CAPITOLO VII. ELIMINANDO ED ESTENDENDO
PARTE 3. CONSEGUENZE

6. PROIEZIONE E CHIUSURA

La visione geometrica della teoria vista nella prima parte è legata al concetto di proiezione. Visto che per la validità del teorema di estensione è necessario che il campo k sia algebricamente chiuso, supponiamo direttamente che sia k=**C**.

DEFINIZIONE 6.1 *Si dice **proiezione** (h-esima) dello spazio affine $\mathbf{C}^n$ sullo spazio affine $\mathbf{C}^{n-h}$ la mappa π_h: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n-h}$ che elimina le prime h componenti:*

$$\pi_h(c_1,\ldots,c_h,c_{h+1},\ldots,c_n) = (c_{h+1},\ldots,c_n).$$

Data una varietà algebrica affine V=V(I) di $\mathbf{C}^n$, la sua proiezione π_h(V) può non essere una varietà affine di $\mathbf{C}^{n-h}$.
Ad esempio la varietà V=$V(xy-1)$ di $\mathbf{C}^2$ ha proiezione sullo spazio affine $\mathbf{C}^1$ (da pensare come l'asse y) costituita dall'insieme $\pi_1(\mathrm{V}) = \mathbf{C}\ \{0\}$. Notiamo che invece la varietà $V(\mathrm{I}_1)$ corrispondente all'ideale di eliminazione prima I_1= (0) individua in $\mathbf{C}^1$ la varietà totale.
I legami tra la proiezione h-esima e la varietà dell'ideale di eliminazione h-esima sono chiariti dal seguente

LEMMA 6.2 *Dato un ideale* I *di* $\mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n]$*, consideriamo* $\mathrm{I}_h=\mathrm{I}\cap\mathbf{C}[x_{h+1},\ldots,x_n]$ *e* V=V(I). *Nello spazio affine* $\mathbf{C}^{n-h}$ *risulta* $\pi_h(\mathrm{V}) \subseteq V(\mathrm{I}_h)$ *e l'inclusione può essere propria.*
Dimostrazione Sia $(c_1,\ldots,c_h,c_{h+1},\ldots,c_n)\in\mathrm{V}=V(\mathrm{I})$: si deve mostrare che ogni polinomio $f\in\mathrm{I}_h$, si annulla in $(c_{h+1},\ldots,c_n)=\pi_h(c_1,\ldots,c_h,c_{h+1},\ldots,c_n)$. Ora

- $f\in\mathrm{I}$ e $(c_1,\ldots,c_h,c_{h+1},\ldots,c_n)\in\mathrm{V}=V(\mathrm{I}) \Rightarrow f(c_1,\ldots,c_h,c_{h+1},\ldots,c_n) = 0$
- $f\in\mathbf{C}[x_{h+1},\ldots,x_n] \Rightarrow f = f\pi_h$

e quindi

$$f(c_{h+1},\ldots,c_n) = f\pi_h(c_1,\ldots,c_h,c_{h+1},\ldots,c_n) = f(c_1,\ldots,c_h,c_{h+1},\ldots,c_n) = 0.$$

Che l'inclusione possa essere propria discende dall'esempio precedente. C.V.D.

Tornando all'interpretazione di V(I) come insieme delle soluzioni del sistema le cui equazioni sono date dall'annullarsi dei generatori di I e di $V(\mathrm{I}_h)$ come insieme di soluzioni parziali per il sistema precedente, la h-esima proiezione di V è formata da quelle soluzioni parziali contenute in $V(\mathrm{I}_h)$ che sono estendibili a V, proprio perché da essa provengono.
Ciò porta alla seguente **versione geometrica del teorema di estensione**:

TEOREMA 6.3 *Sia* V *la varietà algebrica affine* $V(f_1,\ldots,f_s)$ *di* $\mathbf{C}^n$*,* I *l'ideale* $<f_1,\ldots,f_s>$ *di* $\mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n]$ *e* $\mathrm{I}_1=\mathrm{I}\cap\mathbf{C}[x_2,\ldots,x_n]$. *Allora, scritto per ogni* i=1,…,s

$f_i = a_i(x_2,\ldots,x_n)\, x_1^{\mathrm{N}_i}$+termini in cui x_1 ha grado $<\mathrm{N}_i$ *con* $\mathrm{N}_i \geq 0$ *e* $a_i(x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{C}[x_2,\ldots,x_n]$,

si può descrivere la varietà algebrica affine $V(\mathrm{I}_1)$ *di* $\mathbf{C}^{n-1}$ *come segue*

$$V(\mathrm{I}_1) = \pi_1(\mathrm{V})\cup[V(a_1,\ldots,a_s) \cap V(\mathrm{I}_1)],$$

ove π_1 *è la proiezione sulle ultime* $n-1$ *componenti.*
Traducendo: le soluzioni parziali al passo $(n-1)$-esimo, se non sono estendibili, stanno nella varietà algebrica affine individuata dai coefficienti direttori dei generatori di I pensati (questi ultimi) come polinomi a coefficienti in $\mathbf{C}[x_2,\ldots,x_n]$.

Il problema è: quanto è grande $V(a_1,\ldots,a_s) \cap V(\mathrm{I}_1)$? Ci sono casi in cui è la varietà vuota, come quando uno dei polinomi a_i è una costante non nulla: allora $V(\mathrm{I}_1) = \pi_1(\mathrm{V})$.
Ma può anche succedere che $V(a_1,\ldots,a_s) \cap V(\mathrm{I}_1)$ coincida con $V(\mathrm{I}_1)$ e questo impedisce di valutare quanto è grande $\pi_1(\mathrm{V})$.

