ESERCIZI SUL CAPITOLO V

1. Nell'anello $k[x,y]$, con l'ordinamento grLEX ($x>y$), è data la terna ordinata di polinomi $f_1=x^2y-2x+y$, $f_2 = 3xy^2+x+1$, $f_3 = -y^3-xy+x$.
   a) Trovare le sizigie elementari dei LT dei tre polinomi, evidenziandone il multigrado
   b) Verificare che $S=(-xy^2-y^3+3xy, 3x^2y-x^2+3y^2, 8x^3-x^2y+9xy)$ è una sizigia dei LT dei tre polinomi
   c) Scrivere S come somma di sizigie omogenee, specificandone i multigradi
   d) Scrivere S come combinazione polinomiale di sizigie elementari

2. Usando l'algoritmo ingenuo, calcolare la base di Gröbner ridotta rispetto all'ordinamento grLEX ($x>y$) dell'ideale generato dalla base ordinata $F = (f_1=xy-1, f_2=x^2+y^2-2, f_3=y^3-1)$.

3. Consideriamo in $k[x,y]$ l'ordinamento LEX ($x>y$). Trovare la base di Gröbner ridotta dell'ideale generato dalla base $F=(f_1=x^3-2xy, f_2= x^2y-y^2+x)$ che è lo stesso dell'esempio 8.3. Quanti sono gli elementi della base ridotta?

4. Calcolare la base di Gröbner ridotta rispetto all'ordinamento gREVLEX ($x>y>z>w$) dell'ideale generato da $f_1=x^{n+1}-yz^{n-1}w$, $f_2=xy^{n-1}-z^n$, $f_3=x^nz-y^nw$, ove $n\geq 1$. Mostrare che contiene il polinomio $z^{n^2+1}-y^{n^2}w$.

5. Stabilire se il polinomio $f=x^4y+xy^4-2y^2+2$ appartiene all'ideale I generato in $k[x,y]$ da $F=(f_1=x^2y-y+1, f_2=xy^2+x-1)$.

6. Verificare che:
   a) una base dell'ideale $\langle x^2y, yz^2\rangle\cap\langle xy^2\rangle$ è $\{x^2y^2, xy^2z^2\}$
   b) una base dell'ideale $\langle x^2y, y-z\rangle\cap\langle xy^2\rangle$ è $\{x^2y^2, xy^2(y-z)\}$

7. Trovare il MCD tra il polinomio $f=x^3y^2-2x^3y+x^3+x^2y^3-4x^2y^2+3x^2y-2xy^3+3xy^2+y^3$ e le sue due derivate parziali prime rispetto a x e a y (converrà usare qualche sistema di calcolo simbolico come ad es. CoCoa o Mathematica).

SOLUZIONI

1. Abbiamo come ordinamento grLEX ($x>y$) e la terna ordinata
$$F = (f_1 = x^2y-2x+y, f_2 = 3xy^2+x+1, f_3 = -y^3-xy+x).$$
   a) $S_{12}=(y,-x/3,0)$, $S_{13}=(y^2,0,x^2)$, $S_{23}=(0,y/3,x)$. S_{12} è omogenea di multigrado (2,2), S_{13} è omogenea di multigrado (2,3), S_{23} è omogenea di multigrado (1,3).
   b) $(-xy^2-y^3+3xy)x^2y+(3x^2y-x^2+3y^2)(3xy^2)+(8x^3-x^2y+9xy)(-y^3)=0$.
   c) Guardare al punto precedente quali termini della sizigia S (moltiplicati per i $\mathrm{LT}(f_i)$) danno origine agli stessi multigradi. Si troverà
$$S = (-xy^2,3x^2y,8x^3) + (-y^3,0,-x^2y) + (3xy,-x^2,0) + (0,3y^2,9xy):$$
   i multigradi delle 4 sizigie omogenee sono rispettivamente (3,3), (2,4), (3,2), (1,4).
   d) Scomporre ogni sizigia omogenea usando la tecnica illustrata nel teorema 5.5. Si avrà $(-xy^2,3x^2y,8x^3)=-xyS_{12}+8x^2S_{23}$, $(-y^3,0,-x^2y)=-yS_{13}$, $(3xy,-x^2,0)=3xS_{12}$, $(0,3y^2,9xy)=9yS_{23}$. Quindi $S=(-xy+3x)S_{12}-yS_{13}+(8x^2+9y)S_{23}$.

