CAPITOLO VII. ELIMINANDO ED ESTENDENDO
PARTE 1. VERSIONE ALGEBRICA

Vogliamo sviluppare una teoria che giustifichi (o meglio dia una misura di quanto siano adeguate) le procedure suggerite nel Capitolo 6 per trovare tutte le possibili soluzioni di un sistema di equazioni algebriche.
Per garantire il passo di estensione avremo bisogno della nozione di risultante di due polinomi in una o più indeterminate (e di una generalizzazione di tale concetto): di fatto questa costituirà la parte più corposa del capitolo (anche se meramente tecnica).

1. PASSO DI ELIMINAZIONE

Per risolvere un sistema di equazioni in più incognite è spontaneo cercare di eliminare da alcune delle sue equazioni un po' di variabili, puntando magari ad ottenere almeno un'equazione in una sola incognita (che poi si può cercare di risolvere con metodi algebrici o numerici). Già nel semplice caso dei sistemi lineari quest'ultima richiesta non è sempre soddisfacibile; non solo, sappiamo per esperienza che cercare di eliminarne le incognite senza una ben precisa strategia può risultare molto oneroso, se il numero di incognite è elevato: questo è il motivo che porta all'introduzione del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan per i sistemi lineari.
La situazione si presenta ancora più complicata quando i polinomi che entrano in gioco nelle equazioni sono di grado superiore al primo.

ESEMPIO 1.1 Dal sistema $\begin{cases} x+y+z^2=1 \\ x+y^2+z=1 \\ x^2+y+z=1 \end{cases}$ si può cercare di eliminare l'incognita x sottraendo la prima equazione dalla seconda e sostituendo [(1)] nella terza $x=1-y-z^2$. Si ottiene:
$\begin{cases} x+y+z^2=1 \\ y^2-y-z^2+z=0 \\ y^2+2yz^2-y+z^4-2z^2+z=0 \end{cases}$ che, per sottrazione della seconda equazione dalla terza, diventa
$\begin{cases} x+y+z^2=1 \\ y^2-y-z^2+z=0 \\ 2yz^2+z^4-z^2=0 \end{cases}$ che si spezza nei due sistemi: $\begin{cases} x+y=1 \\ y^2-y-z^2+z=0 \\ z^2=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y+z^2=1 \\ y^2-y-z^2+z=0 \\ 2y+z^2-1=0 \end{cases}$.
Nel primo sistema è in evidenza un'equazione nella sola z. Sostituendone la soluzione $z=0$ nella seconda equazione si evidenzia un'equazione nella sola y; sostituendone le soluzioni nella prima si trovano le due soluzioni (1,0,0) e (0,1,0). Nel secondo sistema si può evidenziare un'equazione nella sola z: $\begin{cases} x+y+z^2=1 \\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2 \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2\right)-z^2+z=0 \end{cases}$. Basta ora risolvere [(2)] l'equazione $z^4-4z^2+4z-1=0$ e sostituire nelle altre due equazioni per trovare tutte (o no? [(3)]) le soluzioni del sistema assegnato.

[(1)] Sostituire $x=1-y-z^2$ in $x^2+y+z=1$ equivale a dividere $x^2+y+z-1$ per $x+y+z^2-1$ e sostituire alla prima equazione il resto in questa divisione, uguagliato a zero.
[(2)] Osservare che $z^4-4z^2+4z-1=[z^2-(2z-1)]\,[z^2+(2z-1)]=(z-1)^2(z^2+2z-1)$. Dunque si ricaveranno 3 soluzioni per l'equazione, che origineranno ciascuna una soluzione per il sistema. Da notare che le soluzioni (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) sono doppie (perché?) e quindi, conteggiando le soluzioni con la loro molteplicità, ce ne sono 8 in totale, come ci si aspetta, essendo il sistema di ottavo grado e per l'osservazione 3.5 del Capitolo VI.
[(3)] Il dubbio è lecito: abbiamo davvero dedotto tutte le possibili conseguenze dal sistema iniziale? Senza l'osservazione che conclude la nota precedente dovremmo preoccuparci di capire dove sono sparite le soluzioni attese: sono multiple, sono all'infinito o ce le siamo semplicemente perse per strada? Si veda la risposta negli Esercizi SUL CAPITOLO VII.

L'impressione che si ricava da questa soluzione è ci voglia un certo colpo d'occhio ed una notevole fortuna per riuscire ad eliminare tutte le incognite che si possono eliminare e che per di più in generale non ci sia la ragionevole certezza di non aver saltato soluzioni.

