Capitolo III. ORDINAMENTI SUI MONOMI IN $A=k[x_1,\ldots,x_n]$

La necessità di determinare ordinamenti sui monomi sorge quando si voglia introdurre un algoritmo per la divisione tra polinomi multivariati che parafrasi quello per la divisione in $k[x]$ o l'algoritmo gaussiano per la soluzione di sistemi lineari (nel primo caso l'ordine è dato dal grado, nel secondo dall'ordine scelto per le variabili).

1. ORDINAMENTO MONOMIALE.

Tra l'insieme T^n dei monomi di A e $\mathbf{N}^n$ c'è una corrispondenza biunivoca

$$\varphi: T^n \to \mathbf{N}^n$$

$$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \longrightarrow (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \alpha := \mathrm{Log}\, x^{\alpha}$$

che conserva gli ordinamenti [(1)].

In particolare, una relazione d'ordine $>$ in $\mathbf{N}^n$ ne induce una in T^n, pur di porre

$$\alpha > \beta \;\Rightarrow\; x^{\alpha} > x^{\beta}.$$

Ma molti di questi ordinamenti non funzionano se si vuole che la relazione d'ordine in T^n sia compatibile con la struttura algebrica di A. Allo scopo serve:

i) che l'*ordinamento* sia *totale* in modo da poter scrivere un polinomio come elenco di monomi in ordine, ad esempio, decrescente;

ii) che l'ordinamento sia tale che $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^n$, $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$, in modo che l'ordine sia conservato dalla moltiplicazione per un monomio fissato;

iii) che l'*ordinamento* sia *buono*, cioè che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{N}^n$ abbia minimo. Quest'ultima proprietà garantisce che non si possono creare catene decrescenti infinite di monomi ed in particolare che $x^{\mathbf{0}}=1$ è il monomio minimo di T^n (vedi conseguenze al lemma 1.2).

DEFINIZIONE 1.1 *Un ordinamento di* $\mathbf{N}^n$ *con le tre proprietà sopra elencate è detto* ***ordinamento monomiale****. Se invece valgono solo le prime due proprietà si parla di* ***ordinamento monoidale****.*

LEMMA 1.2 *Un ordinamento > di* $\mathbf{N}^n$ (come di qualunque altro insieme) *è buono se e solo se ogni catena strettamente decrescente di elementi* $\alpha(i)$ *dell'insieme termina*, cioè
data la catena $\alpha(1) > \alpha(2) > \alpha(3) > \ldots$ *esiste* $n \in \mathbf{N}$ *tale che* $\alpha(n) = \alpha(n+1) = \alpha(n+2) = \ldots$.

Dimostrazione. Se $>$ non è un buon ordinamento c'è un sottoinsieme S di $\mathbf{N}^n$ privo di minimo: dunque, scelto comunque un elemento $\alpha(1)$ in S, esiste un $\alpha(2) \neq \alpha(1)$ di S tale che $\alpha(1) > \alpha(2)$. Ricominciando il ragionamento da $\alpha(2)$ si vede che si può creare una catena strettamente decrescente infinita. Viceversa, ogni catena strettamente decrescente infinita è un sottoinsieme privo di minimo e quindi se $(\mathbf{N}^n, >)$ ne contiene una non è ben ordinato.

Conseguenze del lemma 1.2

1. possibilità di far terminare gli algoritmi (come vedremo in seguito)
2. *Se l'ordinamento dato è monomiale*, $x^{\mathbf{0}}$ *è il monomio minimo in* T^n: infatti, se esistesse un $\alpha \in \mathbf{N}^n$ con $\alpha < \mathbf{0}$, si potrebbe creare la seguente catena strettamente decrescente infinita
$\alpha = 0+\alpha > 2\alpha = 0+2\alpha > \alpha+2\alpha > \ldots > \alpha+(i-1)\alpha > \alpha+i\alpha > \ldots$: impossibile! [(2)]

---

(1) $\mathbf{N}$ denota sempre l'insieme degli interi non negativi. La n-upla $(0,\ldots,0)$ di $\mathbf{N}^n$ verrà denotata con $\mathbf{0}$.
Useremo come sinonimi "relazione d'ordine" e "ordinamento" anche se "ordinamento" mette più l'accento sull'effetto di aver introdotto una relazione d'ordine. Una relazione binaria tra elementi di un insieme S è detta *relazione d'ordine* se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, cioè……); tale ordinamento è *totale* se ogni coppia $(\alpha,\beta) \in S \times S$ è in relazione.
(2) È l'esercizio 7a del Cap.2 §2 del Cox-Little-O'Shea

Vedremo (Cap. IV, corollario 3.6) che il lemma di Dickson permette di dimostrare che
Se l'ordinamento dato è monoidale e $x^{\mathbf{0}}$ *è il monomio minimo in* T^n, *allora l'ordinamento è monomiale*.
Poiché verificare che $x^{\mathbf{0}}$ è il monomio minimo è più veloce che provare che ogni sottoinsieme di multigradi ha minimo, nel seguito adotteremo questo metodo di verifica. Anzi quando servirà useremo la seguente

PROPOSIZIONE 1.3 *Perché un ordinamento monoidale < in* T^n *sia monomiale basta che* $1 = x^{\mathbf{0}}$ *sia minore di ciascuno dei monomi* $x_1, \ldots, x_n$.
Dimostrazione. Il multigrado di x_i è la n-upla $\mathbf{e}_i=(0,\ldots,1,\ldots,0)$ che ha 0 in tutte le posizioni tranne la i-esima. Quindi bisogna provare che, se $\mathbf{0} < \mathbf{e}_i$ per ogni i, allora $\mathbf{0}\leq\alpha$ per ogni $\alpha=(\alpha_1,\ldots, \alpha_n)\in \mathbf{N}^n$.
Visto che l'ordinamento è monoidale, da $\mathbf{0} < \mathbf{e}_i$ si ricava $\mathbf{0} < \mathbf{e}_i = \mathbf{0}+\mathbf{e}_i < 2\mathbf{e}_i = \mathbf{0}+2\mathbf{e}_i < 3\mathbf{e}_i <\ldots< \alpha_i\mathbf{e}_i <\ldots$, cioè, per transitività, $\mathbf{0}<\alpha_i\mathbf{e}_i$, per ogni scelta di i in $\{1,\ldots,n\}$ e di α_i in $\mathbf{N}$. Di nuovo usando la monoidalità, da $\mathbf{0} < \alpha_i\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{0} < \alpha_j\mathbf{e}_j$ si ricava $\mathbf{0} < \alpha_j\mathbf{e}_j = \mathbf{0} + \alpha_j\mathbf{e}_j < \alpha_i\mathbf{e}_i + \alpha_j\mathbf{e}_j$. Ripetendo la procedura per gli n multigradi $\mathbf{e}_i$, si trova che $\mathbf{0} < \alpha_1\mathbf{e}_1 +\ldots+ \alpha_n\mathbf{e}_n = \alpha$. C.V.D.