2. I polinomi assegnati hanno LT già in evidenza. I resti nella divisione per F dei polinomi sizigietici sono:
$S(f_1, f_2)^F = (-x - y^3 + 2y)^F = (-x - (y^3 - 1) + 2y - 1)^F = -x + 2y - 1 \Rightarrow F=(f_1, f_2, f_3, f_4 = x - 2y + 1)$
$S(f_1, f_3)^F = (-y^2 + x)^F = (-y^2 + (x-2y+1) + 2y - 1)^F = -y^2 + 2y - 1 \Rightarrow F=(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 = y^2 - 2y + 1)$
$S(f_2, f_3)^F = (y^5 - 2y^3 + x^2)^F = ((y^3-1)(y^2-2) + (x^2 + y^2 - 2))^F = 0 \Rightarrow F=(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$
Prima di proseguire, visto che $LT(f_4)$ divide $LT(f_1)$ e $LT(f_2)$, dividiamo i polinomi f_1, f_2 tramite i restanti polinomi di F:
$f_1 = yf_4 + 2f_5 + 3(y - 1) \Rightarrow$ in F si può sostituire a f_1 il polinomio $y - 1$, che divide f_3 ed f_5 i quali possono quindi essere rimossi $\Rightarrow F=(y - 1, f_2, f_4)$
$f_2 = (x + 2y - 1)f_4 + (5y + 1)(y - 1) \Rightarrow f_2$ può quindi essere rimosso da F $\Rightarrow F=(y - 1, f_4)$.
Arriviamo così alla base $F=(y - 1,\ x - 2y + 1)$, che è palesemente di Gröbner e minimale, ma non ridotta.
Dividendo il secondo polinomio per $y - 1$ si vede che la base ridotta corrispondente è $(y - 1,\ x - 1)$.

3. Osserviamo che per scrivere il polinomio $f_2 = x^2y - y^2 + x$ con monomi decrescenti nell'ordinamento LEX dovremmo in realtà scrivere $f_2 = x^2y + x - y^2$. Partendo da $f_1 = x^3 - 2xy$ e $f_2 = x^2y + x - y^2$ si ha $S(f_1, f_2) = -x^2 - xy^2$. Conviene rinominare i polinomi della base come segue:
$$G = (g_1 = x^2 + xy^2,\ g_2 = x^2y + x - y^2 \text{ e } g_3 = x^3 - 2xy)$$
e operare la divisione degli elementi della base ordinata G per G stessa (altrimenti il numero di elementi della base esplode). A ogni passo rinominiamo gli elementi della base in modo che siano ordinati per multigrado dei LT crescente e chiamiamo G questa nuova base:
$(g_2)^G = -xy^3 + x - y^2$, $(g_3)^G = -xy - y^3 \Rightarrow G=(g_1 = xy + y^3,\ g_2 = xy^3 - x + y^2,\ g_3 = x^2 + xy^2)$
$(g_2)^G = -x - y^5 + y^2 \Rightarrow G=(g_1 = x + y^5 - y^2,\ g_2 = xy + y^3,\ g_3 = x^2 + xy^2)$
$(g_2)^G = -y^6 + 2y^3 \Rightarrow G=(g_1 = y^6 - 2y^3,\ g_2 = x + y^5 - y^2,\ g_3 = x^2 + xy^2)$
$(g_3)^G = 0 \Rightarrow G=(g_1 = y^6 - 2y^3,\ g_2 = x + y^5 - y^2)$: LT primi tra loro e quindi base di Gröbner (vedi algoritmo di Buchberger; alternativamente: il resto nella divisione di $S(g_1, g_2)$ per G è zero).
Dunque la base di Gröbner ridotta è formata da due soli elementi (mentre con grLEX era formata da 4 elementi), che però contengono termini con grado totale più elevato di quelli ottenuti con grLEX.