A tutti questi problemi si dà risposta se si riesce a fornire un procedimento algoritmico di eliminazione delle incognite che nel contempo assicuri che si tiene conto di tutte le possibili conseguenze delle equazioni di partenza.
Sappiamo che LEX è un ordinamento monomiale che fissato un certo ordine sulle indeterminate (ad esempio $x_1>x_2>\ldots>x_n$) privilegia i polinomi contenenti x_1 e, tra quelli che non contengono x_1, privilegia i polinomi contenenti x_2 e così via: quindi dato un sistema della forma

$$f_1(x_1,\ldots,x_n)=0, \quad f_2(x_1,\ldots,x_n)=0, \quad \ldots, \quad f_t(x_1,\ldots,x_n)=0$$

se si costruisce una base di Gröbner $G=\{g_1,\ldots,g_s\}$ dell'ideale $I=<f_1,\ldots,f_t>$ rispetto a LEX (con $x_1>x_2>\ldots>x_n$) si perviene ad un sistema

$$g_1(x_1,\ldots,x_n)=0, \quad g_2(x_1,\ldots,x_n)=0, \quad \ldots, \quad g_s(x_1,\ldots,x_n)=0$$

equivalente a quello dato, che ne contiene tutte le conseguenze e in cui (ordinando i polinomi per LT decrescenti) a partire da una certa equazione in poi non si trova più l'incognita x_1, da un'altra equazione in poi non si trova più l'incognita x_2 e così via: d'altra parte, il fatto che siano presenti tutte le conseguenze del sistema dato garantisce che, se l'equazione con il LT minore contiene ancora più di una incognita, il sistema non nasconde tra le sue conseguenze un'equazione in una incognita sola e quindi le soluzioni (se sono estendibili) dipenderanno comunque da parametri.

Dunque questa sembra essere una buona strategia. Ricordiamo però che l'idea che sta dietro il metodo di soluzione per eliminazione è di ricondurre il problema - ogni volta che si riesce ad eliminare una incognita - ad una dimensione più bassa: bisogna dunque poter assicurare che se consideriamo un sottosistema di

$$g_1(x_1,\ldots,x_n)=0, g_2(x_1,\ldots,x_n)=0, \ldots, g_s(x_1,\ldots,x_n)=0$$

che non contiene le prime h (con $h=1,2,\ldots,n-1$) incognite ci ritroviamo nella stessa situazione di quando si esamina il sistema completo: presenza di tutte le conseguenze del sottosistema ed equazioni tali che a partire da una certa equazione in poi non si trova più l'incognita x_{h+1}, da un'altra equazione in poi non si trova più l'incognita x_{h+2} e così via.
Cominciamo con l'osservare che $I_h=I\cap k[x_{h+1},\ldots,x_n]$ è un ideale di $A_h=k[x_{h+1},\ldots,x_n]$ [(4)]: esso viene detto ***ideale di eliminazione h-esima***.
Esso contiene tutte le conseguenze del sistema originario che non contengono le prime h incognite.
Ovviamente $G_h=G\cap k[x_{h+1},\ldots,x_n]$ è un sottoinsieme di $I_h=I\cap k[x_{h+1},\ldots,x_n]$; la domanda cui si deve rispondere è allora:

G_h è una base di Gröbner dell'ideale I_h rispetto a LEX (con $x_{h+1}>x_{h+2}>\ldots>x_n$)?

La risposta è affermativa; anzi vale la seguente generalizzazione [(5)]

TEOREMA 1.2 (di eliminazione) *Siano:* I *un ideale di* $k[x_1,\ldots,x_n]$, G *una sua base di Gröbner rispetto ad un ordinamento monomiale di eliminazione h-esima* [(6)] σ. *L'insieme* $G_h=G\cap k[x_{h+1},\ldots,x_n]$ *è una base di Gröbner per* $I_h=I\cap k[x_{h+1},\ldots,x_n]$ *rispetto all'ordinamento indotto da* σ *sui monomi di* $k[x_{h+1},\ldots,x_n]$.