OSSERVAZIONI 1.4
Sia > un ordinamento monoidale. Allora
a) $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$ *con* $\alpha - \beta \in \mathbf{N}^n$ *e* $\alpha - \beta > \mathbf{0}$, *si ha* $\alpha > \beta$. Questo implica che se il monomio x^β divide il monomio x^α, risulta $\alpha \geq \beta$.
b) Non è invece vero che se $\alpha > \beta$ il monomio x^β divida il monomio x^α: infatti $\alpha - \beta$ può non appartenere ad $\mathbf{N}^n$, come si vede considerando in $\mathbf{N}^2$ con l'ordinamento lessicografico (vedi §2) $\alpha = (2,1)$ e $\beta = (1,2)$.
c) Scelto comunque $\alpha \in \mathbf{N}^n$, nell'insieme $S = \alpha + \mathbf{N}^n$ il minimo è proprio α, poiché per ogni $\beta \in S$ esiste un $\gamma \in \mathbf{N}^n$ tale che $\beta = \alpha + \gamma$ e quindi o $\beta = \alpha$ oppure sono verificate le condizioni della parte **(a)**.

2. ESEMPI DI ORDINAMENTO MONOMIALE

Tutti gli ordinamenti di cui parliamo sono ordinamenti su $\mathbf{N}^n$; essi inducono poi un corrispondente ordinamento di ugual nome sui monomi.

A. LESSICOGRAFICO

$\alpha >_{LEX} \beta \Leftrightarrow$ nella n-upla $\alpha - \beta \in \mathbf{Z}^n$ la prima componente non nulla a sinistra è positiva [3].
In particolare $(1,0,\ldots,0) >_{LEX} (0,1,\ldots,0) >_{LEX} \ldots. >_{LEX} (0,0,\ldots,1)$: quindi, una volta scelto l'ordine da dare alle indeterminate x_i, LEX lo rispetta.
Se ne deduce che permutando in tutti i modi possibili le indeterminate si hanno $n!$ ordini lessicografici diversi.
Questo ordinamento (se n>1) non tiene conto del grado totale e quindi tra due n-uple ce ne possono essere infinite anche se sono "visivamente vicine" quando rappresentate come punti di $\mathbf{N}^n$. Ad esempio in $\mathbf{N}^2$, si ha:

$$(0,0) < (0,1) < (0,2) < \ldots < (0,h) < \ldots\text{infinite coppie}\ldots < (1,0) < (1,1) < \ldots < (1,h) < \ldots\text{infinite coppie}\ldots < (2,0) < \ldots\ldots$$

---

[3] La verifica che $>_{LEX}$ è una relazione d'ordine totale dipende dal fatto che > è una relazione d'ordine totale in $\mathbf{Z}$; anche il fatto che $\alpha>_{LEX} \beta \Rightarrow \alpha + \gamma >_{LEX} \beta + \gamma$ dipende dall'analoga proprietà sugli interi. Infine è ovvio che nella n-upla $\alpha=\alpha-\mathbf{0}\in\mathbf{N}^n$ la prima componente non nulla a sinistra è positiva e quindi $\mathbf{0}$ è il minimo in $\mathbf{N}^n$. Dunque $>_{LEX}$ è un ordinamento monoidale.

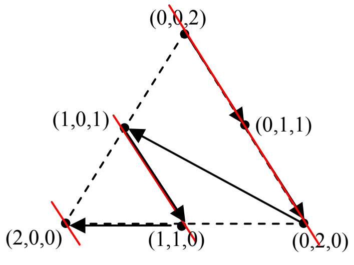
cioè è come se, rappresentate le coppie come punti in un piano cartesiano, si percorresse prima tutto il semiasse y positivo, poi la sua parallela passante per (1,0) ecc. La situazione peggiora all'aumentare di n.
Una soluzione a questa situazione sgradevole è data dagli ordini graduati.

B. LESSICOGRAFICO GRADUATO

$\alpha >_{\text{grLEX}} \beta \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n > |\beta| = \beta_1+\ldots+\beta_n$ oppure $|\alpha| = |\beta|$ ma $\alpha >_{\text{LEX}} \beta$.
Significa fare prima un controllo sul grado totale (mantenendo "vicine" le n-uple che appartengono allo stesso iperpiano $\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ = costante) e poi usare un criterio lessicografico.
La verifica che si tratta di un ordinamento monomiale è ovvia.
Anche questo ordinamento rispetta l'ordine scelto per le indeterminate. In base all'ordine dato alle indeterminate anche in questo caso si trovano $n!$ ordinamenti lessicografici graduati diversi.
In $\mathbf{N}^2$ con questo ordinamento si ha
$(0,0) < (0,1) < (1,0) < (0,2) < (1,1) < (2,0) < \ldots < (0,h) < (1,h-1) < \ldots < (i,h-i) < \ldots < (h,0) < \ldots$.
In $\mathbf{N}^3$ con questo ordinamento si ha
$(0,0,0) < (0,0,1) < (0,1,0) < (1,0,0) < (0,0,2) < (0,1,1) <$ $(0,2,0) < (1,0,1)$ $< (1,1,0) < (2,0,0) < (0,0,3) <$ $(0,1,2) <$ $(0,2,1) < (0,3,0) < (1,0,2) < (1,1,1) < (1,2,0) < (2,0,1)$ $< (2,1,0) < (3,0,0) < \ldots$[4]