4. Innanzi tutto per trovare i LT dei tre polinomi conviene utilizzare la matrice associata all'ordinamento, che è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Quindi in ciascuna delle coppie di multigradi $(n+1,0,0,0)$ e $(0,1,n-1,1)$, $(1, n-1,0,0)$ e $(0,0,n,0)$, $(n,0,1,0)$ e $(0,n,0,1)$ il multigrado maggiore è il primo. Dunque
$LT(f_1) = x^{n+1}$, $LT(f_2) = xy^{n-1}$, $LT(f_3) = x^nz$ e
m.c.m.$(LT(f_1), LT(f_2)) = x^{n+1}y^{n-1}$, m.c.m.$(LT(f_1), LT(f_3)) = x^{n+1}z$, m.c.m.$(LT(f_2), LT(f_3)) = x^ny^{n-1}z$.
Anche applicando l'algoritmo di Buchberger non si riesce ad evitare di andare nel ramo di IF secondario. Quindi:
$B=\{(1,2), (1,3), (2,3)\}$, $G=\{f_1 = x^{n+1} - yz^{n-1}w, f_2 = xy^{n-1} - z^n, f_3 = x^nz - y^nw\}$
Esamino (1,2)
$(S(f_1, f_2))^G = (x^nz^n - y^nz^{n-1}w)^G = (z^{n-1} f_3)^G = 0$: posso eliminare la coppia (1,2), senza aggiungere polinomi alla base.
Esamino (1,3)
$(S(f_1, f_3))^G = (xy^nw - yz^nw)^G = (yw\, f_2)^G = 0$: posso eliminare la coppia (1,3), senza aggiungere polinomi alla base.
Esamino (2,3)

$S(f_2, f_3) = y^{2n-1}w - x^{n-1}z^{n+1}$ ha termini non divisibili per i LT già noti, quindi è già il resto nella divisione per la base data e va aggiunto alla base, che ora diventa (tenendo conto dell'ordinamento monomiale e dell'opportunità di avere coefficiente direttore =1):
G={ $f_1=x^{n+1}-yz^{n-1}w, f_2=xy^{n-1}-z^n, f_3=x^nz-y^nw, f_4= x^{n-1}z^{n+1}-y^{2n-1}w$ }
mentre B={(1,4), (2,4), (3,4)}.
Esamino (1,4)
$(S(f_1, f_4))^G = (x^2y^{2n-1}w - yz^{2n}w)^G = (yw(x^2y^{2n-2}-z^{2n}))^G= (yw(xy^{n-1}+z^n)\, f_2)^G = 0$: posso eliminare la coppia (1,4), senza aggiungere polinomi alla base.
Esamino (3,4)
$(S(f_3, f_4))^G = (xy^{2n-1}w - y^nz^nw)^G = (y^nw(xy^{n-1}-z^n))^G= (y^nwf_2)^G = 0$: posso eliminare la coppia (3,4), senza aggiungere polinomi alla base.
Esamino (2,4)
$S(f_2, f_4) = y^{3n-2}w - x^{n-2}z^{2n+1}$ ha termini non divisibili per i LT già noti, quindi è già il resto nella divisione per la base data e va aggiunto alla base, che ora diventa:
G={ $f_1=x^{n+1}-yz^{n-1}w, f_2=xy^{n-1}-z^n, f_3=x^nz-y^nw, f_4= x^{n-1}z^{n+1}-y^{2n-1}w, f_5= x^{n-2}z^{2n+1}- y^{3n-2}w$}
mentre B={(1,5), (2,5), (3,5), (4,5)}.
Guardando i polinomi $f_3=x^nz-y^nw$, $f_4= x^{n-1}z^{n+1}-y^{2n-1}w$, $f_5= x^{n-2}z^{2n+1}- y^{3n-2}w$ si nota che hanno tutti una struttura simile che si potrebbe riassumere così:

$$f_{3+i}= x^{n-i}z^{in+1}- y^{(i+1)n-i}w \text{ per } i=0,1,2.$$

Allora se al passo $i-1\geq 0$ si è ottenuto che

$S(f_2, f_{2+i}) = f_{3+i}= x^{n-i}z^{in+1}- y^{(i+1)n-i}w$,

G={ $f_1=x^{n+1}-yz^{n-1}w$, $f_2=xy^{n-1}-z^n$, $f_3=x^nz-y^nw$, …, $f_{3+i}= x^{n-i}z^{in+1}- y^{(i+1)n-i}w$ },