[(4)] Attenzione: se $h>0$, non di A, poiché il prodotto di uno qualsiasi dei polinomi di I_h per x_1 non appartiene a I_h.
[(5)] Essa è utile in quei problemi, come la riduzione in forma implicita o il calcolo della base dell'intersezione di due ideali (vedi Capitolo V teorema 12.2) in cui non è necessario risolvere il sistema ma solo eliminare le incognite-parametro e quindi basta riuscire ad eliminare le prime h indeterminate, non importa in che ordine.
[(6)] Cioè un qualunque ordinamento in cui ogni monomio contenente una delle prime h indeterminate è considerato maggiore di tutti i monomi che non ne contengono alcuna. LEX è un esempio di ordinamento di eliminazione h-esima per $h=1,\ldots,n-1$.

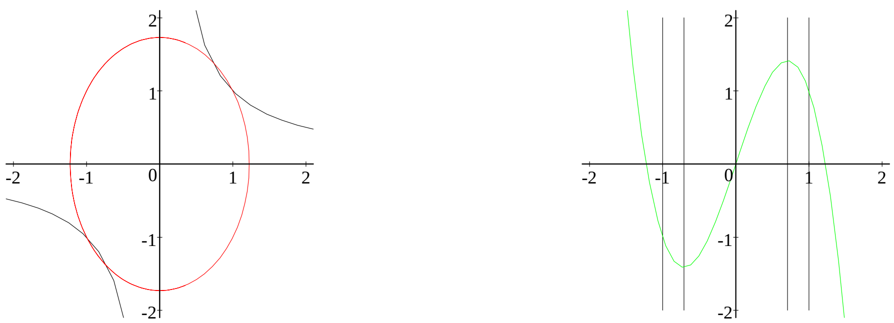
Dimostrazione Sia G=$\{g_1,\ldots, g_r ,\ldots,g_s\}$ e $G_h=\{g_r ,\ldots,g_s\}$. Come osservato prima dell'enunciato, $I_h \supseteq G_h$ e quindi $I_h \supseteq \langle G_h \rangle$. Viceversa, se f è un elemento di I_h, esso appartiene a I e quindi la sua divisione per la base di Gröbner G dà resto 0; inoltre, visto che f non contiene le prime h indeterminate, i suoi quozienti nella divisione per i polinomi $g_1,\ldots, g_{r-1}$ (che hanno LT contenenti una delle prime h indeterminate) sono nulli. Quindi si ha: $f = 0\cdot g_1 +\ldots+ 0\cdot g_{r-1} + h_r\cdot g_r +\ldots+ h_s\cdot g_s + 0$, con LT($g_j$) che non divide i termini di $h_i\cdot$LT(g_i) per ogni $i>j$: in particolare, non potendoci essere compensazioni tra gli addendi, i polinomi $h_r,\ldots, h_s$ devono appartenere a $k[x_{h+1},\ldots,x_n]$.
Questo da un lato assicura che $G_h=\{g_r ,\ldots,g_s\}$ è una base di I_h, dall'altro assicura anche che tale base è di Gröbner, poiché dividendo un qualunque polinomio f di I_h per G_h, i quozienti sono quelli evidenziati nella formula precedente e quindi il resto è 0 (vedi Capitolo V corollario 2.3). C.V.D.

ESEMPIO 1.3 Troviamo basi di Gröbner per gli ideali di eliminazione [7] I_1 e I_2 dell'ideale I associato al sistema di equazioni $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+2y^2 \quad =5 \\ \quad xz \quad\quad =1 \end{cases}$.

L'ideale I è generato da $\{x^2+y^2+z^2-4,\ x^2+2y^2-5,\ xz-1\}$ o equivalentemente da $\{x^2+2z^2-3,\ x^2+2y^2-5,\ xz-1\}$; se decidiamo di eliminare usando l'ordinamento LEX con $y>x>z$ la base si riordina così $\{2y^2+x^2-5,\ x^2+2z^2-3,\ xz-1\}$ e quindi per trovare la base di Gröbner ridotta di I basta