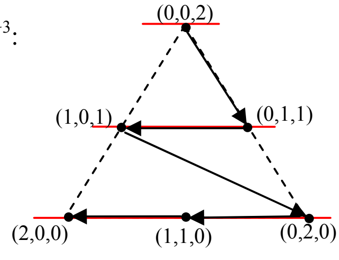
C. REVLESSICOGRAFICO GRADUATO

$\alpha >_{\text{gREVLEX}} \beta \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n > |\beta| = \beta_1+\ldots+\beta_n$ oppure
$|\alpha| = |\beta|$ ma nel vettore $\alpha - \beta \in \mathbf{Z}^n$ l'ultima componente non nulla <u>a destra</u> è <u>negativa</u>.
Significa fare prima un controllo sul grado totale (mantenendo "vicine" le n-uple che appartengono allo stesso iperpiano $\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ =costante) e poi usare un criterio *rev*lessicografico [5].
La verifica che si tratta di un ordinamento monomiale è legato al fatto che revlex è un ordinamento monoidale e che d'altra parte la graduazione impone che $\mathbf{0}$ sia minimo in $\mathbf{N}^n$.
Anche questo ordinamento rispetta l'ordine scelto per le indeterminate. In base all'ordine dato alle indeterminate anche in questo caso si trovano $n!$ ordinamenti lessicografici graduati diversi.
$\mathbf{N}^2$ con questo ordinamento coincide con $\mathbf{N}^2$ con l'ordinamento lessicografico graduato (verificare!).
In $\mathbf{N}^3$ con questo ordinamento si ha
$(0,0,0) < (0,0,1) < (0,1,0) < (1,0,0) < (0,0,2) < (0,1,1) <$ $(1,0,1) < (0,2,0)$ $< (1,1,0) < (2,0,0) < (0,0,3) <$ $(0,1,2) <$ $(1,0,2) < (0,2,1) < (1,1,1) < (2,0,1) < (0,3,0) < (1,2,0)$ $< (2,1,0) < (3,0,0) < \ldots$
Sono stati evidenziati i tratti di catena che presentano differenze nei due ordinamenti.



A sinistra:
grLEX in $\mathbf{N}^3$: sequenza crescente dei multigradi sull'iperpiano $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$

A destra:
grREVLEX in $\mathbf{N}^3$: sequenza crescente dei multigradi sull'iperpiano $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$



---

[4] Volendo procedere nella catena (senza dimenticare multigradi) sarebbe utile sapere quanti sono i monomi che hanno lo stesso grado totale. Verificare che in generale i monomi in n indeterminate di grado totale s sono $\binom{n+s-1}{s}$.

[5] La condizione: $\alpha>\beta$ se e solo se nel vettore $\alpha-\beta\in\mathbf{Z}^n$ l'ultima componente non nulla <u>a destra</u> è <u>negativa</u> definisce in $\mathbf{N}^n$ un ordinamento monoidale, ma non monomiale, poiché $\mathbf{0}>\alpha$ per ogni n-upla non nulla α. Questo ordinamento è chiamato *revlex* da Robbiano. Il motivo per questo nome è che, rispetto a LEX, viene in un certo senso invertito l'ordine. Posto $\alpha'=(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)$, si ha $\alpha>_{\text{revlex}}\beta$ se e solo se $\beta' >_{\text{LEX}} \alpha'$.

Si nota che, a parità di grado totale
- grLEX privilegia la potenza più alta della indeterminata maggiore
- gREVLEX privilegia la potenza più bassa della indeterminata minore

Spesso gREVLEX è più efficiente di grLEX nel calcolo.

D. LESSICOGRAFICO INVERSO

$\alpha >_{\text{invLEX}} \beta \Leftrightarrow$ nel vettore $\alpha - \beta \in \mathbf{Z}^n$ l'ultima componente non nulla a destra è positiva.
È solo il lessicografico applicato all'ordine inverso delle indeterminate: $x_n > \ldots > x_1$.

Nota La maggior parte dei sistemi per il calcolo simbolico implementa l'ordinamento LEX. Quelli più flessibili (Macauley, REDUCE, CoCoa…) anche grLEX, gREVLEX o altri ordinamenti definiti come vedremo successivamente, specificando inoltre l'ordine delle variabili. Se il sistema non chiede per prima cosa di definire l'ordinamento voluto, come posso riconoscere l'ordinamento implementato di default?
Basta fare un test. Per distinguere LEX dai graduati basta controllare quale delle due coppie (0,2) e (1,0) è maggiore: se è la seconda l'ordinamento è LEX. Se è la prima (o è un lessicografico inverso, ma è improbabile: in ogni caso basta testare le due coppie (2,0) e (0,1) per scoprirlo, oppure) è un ordinamento graduato. Per distinguere grLEX da gREVLEX basta confrontare le terne (0,2,0) e (1,0,1): la prima è maggiore in gREVLEX, la seconda in grLEX.

3. ALTRI ESEMPI

Il metodo del "taglio delle code" che sta alla base degli ordinamenti graduati sopra illustrati si ritrova anche nei prossimi esempi: in sostanza si confrontano due n-uple usando una opportuna strategia e se non si riesce a decidere quale è maggiore si introduce un confronto che fa riferimento a un ordinamento già noto.

Ordine prodotto

Ripartisco le indeterminate in due insiemi: $\{x_1,\ldots, x_k\}$ e $\{y_1,\ldots, y_m\}$ con $k+m = n$ e scrivo il multigrado di un monomio in queste n indeterminate come accostamento di una k-upla e di una m-upla: $[\alpha, \beta]$. Se σ è un ordinamento monomiale in $\mathbf{N}^k$ e ρ è un ordinamento monomiale in $\mathbf{N}^m$, definisco un ordinamento monomiale [(6)] in $\mathbf{N}^n$ ponendo

$[\alpha, \beta] > [\alpha', \beta']$ se e solo se $\alpha >_\sigma \alpha'$ oppure $\alpha =_\sigma \alpha'$ e $\beta >_\rho \beta'$.