B={(1,3+i), (2, 3+i), (3, 3+i),…, (2+i, 3+i)},

al passo i si dovranno considerare i resti nella divisione per G dei polinomi sizigietici: $S(f_1, f_{3+i})$, $S(f_2, f_{3+i})$, …, $S(f_{3+j}, f_{3+i})$,…, $S(f_{2+i}, f_{3+i})$. Ora
$(S(f_1, f_{3+i}))^G = (x^iy^{(i+1)n-i}w - y^nz^{in}w)^G = (y^nw(x^iy^{i(n-1)}-z^{in}))^G=(y^nw(x^{i-1}y^{(i-1)(n-1)}+\ldots+z^{(i-1)n})f_2)^G = 0$: posso eliminare la coppia (1,3+i), senza aggiungere polinomi alla base.

Per ogni j con $0<j<i\leq n$:
$(S(f_{3+j}, f_{3+i}))^G = (x^{i-j}y^{(i+1)n-i}w - y^{(j+1)n-j}z^{(i-j)n}w)^G=(y^{(j+1)n-j}w(x^{i-j}y^{(i-j)(n-1)}-z^{(i-j)n}))^G=$
$=(y^{(j+1)n-j}w(x^{i-j-1}y^{(i-j-1)(n-1)}+\ldots+z^{(i-j-1)n})f_2)^G = 0$: posso eliminare la coppia (3+j, 3+i), senza aggiungere polinomi alla base.

Per ogni i con $0<i<n$
$S(f_2, f_{3+i}) = y^{(i+2)n-(i+1)}w - x^{n-(i+1)}z^{(i+1)n+1}$ ha termini non divisibili per i LT già noti, quindi è già il resto nella divisione per la base data e va aggiunto alla base: notiamo che si tratta di $-f_{4+i}$.

Se invece $i=n$, f_2 e f_{3+n} hanno termini direttori (xy^{n-1} e z^{nn+1}) primi tra loro: quindi l'algoritmo termina con l'analisi della coppia (2+i, 3+i).
Abbiamo visto due cose: che il grado degli elementi della base cresce quadraticamente rispetto a n e che il tipo di ordinamento scelto permette comunque di contenere il numero di passaggi necessari per trovare una base di Gröbner (e soprattutto non fa sprecare molti passaggi per vuotare B). La base è ridotta perché, come osservato, i LT già noti non dividono i termini dei polinomi che si vanno ad aggiungere via via alla base (i cui LT hanno multigrado maggiore dei precedenti e quindi non possono dividere i termini dei polinomi precedenti).

5. È necessario determinare una base di Gröbner per l'ideale I, rispetto ad un ordinamento conveniente. Possiamo provare con grLEX, $x>y$.
$(S(f_2, f_1))^F = x(xy^2+x-1)-y(x^2y-y+1)=x^2+y^2-x-y$: $G=(f_1=x^2y-y+1, f_2=xy^2+x-1, f_3=x^2+y^2-x-y)$
$(S(f_3, f_1))^G = y(x^2+y^2-x-y)-(x^2y-y+1)=y^3-xy-y^2+y-1$: può essere sostituito a $f_1 \Rightarrow$ riordinando
$G=(g_1=x^2+y^2-x-y, g_2=y^3-xy-y^2+y-1, g_3=xy^2+x-1)$
$(S(g_1, g_3))^G = (y^2(x^2+y^2-x-y)-x(xy^2+x-1))^G = (y^4-xy^2-y^3-x^2+x)^G = (-g_1+yg_2)^G=0$
$(S(g_2, g_3))^G = (x(y^3-xy-y^2+y-1)-y(xy^2+x-1))^G = (-x^2y-xy^2-x+y)^G = (-yg_1+g_2-g_3)^G=0$.
L'algoritmo fine garantisce che anche l'ultima sizigia non va a incrementare i polinomi della base G (visto che i LT sono primi tra loro) e quindi G è la base di Gröbner rispetto a grLEX, $x>y$. Ora il polinomio $f=x^4y+xy^4-2y^2+2$ appartiene all'ideale se e solo se presenta resto nullo nella divisione per G (ordinata in qualunque modo).
Si verifica che $f=g_1(x^2y-y^3+xy+y^2+y)+g_3(y^2-y)+g_2(y^2-y-2)$ e quindi il polinomio sta in I.