- aggiungere $S(f_2,f_3) = x+2z^3-3z$ e ridurre gli altri 3 polinomi dividendo per questo: $\{2y^2+(-2z^3+3z)^2-5,\ x+2z^3-3z,\ (-2z^3+3z)^2+2z^2-3,\ (-2z^3+3z)z-1\}$ o anche $\{2y^2+(2z^2-3)^2z^2-5,\ x+2z^3-3z,\ (2z^2-3)^2z^2+2z^2-3,\ -[(2z^2-3)z^2+1]\}$
- essendo gli ultimi due polinomi nella sola z, trovare il loro massimo comun divisore: osservare che $(2z^2-3)^2z^2+2z^2-3=(2z^2-3)[(2z^2-3)z^2+1]$, quindi tale MCD vale $(2z^2-3)z^2+1 = 2z^4-3z^2+1$ e come base di Gröbner si può scegliere $\{2y^2+(2z^2-3)^2z^2-5,\ x+2z^3-3z,\ (2z^2-3)z^2+1\}$
- poiché $(2z^2-3)^2z^2 = (2z^2-3)[(2z^2-3)z^2+1]-2z^2+3$, il suo resto nella divisione per $2z^4-3z^2+1$ è $-2z^2+3$: quindi alla base trovata si può sostituire $\{2y^2-2z^2-2,\ x+2z^3-3z,\ -2z^4+3z^2-1\}$
- dividendo per i Lc si ha la base ridotta $\{y^2 - z^2 - 1,\ x + 2z^3 - 3z,\ z^4 - (3/2)z^2 + 1/2\}$.[8]

Una base per I_1 è allora $\{x + 2z^3 - 3z,\ z^4 - (3/2)z^2 + 1/2\}$, mentre una base per I_2 è $\{z^4 - (3/2)z^2 + 1/2\}$.
Risolvendo l'ultima equazione si trova $z^2 = 1$ oppure $z^2 = 1/2$: dunque se si lavora almeno in **R** ci sono 4 soluzioni (ma due sole sono razionali: $z = \pm 1$). Estendendo tali soluzioni in $\mathbf{R}^2$, si trova $x=(-2z^2 + 3)z$ e quindi si hanno le 2 soluzioni razionali (1,1), (–1,–1) e le 2 soluzioni reali $(\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$. Estendendo tali soluzioni in $\mathbf{R}^3$, si trova $y^2 = z^2+1$ e quindi si hanno solo soluzioni reali: $(1, \pm\sqrt{2},1)$, $(-1, \pm\sqrt{2},-1)$, $(\sqrt{2}, \pm\sqrt{3/2},1/\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \pm\sqrt{3/2},-1/\sqrt{2})$.



Le figure sopra riportate (in ascissa z, in ordinata x) mostrano come si trasforma il problema in $\mathbf{R}^2$ nel passaggio dalla rappresentazione iniziale di $I_1=\langle x^2+2z^2-3,\ xz-1\rangle$ a quella finale: $I_1=\langle x+2z^3-3z,\ z^4-3/2z^2+1/2\rangle$.

---

(7) Dopo questo esempio, svolgere l'esercizio 2 contenuto negli Esercizi sul CAPITOLO VII.

(8) Notiamo che il sistema, che sembrava di 8° grado è in realtà di 24° grado. 8 soluzioni coincidono in un unico punto improprio e così pure le altre 8.

2. PASSO DI ESTENSIONE

Ciò che cerchiamo è l'insieme delle soluzioni di un sistema algebrico, cioè detto I l'ideale generato dai polinomi del sistema, cerchiamo

$$V(\mathrm{I}) = \{ (c_1,\dots, c_n) \in k^n \mid f(c_1,\dots, c_n) = 0 \text{ per ogni } f\in \mathrm{I} \}.$$

Come già visto negli esempi, una volta determinate le basi di Gröbner per gli ideali di eliminazione I_h dell'ideale I, si cerca di costruire le soluzioni del sistema coordinata per coordinata.

Fissato h (e quindi l'ideale I_h), ogni $(c_{h+1},\dots, c_n)\in V(\mathrm{I}_h)=\{(c_{h+1},\dots, c_n)\in k^h \mid f(c_{h+1},\dots, c_n)=0\ \forall f\in \mathrm{I}_h\}$ è una soluzione parziale del sistema originario: per estenderla a una soluzione completa bisogna via via aggiungere le altre coordinate ed in particolare, al primo passo bisogna trovare i c_h tali che $(c_h, c_{h+1},\dots, c_n)\in V(\mathrm{I}_{h-1})$, cioè, se $\mathrm{I}_{h-1}=\langle g_r,\dots, g_s\rangle$, si devono trovare le soluzioni del sistema nell'unica incognita x_h:

$$g_r(x_h, c_{h+1},\dots, c_n) = 0, \dots\dots , g_s(x_h, c_{h+1},\dots, c_n) = 0.$$

Visto che questi sono polinomi $p_r,\dots, p_s$ in una sola indeterminata, il sistema equivale ad un'unica equazione (poiché l'ideale da essi generato è principale e generato dal $\mathrm{MCD}(p_r,\dots, p_s) = p$): si deve vedere se quest'equazione ha soluzioni. Come già visto in un esempio al capitolo 6 questo potrà essere vero o no in dipendenza dalla scelta della soluzione $(c_{h+1},\dots, c_n)$ ed anche in dipendenza dal campo.