In questo tipo di ordinamento rientrano:
- LEX (pensato come prodotto n volte dell'ordinamento naturale su $\mathbf{N}$)
- il cosiddetto ordine misto, ottenuto prendendo σ = LEX e ρ = grLEX.

Ordini di eliminazione *k*-esima

LEX e l'ordine prodotto sono casi particolari di ordine di eliminazione k-esima, cioè di quegli ordinamenti nei quali ogni monomio che contiene una delle prime k variabili è sicuramente maggiore di ogni monomio che non ne contenga. Un altro esempio è dato dall'ordine di Bayer e Stillman (A theorem on refining division orders by the reverse lexicographic order, Duke J. Math. (1987) 55, 321-328).

Ordine di Bayer e Stillman

Fissato k ($1 \le k \le n$) pongo

(6) La parte un po' più delicata della verifica riguarda la transitività: $[\alpha,\beta]\geq[\alpha',\beta'] \geq[\alpha'',\beta'']$. Se almeno una delle due disuguaglianze $\alpha \geq_\sigma \alpha'$ o $\alpha' \geq_\sigma \alpha''$ è stretta si ha $\alpha >_\sigma \alpha''$ e quindi $[\alpha,\beta]\geq[\alpha'',\beta'']$. Altrimenti, se le 3 coppie non coincidono, almeno una disuguaglianze $\beta \geq_\rho \beta'$ o $\beta' \geq_\rho \beta''$ è stretta e quindi $\beta >_\rho \beta''$, da cui $[\alpha,\beta]\geq[\alpha'',\beta'']$.

$\alpha >_k \beta \quad \Leftrightarrow \quad$ se $\alpha_1+\ldots+\alpha_k > \beta_1+\ldots+\beta_k$ oppure $\alpha_1+\ldots+\alpha_k = \beta_1+\ldots+\beta_k$ e $\alpha >_{\mathrm{gREVLEX}} \beta$ [(7)].

Da notare che (come in LEX) due n-uple "vicine in $\mathbf{N}^n$" possono essere separate da infinite n-uple.
Attenzione: NON è un ordine prodotto, poiché il secondo confronto è fatto sull'intera n-pla.

Weight Orders

Ce ne sono di vari tipi: tutti sono accomunati dal fatto che si dà un peso alle indeterminate. Per capire come funzionano, conviene ritornare agli ordini graduati: in quel caso, per significare che in prima approssimazione tutte le indeterminate dovevano avere lo stesso peso, il primo passo che si faceva per confrontare due multigradi era di sommare tutti gli esponenti, attribuendo a ciascuno coefficiente 1. Se si vuole che i pesi siano diversi si dovrà fare una combinazione lineare degli esponenti con coefficienti non tutti uguali a 1.
Le differenze tra gli ordini che presentiamo sono legate alla scelta dell'insieme in cui far variare i coefficienti.

1. Si consideri un vettore $\mathbf{u}\in \mathbf{R}^n$, a componenti u_i tutte > 0 e linearmente indipendenti su $\mathbf{Q}$ (cioè tali che $q_1u_1 +\ldots+ q_nu_n = 0$, $q_i\in \mathbf{Q}$, implica $q_1 =\ldots= q_n = 0$): si dice che $\mathbf{u}$ è un **vettore peso indipendente**. Corrispondentemente si definisce un ordinamento: $\alpha>_{\mathbf{u}}\beta \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}\bullet\alpha>\mathbf{u}\bullet\beta$ (ove $\bullet$ denota il prodotto scalare) che è monomiale [(8)] e viene detto ordine pesato determinato da $\mathbf{u}$.

2. Si consideri un vettore non nullo $\mathbf{u}\in \mathbf{N}^n$. Esso è sicuramente non indipendente su $\mathbf{Q}$ [(9)] e quindi non può essere usato da solo per assegnare un ordine monomiale, però può servire a rimodellare un ordinamento monomiale σ già noto di $\mathbf{N}^n$: l'ordinamento σ viene utilizzato per tagliare le code che si presentano quando esistono due multigradi diversi α, β tali che $\mathbf{u}\bullet\alpha = \mathbf{u}\bullet\beta$.
L'ordinamento nuovo è così definito: $\alpha >_{\mathbf{u},\sigma} \beta \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u}\bullet\alpha > \mathbf{u}\bullet\beta$ oppure $\mathbf{u}\bullet\alpha = \mathbf{u}\bullet\beta$ e $\alpha >_\sigma \beta$.
Abbiamo già incontrato ordinamenti di questo tipo (grLEX, gREVLEX e Bayer-Stillman).

3. Più in generale si può creare un ordinamento (non necessariamente monomiale) usando, per tagliare le code, una sequenza ordinata di vettori $\mathbf{u}_1,\ldots, \mathbf{u}_s$ di $\mathbf{R}^n$; l'ordinamento così creato è talora indicato con $\mathrm{ord}(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_s)$.
Ad esempio, LEX è $\mathrm{ord}(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$, poiché si ordinano due n-uple α e β attribuendo alle n-uple lo stesso ordinamento delle componenti a partire dalle prime a sinistra; similmente, grLEX è $\mathrm{ord}((1,\ldots,1), \mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1})$, mentre gREVLEX è $\mathrm{ord}((1,\ldots,1),-\mathbf{e}_n,\ldots,-\mathbf{e}_2)$, poiché dopo il confronto sul grado complessivo si vanno a confrontare le ultime componenti, attribuendo alle n-uple l'ordinamento opposto a quello delle componenti.
Invece $\mathrm{ord}(-\mathbf{e}_n,\ldots,-\mathbf{e}_1)$ rappresenta l'ordinamento non monomiale REVLEX.

---

(7) Per verificare che è un ordine monomiale, osservare che le condizioni di partenza delle proprietà riflessiva e antisimmetrica escludono che possa valere la disuguaglianza $\alpha_1+\ldots+\alpha_k > \beta_1+\ldots+\beta_k$ e quindi le 2 proprietà sono vere essendolo in gREVLEX; la proprietà transitiva vale per la transitività della relazione d'ordine in $\mathbf{N}$ se almeno una delle 3 somme è diversa dalle altre e per la transitività di gREVLEX altrimenti; per un motivo analogo l'ordine è totale e anche monoidale. Infine $\mathbf{0}$ è certamente minore del multigrado α se almeno una delle prime k componenti di α è non nulla; in caso contrario lo è poiché $\alpha>_{\mathrm{gREVLEX}} \mathbf{0}$. È poi ovvio che si tratta di un ordine di eliminazione k-esima poiché, se le prime k componenti di β sono nulle e quelle di α no, si ha $\alpha >_k \beta$.