6. a) La base di Gröbner (ridotta) rispetto a LEX con $t>x>y>z$ di $\langle tx^2y, tyz^2, (1-t)xy^2\rangle$ è
$$\{tx^2y, txy^2-xy^2, tyz^2, x^2y^2, xy^2z^2\}$$
b) La base di Gröbner (ridotta) rispetto a LEX con $t>x>y>z$ di $\langle tx^2y, t(y-z), (1-t)xy^2\rangle$ è
$$\{tx^2z, txz^2-xy^2, ty-tz, x^2y^2, xy^3-xy^2z\}.$$

7. Le derivate parziali sono rispettivamente $f_x=3x^2y^2-6x^2y+3x^2+2xy^3-8xy^2+6xy-2y^3+3y^2$ e $f_y=2x^3y-2x^3+3x^2y^2-8x^2y+3x^2-6xy^2+6xy+3y^2$ e conviene cominciare a trovare il loro mcm (e poi il MCD) visto che hanno grado minore di quello di f. La base di Gröbner (ridotta, a meno dei coefficienti direttori) rispetto a LEX con $t>x>y$ di
$$\langle t(3x^2y^2-6x^2y+3x^2+2xy^3-8xy^2+6xy-2y^3+3y^2), (1-t)(2x^3y-2x^3+3x^2y^2-8x^2y+3x^2-6xy^2+6xy+3y^2)\rangle$$
è
$$\{-6tx^2y+6tx^2+10txy^4-12txy^3-4txy^2+12txy-10ty^4+2ty^3+6ty^2+18x^3y^2-36x^3y+18x^3+ \\ +27x^2y^3-99x^2y^2+99x^2y-27x^2-54xy^3+108xy^2-54xy+27y^3-27y^2,$$
$$10txy^5-22txy^4+12txy^3-10ty^5+12ty^4+18x^3y^3-54x^3y^2+54x^3y-18x^3+ \\ +27x^2y^4-126x^2y^3+198x^2y^2-126x^2y+27x^2-54xy^4+162xy^3-162xy^2+54xy+27y^4-54y^3+27y^2,$$
$$-6x^4y^2+12x^4y-6x^4-13x^3y^3+43x^3y^2-39x^3y+9x^3-6x^2y^4+43x^2y^3-66x^2y^2+27x^2y+ \\ +12xy^4-39xy^3+27xy^2-6y^4+9y^3\}.$$
Dunque un [1] mcm(f_x, f_y) è
$$6x^4y^2-12x^4y+6x^4+13x^3y^3-43x^3y^2+39x^3y-9x^3+6x^2y^4-43x^2y^3+66x^2y^2-27x^2y-12xy^4+39xy^3-27xy^2+ \\ +6y^4-9y^3.$$

Dividendo per questo polinomio il prodotto $f_x \cdot f_y$:
$$6x^5y^3-18x^5y^2+18x^5y-6x^5+13x^4y^4-62x^4y^3+94x^4y^2-54x^4y+9x^4+6x^3y^5-62x^3y^4+152x^3y^3-132x^3y^2+ \\ +36x^3y-18x^2y^5+94x^2y^4-132x^2y^3+54x^2y^2+18xy^5-54xy^4+36xy^3-6y^5+9y^4,$$
si ottiene $xy-x-y$: dunque MCD(f_x, f_y) è un polinomio irriducibile.
Allora per stabilire quale polinomio è MCD(f, f_x, f_y) basta dividere f per $xy-x-y$: si scopre che il resto è nullo e di conseguenza MCD(f, f_x, f_y)$=xy-x-y$.
Se invece si fosse trovato un resto non nullo, i tre polinomi sarebbero stati primi tra loro.

[1] Non ci preoccupiamo qui di trovare il mcm con coefficiente direttore 1, anche perché - come si vedrà subito - il coefficiente 6 è più comodo per trovare il MCD con coefficiente direttore 1. Non sarebbe neppure stato necessario cambiare tutti i segni, rispetto all'ultimo elemento della base di Gröbner trovata: è stata una scelta dettata dal gusto.