ESEMPIO 2.1 Il sistema: $x^2=y$, $x^2=z$ ha base di Gröbner rispetto a LEX ($x>y>z$): $\{x^2-y, y-z\}$ e quindi $V(\mathrm{I}_1) = \{(c, c)\}$. Ovviamente ci sono x reali tali che (x, c, c) sia soluzione di $x^2 = y$ se e solo se c non è negativo; invece si trovano soluzioni per ogni c se si cercano soluzioni in $\mathbf{C}^3$.

Per limitare i problemi quindi conviene lavorare in un campo algebricamente chiuso (vedi Capitolo I paragrafo 8) che, per non dover ripetere continuamente l'ipotesi, supporremo essere $\mathbf{C}$. Usando la teoria del risultante, che esporremo nei successivi tre paragrafi, possiamo provare il seguente

TEOREMA 2.2 *Siano* $\mathrm{I}=\langle f_1,\dots,f_s \rangle$ *un ideale* [9] *di* $\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$ *e* $\mathrm{I}_1=\mathrm{I}\cap\mathbf{C}[x_2,\dots,x_n]$. *Scriviamo ogni* f_i *come un polinomio in* x_1 *a coefficienti in* $\mathbf{C}[x_2,\dots,x_n]$ *e sia*

$$f_i = a_i (x_2,\dots,x_n)\, x_1^{N_i} + \text{termini in cui } x_1 \text{ ha grado } <N_i \qquad \text{per ogni } i=1,\dots,s$$

ove $N_i \geq 0$ *e* $a_i (x_2,\dots,x_n)\in \mathbf{C}[x_2,\dots,x_n]$.

Sia $(c_2,\dots,c_n)\in V(\mathrm{I}_1)$ *una soluzione parziale: se* $(c_2,\dots,c_n)$ *non appartiene a* $V(a_1,\dots,a_s)$, *cioè se per almeno un i si ha* $a_i (c_2,\dots,c_n)\neq 0$, *allora esiste almeno un* c_1 *tale che* $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ *stia in* $V(\mathrm{I})$, *cioè la soluzione parziale è estendibile. In particolare ciò è vero se almeno uno dei polinomi* a_i *è una costante non nulla.*

Diversamente detto, pur di lavorare in $\mathbf{C}$ (o comunque in un campo algebricamente chiuso) l'unico caso in cui non si sa se si riesce ad estendere una soluzione è quello in cui tutti i coefficienti direttori dei polinomi f_i rispetto a x_1, calcolati nella soluzione parziale, si annullano.

Vale la pena di osservare che gli a_i dipendono dai generatori f_i scelti: scegliendo generatori differenti (cosa che si può fare, non avendo richiesto di fissare un ordinamento monomiale, né tantomeno di aver scelto una base di Gröbner) si riesce talora ad ottenere un diverso ideale $\langle a_1,\dots,a_s\rangle$ e corrispondentemente delle varietà algebriche affini $V(a_1,\dots,a_s)$ più piccole (vedi Cox pag. 390, ma anche la dimostrazione del teorema 6.5 del presente capitolo).

---

[9] Non si chiede di partire con una base di Gröbner; se le incognite fossero solo 2 questo potrebbe essere un test preventivo di risolubilità: se c'è un polinomio in x_1 con coefficiente costante la soluzione è estendibile.

Inoltre nulla ci costringe a scegliere un determinato ordinamento delle indeterminate: talora basta cambiare tale ordinamento per non incorrere nel problema. Vedi esercizio 5 del presente capitolo.

Ancora, notiamo che questo è solo un passo dell'estensione: in realtà si itererà l'applicazione di questo teorema per estendere dalla dimensione 1 alla dimensione 2 (quindi da (c_n) a (c_{n-1},c_n)) e poi dalla dimensione 2 alla 3 e così via: l'importante è distinguere sempre la prima indeterminata dalle altre.

Inseriamo già qui la dimostrazione del teorema, anche se necessita della teoria esposta più oltre, in modo che sia più evidente quali sono gli snodi fondamentali in tale teoria.

