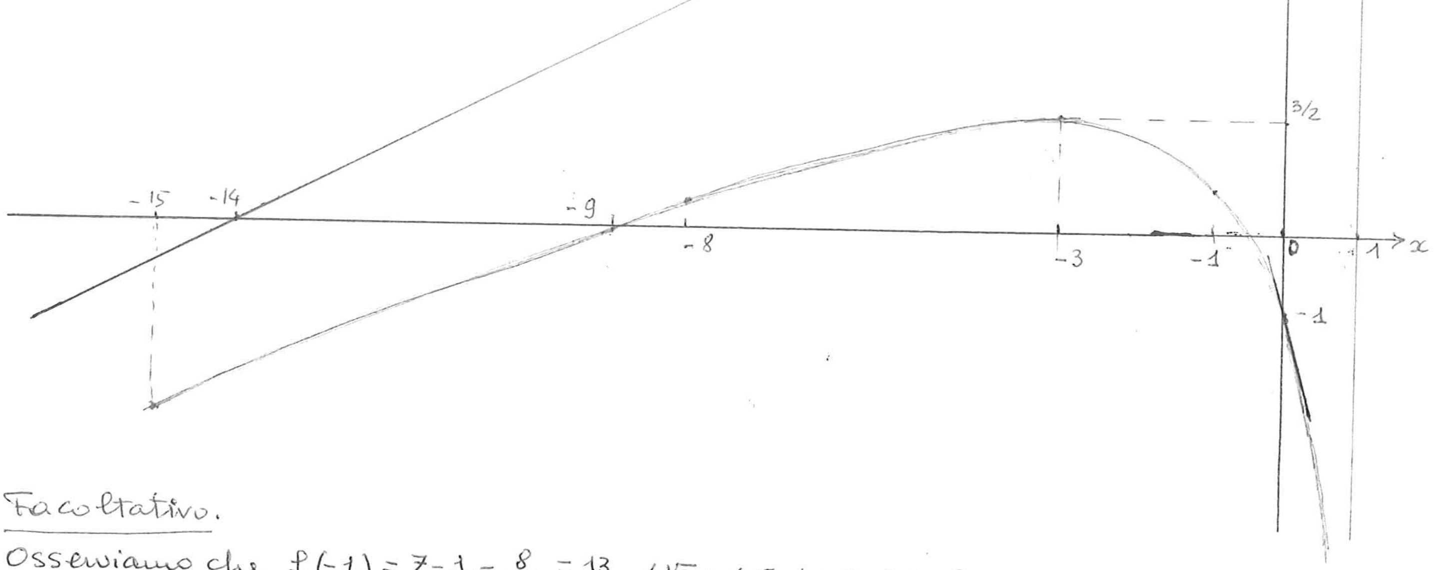
$\iff x\leqslant-3$ (tenere presente che $(1-x)^{3/2}>0$ $\forall x$ del suo dominio!)

Quindi $f(x)$ cresce in $(-\infty,-3)$, decresce in $(-3,1)$ e ha un max relativo (e assoluto) in $x=-3$: $f(-3)=7-\frac{3}{2}-\frac{8}{2}=\frac{3}{2}$

(d) $f''(x)=\frac{1}{2}\left(-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)(1-x)^{-5/2}\right)=-3(1-x)^{-5/2}<0$ $\forall x\in(-\infty,1)$.

quindi $f(x)$ è concava nel suo I.D.

Poichè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, per $\bar{x}$ abbastanza distante dall'origine $f(\bar{x})<0$ analogamente, si ha $f(0)<0$. Invece $f(-3)=\frac{3}{2}>0$ quindi devono esistere (essendo la funzione continua in $[\bar{x},-3]$ e in $[-3,0]$) due zeri negli intervalli appena descritti; non di più poichè su ciascuno dei due intervalli $(-\infty,-3)$ e $(-3,1)$ la funzione è monotona e quindi assume il valore zero 1 e 1 sola volta



Facoltativo.

Osserviamo che $f(-1) = 7-\frac{1}{2}-\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{13}{2}-4\sqrt{2} > 6,5-4\cdot 1,5 = 0,5 > 0$
mentre $f(0) = -1 < 0$

Quindi uno zero cade nell'intervallo $(-1,0)$.

Ancora: $f(-8) = 7-\frac{8}{2}-\frac{8}{\sqrt{9}} = 3-\frac{8}{3} = \frac{1}{3} > 0$

mentre $f(-9) = 7-\frac{9}{2}-\frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{5}{2}-\frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}-16}{2\sqrt{10}} = \frac{250-256}{2(50+16\sqrt{10})} < 0$ } quindi l'altro zero cade nell'intervallo $(-9,-8)$ molto prossimo a -9 dato che $f(-9)\approx -0.03$

4. La funzione $\tan(1+2x)$ è definita purchè $1+2x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$. Dunque $x \neq \frac{\pi-2}{4}+k\frac{\pi}{2}$. Quindi è continua su ogni intervallo della forma

$$\left(\frac{\pi-2}{4}+k\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi-2}{4}+k\frac{\pi}{2}\right) \qquad k\in\mathbb{Z}$$

e ciascuno di questi è un intervallo massimale di definizione delle primitive. Circa il calcolo osservo che

$$\int \tan(1+2x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(1+2x)}{\cos(1+2x)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\operatorname{sen}(1+2x)}{\cos(1+2x)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos(1+2x)|+c$$

con $\ln|\cos(1+2x)| = \ln(\cos(1+2x))$ negli intervalli di tipo $\left(\frac{-\pi-2}{4}+k\pi,\ \frac{\pi-2}{4}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

e $\ln|\cos(1+2x)| = \ln(-\cos(1+2x))$ " " " " $\left(\frac{\pi-2}{4}+k\pi,\ \frac{3\pi-2}{4}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

5. La funzione $f(t) = \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^2}$ è definita in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ed è continua in ciascuno dei due intervalli, ove è anche positiva (o nulla ma non cambia segno)
$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ è integrale generalizzato per quanto riguarda l'estremo 0 ($f(t)$ non è definita ma si può completare la def. con $f(0)=1$ e si ha una funz. continua da destra in 0, quindi l'integrale con estremo 0 si calcola) mentre è improprio di I specie. Si può usare il criterio di confronto mediante disequazioni:

poiché $\forall x \in (1, +\infty)$ $0 \leq \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, allora anche $\int_1^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^2}\,dt$ converge. Inoltre $\int_0^1 \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^2}\,dt$ è un numero e quindi

$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^2}\,dt$ risulta convergente.

6. Il sistema $\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ x + 2y = 0 \\ kx + 8y = k-4 \end{cases}$ ha matrice associata completa $(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ k & 8 & 0 & k-4 \end{array}\right)$

In particolare, la matrice A è quadrata. Quindi:
Esso ha una e una sola soluzione (Teor di Cramer) se e solo se

$\det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ k & 8 & 0 \end{vmatrix} = k(8-2k) \neq 0 \iff k \neq 0 \text{ e } k \neq 4$$

Per tutti i valori diversi da 0 e 4 il sistema ha 1 e 1 sola soluzione.