(8) L'indipendenza di $\mathbf{u}$ entra in gioco nella verifica dell'antisimmetria ($\alpha\geq_{\mathbf{u}}\beta$ e $\beta\geq_{\mathbf{u}}\alpha$ significa $\mathbf{u}\bullet(\alpha-\beta)\geq 0$ e $\mathbf{u}\bullet(\alpha-\beta)\leq 0$, cioè $\mathbf{u}\bullet(\alpha-\beta)=0$ e, per l'indipendenza di $\mathbf{u}$, $\alpha-\beta=0$) e del fatto che l'ordine è totale.
Esempi di vettori $\mathbf{u}$ indipendenti sono, in $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{u}=(1,\sqrt{2})$ e, in $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{u}=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$. Facciamo la verifica per il secondo: $a+b(\sqrt{2})+c(\sqrt{3})=0$ implica $3c^2-a^2-2b^2=2(\sqrt{2})ab$; se $a=0$ questo implica $3c^2=2b^2$ cioè $b=c=0$ (poiché b, c stanno in $\mathbf{Q}$); se $b=0$ similmente si trova $a=c=0$; d'altra parte non può succedere che sia contemporaneamente $a\neq 0\neq b$, poiché questo porterebbe ad esprimere $\sqrt{2}$ come rapporto di due numeri razionali.

(9) Infatti per ogni $\mathbf{u} = (u_1 ,\ldots, u_n) \neq \mathbf{0}$, se ad esempio $u_1 \neq 0$, risulta $q_1u_1 + 1\cdot u_2 +\ldots+ 1\cdot u_n = 0$, pur di prendere
$$q_1 = -(u_2+\ldots+ u_n)/u_1.$$

Notare che se i coefficienti delle matrici vengono scelti opportunamente nei numeri reali non è necessario che il numero di vettori usati sia n [(10)].

Quella di usare una sequenza ordinata di vettori per tagliare le code è un po' la filosofia che sta dietro la rappresentazione di ordinamenti mediante matrici di cui parleremo nel prossimo paragrafo. Visto che, dato ord($\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s$), per trovare in che relazione stanno due n-uple α e β si fanno i prodotti scalari $\mathbf{u}_i\bullet(\alpha-\beta)$, diventa comodo leggere quest'operazione come il prodotto della matrice che ha per righe, ordinatamente, $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s$ per il vettore colonna delle componenti di $\alpha-\beta$.
Diremo allora che la matrice rappresentativa di LEX è la matrice identica, quella di grLEX la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ecc.

4. RAPPRESENTAZIONE DI ORDINAMENTI ATTRAVERSO MATRICI

(Da Robbiano-Kreutzer, § 1.4, esercizio 5)

DEFINIZIONE 4.1 *Siano* $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ *n elementi di* $\mathbf{Z}^n$. Estendendo la terminologia degli spazi vettoriali *si dirà che tali* ***n*-uple sono linearmente indipendenti in** $\mathbf{Z}^n$ *se dato* $(a_1,\dots,a_n)\in \mathbf{Z}^n$, *da* $a_1\mathbf{v}_1+\dots+ a_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ *si ricava* $(a_1,\dots, a_n) = (0,\dots,0)$.

OSSERVAZIONE 4.2 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ *sono linearmente indipendenti in* $\mathbf{Z}^n$ *se e solo se lo sono in* $\mathbf{Q}^n$.
È chiaro che se lo sono in $\mathbf{Q}^n$ lo sono in $\mathbf{Z}^n$. Per il viceversa si parte da una combinazione lineare di $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ a coefficienti in $\mathbf{Q}$, rappresentati come frazioni, si fa il comune denominatore e ci si riconduce a una combinazione lineare di $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ a coefficienti in $\mathbf{Z}$: la dimostrazione si riduce allora a chiedersi quando una frazione è nulla.

Consideriamo una matrice V le cui righe $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ siano n-uple linearmente indipendenti in $\mathbf{Z}^n$. Per l'osservazione 4.2, i vettori riga di V, pensata come matrice a coefficienti in $\mathbf{Q}$, sono indipendenti e quindi la matrice (quadrata!) V è invertibile. Ciò implica che

$$\mathrm{V}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora l'ordinamento [(11)] ord($\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$) di $\mathbf{N}^n$ così realizzato: $\alpha > \beta$ se e solo se il primo elemento non nullo (a partire dall'alto) del vettore $\mathbf{u} = \mathrm{V}\begin{pmatrix}\alpha_1-\beta_1\\ \vdots \\ \alpha_n-\beta_n\end{pmatrix}$ è positivo. Vale la

---

(10) Ad esempio ord((1,√2,√2),(0,0,1)) è un ordinamento totale. In effetti, se $(1,\sqrt{2},\sqrt{2})\bullet(\alpha-\beta)=0$, la prima componente di α è uguale a quella di β e così pure la somma della seconda e della terza. Il secondo vettore permette di decidere quale dei due vettori è maggiore guardando la terza componente.