Dimostrazione Consideriamo prima il caso $s=2$ e poniamo, per uniformità con la teoria del risultante che svolgeremo [10] nei § 3 e 4:
$f_1 = f = a_0x_1^l+\ldots+a_l$ e $f_2 = g = b_0x_1^m+\ldots+b_m$ (cioè $N_1=l$, $N_2=m$, $a_1(x_2,\ldots,x_n)=a_0$, $a_2(x_2,\ldots,x_n)=b_0$).
Supponiamo che $\mathbf{c}=(c_2,\ldots,c_n)$ non sia uno zero di almeno uno dei due polinomi a_0, b_0: ad esempio sia $a_0(\mathbf{c})\neq 0$; allora, per la proposizione 4.4, $\mathrm{Res}(f, g, x_1)(\mathbf{c}) = [a_0(\mathbf{c})]^r\mathrm{Res}(f(x_1,\mathbf{c}), g(x_1,\mathbf{c}), x_1)$.
Osserviamo che $\mathrm{Res}(f,g,x_1)$ appartiene a $\langle f, g\rangle\cap\mathbf{C}[x_2,\ldots,x_n]$ che è l'ideale di eliminazione prima I_1 di $I=\langle f,g\rangle$ e che, per ipotesi, $\mathbf{c}\in V(I_1)$: ciò implica che $\mathrm{Res}(f,g,x_1)(\mathbf{c})=0$, cioè (essendo $a_0(\mathbf{c})\neq 0$) che

$$\mathrm{Res}(f(x_1,\mathbf{c}), g(x_1,\mathbf{c}), x_1) = 0.$$

Dunque i due polinomi, nella sola indeterminata x_1, $f(x_1,\mathbf{c})$ e $g(x_1,\mathbf{c})$ hanno un fattore F di grado >0 in comune, che avrà almeno uno zero c_1, visto che il campo **C** è algebricamente chiuso. Si è così trovata una n-upla $(c_1,\mathbf{c})$ che annulla entrambi i polinomi f e g, cioè una soluzione del sistema.

Se $s\geq 3$ questa dimostrazione può essere ricalcata pur di usare risultanti generalizzati. Pur di rinominare i polinomi, possiamo supporre che l'indice i per cui $a_i(c_2,\ldots,c_n)\neq 0$ sia proprio $i=1$: consideriamo allora i risultanti generalizzati h_α rispetto a x_1 e a f_1. Per la proposizione 5.4 ogni h_α appartiene a $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle\cap\mathbf{C}[x_2,\ldots,x_n]=I_1$: dunque, visto che $\mathbf{c}\in V(I_1)$, si ha $h_\alpha(\mathbf{c})=0$, per ogni α. Ne consegue:

(^) $$\mathrm{Res}(f_1, u_2f_2+\ldots+u_sf_s, x_1)(\mathbf{c}) = \Sigma h_\alpha(\mathbf{c})\mathbf{u}^\alpha = 0.$$

La proposizione 4.4 applicata in $\mathbf{C}[u_2,\ldots,u_s,x_1,\ldots,x_n]$ ai due polinomi f_1 e $u_2f_2+\ldots+u_sf_s$, dice che, essendo $a_1(\mathbf{c})\neq 0$, dalla (^) si ricava

$$\mathrm{Res}(f_1(x_1,\mathbf{c}),\ u_2f_2(x_1,\mathbf{c})+\ldots+u_sf_s(x_1,\mathbf{c}),\ x_1) = 0,$$

cioè (proposizione 5.4 (ii)) i polinomi $f_1(x_1,\mathbf{c})$, $f_2(x_1,\mathbf{c}),\ldots, f_s(x_1,\mathbf{c})$ di $\mathbf{C}[x_1]$ hanno un fattore comune F di grado >0 in x_1. Ciò significa, visto che **C** è algebricamente chiuso, che F ha sicuramente almeno una radice c_1 e quindi

$$f_1(c_1,\mathbf{c}) = f_2(c_1,\mathbf{c}) =\ldots= f_s(c_1,\mathbf{c}) = 0,$$

cioè vale il teorema di estensione. C.V.D.

[10] $\mathrm{Res}(f, g, x_1)$: leggere "risultante di f e g rispetto a x_1"
$\mathrm{Res}(f, g, x_1)(\mathbf{c})$: leggere "risultante di f e g rispetto a x_1 valutato in **c**"
$\mathrm{Res}(f(x_1,\mathbf{c}), g(x_1,\mathbf{c}), x_1)$: leggere "risultante dei polinomi f e g valutati in **c** rispetto a x_1".