(11) Che valgano le proprietà riflessiva ed antisimmetrica è ovvio; per provare che si tratta davvero di un ordinamento basta quindi verificare la proprietà transitiva. Ora da

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \exists\, i \text{ tale che } \mathbf{v}_i\bullet(\alpha-\beta) > 0 \quad\text{e}\quad \forall\, k<i \quad\text{risulta}\quad \mathbf{v}_k\bullet(\alpha-\beta) = 0$$
$$\beta > \gamma \Leftrightarrow \exists\, j \text{ tale che } \mathbf{v}_j\bullet(\beta-\gamma) > 0 \quad\text{e}\quad \forall\, k<j \quad\text{risulta}\quad \mathbf{v}_k\bullet(\beta-\gamma) = 0$$

si deduce che

se $i = j$: $\mathbf{v}_i\bullet[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)] > 0$ e $\forall\, k<i$ risulta $\mathbf{v}_k\bullet[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)] = 0$, cioè $\mathbf{v}_k\bullet(\alpha-\gamma) = 0$,

se $i < j$: $\mathbf{v}_i\bullet(\alpha-\beta)+ \mathbf{v}_i\bullet(\beta-\gamma) = \mathbf{v}_i\bullet(\alpha-\beta) > 0$ e $\forall\, k< i$ risulta $\mathbf{v}_k\bullet(\alpha-\gamma) = \mathbf{v}_k\bullet[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)] = \mathbf{v}_k\bullet(\alpha-\beta) = 0$,

se $i > j$: $\mathbf{v}_j\bullet(\alpha-\beta)+ \mathbf{v}_j\bullet(\beta-\gamma) = \mathbf{v}_j\bullet(\beta-\gamma) > 0$ e $\forall\, k<j$ risulta $\mathbf{v}_k\bullet(\alpha-\gamma) = \mathbf{v}_k\bullet[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)] = \mathbf{v}_k\bullet(\beta-\gamma) = 0$.

PROPOSIZIONE 4.3 *L'ordinamento* ord($\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$) *è*
<u>*monoidale*</u> *se e solo se* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ *sono linearmente indipendenti in* $\mathbf{Z}^n$*;*
<u>*monomiale*</u> *se e solo se è monoidale e il primo elemento non nullo di ogni colonna di V è positivo.*

Dimostrazione

Ogni ordinamento costruito come ord($\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$) rispetta le addizioni poiché $(\alpha+\gamma) - (\beta+\gamma) = \alpha-\beta$.
Se le n-uple sono linearmente indipendenti tale <u>ordinamento</u> è <u>totale</u> poiché, come appena visto, $\mathbf{u}=V(\alpha-\beta)^T$ può essere nullo solo se $\alpha = \beta$ (e se non è nullo c'è un "primo" elemento dall'alto con segno ben preciso).
Viceversa, se l'ordinamento è totale, una n-upla $\alpha-\beta\neq\mathbf{0}$ non produce lo stesso $\mathbf{u}$ della n-upla nulla, cioè l'unica soluzione del sistema $V(\alpha-\beta)^T=\mathbf{0}^T$ è $\alpha-\beta=\mathbf{0}$: quindi i vettori colonna di V sono indipendenti, onde V è invertibile e i vettori $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ sono indipendenti in $\mathbf{Q}^n$ e quindi in $\mathbf{Z}^n$.
Inoltre, il primo elemento non nullo di ogni colonna di V è positivo se e solo se, per ciascun i ($1 \le i \le n$), il vettore $\mathbf{u}_i$ prodotto di V per il vettore $\mathbf{e}_i$ ha il primo elemento dall'alto positivo: ma questo significa che, per ogni i ($1\le i \le n$), risulta $\mathbf{e}_i > \mathbf{0}$, cioè (proposizione 1.3) che l'ordinamento è <u>buono</u>. C.V.D.

Può valer la pena osservare che dato un ordinamento monoidale su T^n, quello che si ottiene rimuovendo una indeterminata è ancora monoidale su T^{n-1} (e analogamente partendo da un ordinamento monomiale). La matrice rappresentativa si trova eliminando la colonna corrispondente alla indeterminata e la prima riga dipendente dalle altre.

Se la matrice V ha coefficienti in $\mathbf{Q}$, invece che in $\mathbf{Z}$, valgono considerazioni analoghe. In particolare,

PROPOSIZIONE 4.4 *Siano* V *e* V' *due matrici* (*quadrate di ordine n*) *invertibili, a coefficienti in* $\mathbf{Q}$. *Se esiste una matrice triangolare bassa* W *avente gli elementi sulla diagonale tutti positivi tale che* V'=WV, *allora gli ordinamenti associati alle due matrici* (ordV e ordV'), *che sono sicuramente almeno monoidali, coincidono.*
Infatti la matrice prodotto

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 \\ a_{21}\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\mathbf{v}_1 + a_{n2}\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

trasforma la n-upla α in

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 \bullet \alpha \\ a_{21}\mathbf{v}_1 \bullet \alpha + \lambda_2\mathbf{v}_2 \bullet \alpha \\ \vdots \\ a_{n1}\mathbf{v}_1 \bullet \alpha + a_{n2}\mathbf{v}_2 \bullet \alpha + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \bullet \alpha \end{pmatrix}$$

e, per la positività degli elementi sulla diagonale,

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 \bullet \alpha > 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \bullet \alpha > 0;$$

se poi $\mathbf{v}_1 \bullet \alpha = 0$, si ha $a_{21}\mathbf{v}_1 \bullet \alpha + \lambda_2\mathbf{v}_2 \bullet \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \bullet \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_2 \bullet \alpha > 0$
e così via fino ad avere $\mathbf{v}_1 \bullet \alpha = 0, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \bullet \alpha = 0$ e quindi

$$a_{n1}\mathbf{v}_1 \bullet \alpha + a_{n2}\mathbf{v}_2 \bullet \alpha + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \bullet \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_n\mathbf{v}_n \bullet \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_n \bullet \alpha > 0.$$

C.V.D.

Come conseguenza si ha che da una matrice rappresentante un ordinamento se ne ricava un'altra rappresentante lo stesso ordinamento

a) moltiplicando una riga per un numero razionale positivo λ_i, cioè moltiplicando a sinistra per una matrice W diagonale della forma diag$(1,\ldots,\lambda_i,\ldots,1)$
b) sommando a una riga un multiplo δ, eventualmente < 0, di una riga "precedente", cioè (se la riga a cui si somma è la i-esima e l'altra è la j-esima, con $j < i$) moltiplicando a sinistra per una matrice triangolare bassa W avente tutti uni sulla diagonale, zeri altrove tranne che nella posizione (i,j), dove si trova δ.

ESEMPIO 4.5

La matrice di gREVLEX: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ può essere trasformata nella matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ aggiungendo la prima riga alla seconda; aggiungendo in passaggi successivi la seconda alla terza, e così via, la si trasforma nella matrice a elementi non negativi $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Quindi la matrice dell'ordinamento di eliminazione k-esima di Bayer-Stillmann potrà essere rappresentata da una matrice del tipo

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1\;\;1\;\;\cdots\;\;1\;\;1}}^{k} & \overbrace{\hphantom{0\;\;0\;\;\cdots\;\;0\;\;0}}^{n-k} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-k+1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\\vdots\\1\\1\end{matrix}}\right\} k-1 \end{array} \quad \text{o anche} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1\;\;1\;\;\cdots\;\;1\;\;1}}^{k} & \overbrace{\hphantom{0\;\;0\;\;\cdots\;\;0\;\;0}}^{n-k} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-k+1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\\vdots\\1\\1\end{matrix}}\right\} k-1 \end{array}$$

Quest'ultima mette in luce che se fallisce il confronto sul grado totale delle prime k indeterminate, si usa gREVLEX sulle ultime $n-k$; se fallisce anche quest'altro confronto, si usa gREVLEX sulle prime $k-1$.

Sempre dalle conseguenze della proposizione 4.4 illustrate sopra discende che

- a una matrice invertibile a coefficienti in **Q**, si può sostituire una matrice a coefficienti in **Z** formata di vettori riga indipendenti (rappresentati tutti gli elementi di una stessa riga come frazioni con lo stesso denominatore positivo q_i, basta moltiplicare a sinistra per la matrice diagonale diag$(q_1,\ldots, q_n)$)
- a una matrice invertibile a coefficienti in **Q**, che rappresenti un ordinamento monomiale si può sostituire una matrice a coefficienti razionali non negativi.

Quest'ultimo fatto generalizza quanto visto nell'esempio 4.5. Per dimostrarlo l'idea è di sommare opportuni multipli positivi della prima riga (che, se l'ordinamento rappresentato è monomiale, non contiene certamente elementi negativi) alle altre, facendo in modo che la seconda riga non contenga elementi negativi; poi si sommano opportuni multipli positivi della seconda riga alle altre, facendo in modo che la terza riga non contenga elementi negativi ecc.
Attenzione: nel caso di gREVLEX poteva essere sufficiente sommare la prima riga alle altre per ottenere una matrice a elementi positivi (anche se quasi tutti non nulli e quindi più scomoda di quella evidenziata). In altri casi può proprio non essere sufficiente.

Ad esempio, se partiamo da V=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 4 & -7 & -9 \end{pmatrix}$, sommando 4 volte la prima riga alla seconda e 7 volte la prima riga alla terza (cioè moltiplicando a sinistra per $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$) si arriva a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ che ha ancora un elemento negativo; sommando 9 volte la seconda riga alla terza (cioè moltiplicando a sinistra per $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$) si arriva finalmente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che è a elementi positivi. Lo stesso ordinamento indotto da questa (e dalle precedenti) matrici è fornito da $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che è ottenuta dividendo l'ultima riga per 20 (cioè moltiplicando a sinistra per diag(1,1,1/20))

5. NOTE FINALI

Da pag. 3

Verifichiamo che i monomi in n indeterminate di grado totale esattamente s sono $\binom{n+s-1}{s}$ e quelli di grado non maggiore di s sono $\binom{n+s}{s}$.

Dobbiamo conteggiare i possibili multigradi $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ con $\alpha_1+\dots+\alpha_n = s$. Riscrivo α come una $(s+n-1)$-upla di 1 e 0 (s uni e $n-1$ zeri pensati come elementi separatori; se $\alpha_i=0$ ci sono quindi 2 zeri "separatori" accostati):

$$(\underbrace{1,\dots,1}_{\alpha_1},0,\underbrace{1,\dots,1}_{\alpha_2},0,\dots\dots,0,\underbrace{1,\dots,1}_{\alpha_n})$$

Gli uni possono stare in s delle $(s+n-1)$ posizioni e quindi le $(s+n-1)$-uple possibili sono quante le possibili scelte di s posizioni tra $(s+n-1)$.

Passiamo ora a conteggiare i multigradi con $\alpha_1+\dots+\alpha_n = l \le s$. Basta fare le somme per l che va da 0 a s dei coefficienti binomiali $\binom{n+l-1}{l}$. Per induzione su s (base dell'induzione: se s=1, $\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}=1+n=\binom{n+1}{1}$)

da $\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n+l-1}{l}+\dots+\binom{n+s-2}{s-1}=\binom{n+s-1}{s-1}$,

si ha $\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n+s-2}{s-1}+\binom{n+s-1}{s}=\binom{n+s-1}{s-1}+\binom{n+s-1}{s}=\binom{n+s}{s}$. C.V.D.

Da pag. 5

Listiamo i primi multigradi in un ordine di Bayer e Stillman nel caso n=3 e

k=1: (0,0,0)<(0,0,1)<(0,1,0)<(0,0,2)<(0,1,1))<(0,2,0)<(0,0,3))<(0,1,2)<(0,2,1)< ….*infinite terne con prima componente* 0…
<(1,0,1)<(1,1,0)<(1,0,2)< ….*infinite terne con prima componente* 1…
<(2,0,1)<(2,1,0)<(2,0,2)< …

k=2: (0,0,0)<(0,0,1)< …<(0,0,h)< ….*infinite terne con prima coppia a somma zero*…
<(0,1,0)<(1,0,0)<(0,1,1)< (1,0,1)<…<(0,1,h)< (1,0,h)….*infinite terne con prima coppia a somma* 1…
<(0,2,0)<(1,1,0)<(2,0,0)< …<(0,2,h)<(1,1,h)<(2,0,h)< ….*infinite terne con prima coppia a somma* 2…
<(0,3,0)<(1,2,0)<(2,1,0)<(3,0,0)< …<(0,3,h)<(1,2,h)<(2,1,h)<(3,0,h)<…

Listiamo i primi multigradi in un ordine di Bayer e Stillman nel caso n=4 e

k=2: (0,0,0)<(0,0,0,1)< (0,0,1,0)< (0,0,0,2)< (0,0,1,1)< (0,0,2,0)< …<(0,0,0,h)< …<(0,0,0,h)<… *infinite quaterne* …
<(0,1,0,0)<(1,0,0,0)<(0,1,0,1)< (1,0,0,1)<(0,1,1,0)<(1,0,1,0)<(0,1,0,2)< (1,0, 0,2)<(0,1,1,1)<*infinite quaterne*
<(0,2,0,0)<(1,1,0,0)<(2,0,0,0)< (0,2,0,1)<….

6. ESERCIZI

1) Ordinare le seguenti quaterne: (2,3,1,4) (4,1,0,5) (3,0,2,4) (3,2,2,3) (4,0,3,3) (4,2,0,4) (4,2,0,3) secondo gli ordinamenti: LEX, grLEX, gREVLEX, InvLEX, misto con k=1, Bayer-Stillman con k=2, usando le definizioni date nei paragrafi 2 e 3. (soluzione)

2) Costruire matrici rappresentative degli ordinamenti appena elencati nel caso n=4 e verificare la correttezza dei risultati dell'esercizio 1. (soluzione)

3) Come deve essere fatta una matrice quadrata di ordine 3 a elementi interi perché rappresenti un ordinamento monomiale in $\mathbf{N}^3$ tale che $x_1>x_2>x_3$? (soluzione)

4) Scrivere almeno 6 matrici quadrate di ordine 3 a elementi interi che rappresentino ordinamenti monomiali a due a due distinti, tutti con ugual ordinamento sulle variabili. (soluzione)

7. SOLUZIONI

1) LEX: (4,2,0,4)>(4,2,0,3)>(4,1,0,5) >(4,0,3,3)>(3,2,2,3)>(3,0,2,4)>(2,3,1,4)

grLEX: (4,2,0,4)>(4,1,0,5) >(4,0,3,3)>(3,2,2,3)>(2,3,1,4)>(4,2,0,3)>(3,0,2,4)

gREVLEX: (3,2,2,3)>(4,0,3,3)>(4,2,0,4)>(2,3,1,4)>(4,1,0,5)>(4,2,0,3)>(3,0,2,4)

invLEX: (4,1,0,5)>(3,0,2,4)>(2,3,1,4)> (4,2,0,4)>(4,0,3,3)>(3,2,2,3)>(4,2,0,3)

misto con k=1: (4,2,0,4)>(4,1,0,5)>(4,0,3,3)>(4,2,0,3)>(3,2,2,3)>(3,0,2,4)>(2,3,1,4)

Bayer-Stillman con k=2: (4,2,0,4)>(4,2,0,3)>(3,2,2,3)>(2,3,1,4)>(4,1,0,5)>(4,0,3,3)>(3,0,2,4)

2) LEX: matrice identica di ordine 4; grLEX: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; gREVLEX: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; invLEX: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; misto con k=1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [12]; Bayer-Stillman con k=2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[12] Notare che questa matrice rappresenta anche l'ordinamento di Bayer-Stillman con k=1.

3) Perché una matrice $\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$ a elementi interi rappresenti un ordinamento monomiale tale che $x_1>x_2>x_3$ bisogna che la matrice abbia determinante non nullo, i primi elementi non nulli di ogni colonna siano positivi e sia positivo il primo prodotto non nullo delle righe della matrice per il vettore $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2=(1,-1,0)$ e similmente per i vettori $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$. Quest'ultima richiesta si traduce nelle seguenti condizioni:

$v_{11}>v_{12}$ oppure $v_{11}=v_{12}$ e $v_{21}>v_{22}$ oppure $v_{21}=v_{22}$ e $v_{31}>v_{32}$
$v_{11}>v_{13}$ oppure $v_{11}=v_{13}$ e $v_{21}>v_{23}$ oppure $v_{21}=v_{23}$ e $v_{31}>v_{33}$
$v_{12}>v_{13}$ oppure $v_{12}=v_{13}$ e $v_{22}>v_{23}$ oppure $v_{22}=v_{23}$ e $v_{32}>v_{33}$

4) matrice identica di ordine 3, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le prime tre matrici rappresentano LEX, grLEX, gREVLEX che in $\mathbf{N}^3$ sono, come già osservato, 3 ordinamenti distinti.
La quarta rappresenta un ordinamento misto con k=1, distinto dai precedenti, poiché ad es. (1,1,0)<(1,0,2) (diverso da LEX), (1,1,1)<(2,0,0) (diverso dai due ordini graduati).
La quinta rappresenta un ordinamento di Bayer-Stillman con k=2 ed è diverso da LEX e dal quarto poiché (1,0,0)<(0,2,0) e dai due graduati poiché (1,0,2)<(1,1,0).
La sesta matrice dà luogo a un ordinamento che è sicuramente diverso dai primi 4 (stessi confronti operati per la quinta) ed è diverso dal quinto, poiché nell'ordinamento di Bayer-Stillman (2,0,0)<(1,1,1) mentre in questo (1,1,1)<(2,0,0).
Si osservi che anche gli ultimi tre ordinamenti conservano l'ordine delle variabili [(13)].

Si è scelto di elencare matrici che si erano già incontrate, ma si sarebbero anche potute prendere matrici come $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ che producono tutte ordinamenti diversi dai precedenti. Infatti in tutti questi ordinamenti:
(2,0,0)<(1,1,2) mentre in LEX e nell'ordinamento misto succede il contrario;
(3,1,1)<(1,2,3) mentre negli ordini graduati succede il contrario;
(1,2,0)<(2,0,1) mentre negli ordini di Bayer-Stillman e nel sesto visto sopra vale il contrario.
Queste tre matrici rappresentano tre ordinamenti diversi tra loro; infatti
$(1,3,0) <_{\mathrm{I}} (0,0,5)$, mentre $(1,3,0) >_{\mathrm{II}} (0,0,5)$ e $(1,3,0) >_{\mathrm{III}} (0,0,5)$
$(2,5,0) >_{\mathrm{II}} (0,0,9)$ e $(2,5,0) <_{\mathrm{III}} (0,0,9)$

Se si sono scelte matrici diverse, basta verificare che soddisfano le condizioni indicate nell'esercizio 3 e che danno luogo a ordinamenti diversi, confrontando terne come si è fatto sopra.

---

(13) Non va invece bene $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che - rappresenta invLEX e - varia l'ordine delle variabili.