ESEMPIO 6.4 In $\mathbf{C}[x,y,z]$ consideriamo l'ideale $\mathrm{I} = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$ con $f_1=x(y-z)+z$, $f_2=y^2$, $f_3=z^2$: allora, se $x_1=x$, risulta $\langle a_1,a_2,a_3\rangle=\langle y-z,0,0\rangle=\langle y-z\rangle$ e quindi la corrispondente varietà è la retta di $\mathbf{C}^2$ di equazione $y-z=0$.
Per determinare I_1, calcoliamo una base di Gröbner rispetto a LEX $x>y>z$ di I:

$$G=\{xy-xz+z,\ y^2,\ yz,\ z^2\}.$$

Dunque $\mathrm{I}_1=\langle y^2, yz, z^2\rangle$ e quindi $V(\mathrm{I}_1)=\{(0,0)\}$ è contenuta nella retta $V(y-z)$, per cui

$$V(y-z) \cap V(\mathrm{I}_1) = V(\mathrm{I}_1).$$

D'altra parte è algebricamente evidente che la soluzione parziale $y=z=0$ del sistema $f_1=0, f_2=0, f_3=0$ si estende alla soluzione $x=c$, $y=z=0$ ove c è un qualunque numero complesso e quindi

$$\pi_1(\mathrm{V}) = V(\mathrm{I}_1).$$

La cosa diventa ovvia se si considera LEX $y>z>x$ e $x_1=y$. La corrispondente base di Gröbner è $\{yx-zx+z,\ y^2,\ z^2,\ zx^2-zx\}$; quindi $\mathrm{I}_2=\langle 0\rangle$ e $V(\mathrm{I}_2) = \mathbf{C}$ si estende a $V(\mathrm{I}_1)=V(z^2, zx^2-zx)=\{(h,0),\ h\in\mathbf{C}\}$, avendo z^2 coefficiente costante e quest'ultima a $V(\mathrm{I})$ avendo y^2 coefficiente costante.

Il teorema che segue permette di dare una stima di quanto $\pi_1(\mathrm{V})$ differisce, in generale, da $V(\mathrm{I}_1)$.

TEOREMA 6.5 (di Chiusura) *Con la simbologia fin qui utilizzata*:

(i) *$V(\mathrm{I}_h)$ è la più piccola varietà affine di $\mathbf{C}^{n-h}$ contenente $\pi_h(\mathrm{V})$* [17];

(ii) *Se V non è vuota, c'è una varietà affine W contenuta propriamente in $V(\mathrm{I}_h)$ che unita a $\pi_h(\mathrm{V})$ dia $V(\mathrm{I}_h)$ cioè*

$$V(\mathrm{I}_h) \quad \mathrm{W} \subseteq \pi_h(\mathrm{V}).$$

Dimostrazione (i) Vedremo la dimostrazione di questo punto nel Capitolo VIII, dopo aver provato il Nullstellensatz di Hilbert. Si mostrerà che $V(\mathrm{I}_h)$ è la chiusura di Zariski $V(I(\pi_h(\mathrm{V})))$ di $\pi_h(\mathrm{V})$ e come tale è la più piccola varietà che contiene $\pi_h(\mathrm{V})$.

(ii) Diamo un'idea della dimostrazione per $h=1$. Poiché per il teorema di estensione

$$V(\mathrm{I}_1) = \pi_1(\mathrm{V})\cup[V(a_1,\ldots, a_s) \cap V(\mathrm{I}_1)],$$

l'idea è di prendere come W la varietà $V(a_1,\ldots, a_s) \cap V(\mathrm{I}_1)$; ma se $V(a_1,\ldots, a_s)\supseteq V(\mathrm{I}_1)$, si ha $\mathrm{W}=V(\mathrm{I}_1)$.
In questo caso andiamo a "ridefinire" V. Osserviamo che:

- $\langle f_1,\ldots,f_s\rangle \subseteq \langle f_1,\ldots,f_s, a_1,\ldots, a_s\rangle$ e quindi $\mathrm{V} \supseteq V(f_1,\ldots,f_s, a_1,\ldots, a_s)$
- se $(c_1,\ldots,c_n)\in\mathrm{V}$, allora $(c_2,\ldots,c_n)=\pi_1(\mathrm{V})\subseteq V(\mathrm{I}_1)\subseteq V(a_1,\ldots, a_s)$ e quindi $\mathrm{V} \subseteq V(f_1,\ldots,f_s, a_1,\ldots, a_s)$.

Dunque se $V(a_1,\ldots, a_s)\supseteq V(\mathrm{I}_1)$ si ha $\mathrm{V}=V(f_1,\ldots,f_s, a_1,\ldots, a_s)$.
Consideriamo i due ideali che definiscono V: $\mathrm{I}=\langle f_1,\ldots,f_s\rangle$ e $\mathrm{I}^*=\langle f_1,\ldots,f_s, a_1,\ldots, a_s\rangle$.
Essi possono essere davvero diversi (come mostra il successivo esempio) e dar luogo a differenti ideali di eliminazione prima I_1 e $(\mathrm{I}^*)_1$: le varietà di questi ultimi sono però coincidenti, poiché tanto $V(\mathrm{I}_1)$ che $V((\mathrm{I}^*)_1)$ contengono $\pi_1(\mathrm{V})$ e vale la parte **(i)** del teorema.

[17] Questa affermazione dice che $\pi_h(\mathrm{V})$ riempie "una gran parte" di $V(\mathrm{I}_h)$; ad esempio non può succedere che $V(\mathrm{I}_h)$ sia costituito da un piano W e da una retta ad esso incidente e che $\pi_h(\mathrm{V})$ sia la retta privata del punto di incidenza, poiché la più piccola varietà contenente $\pi_h(\mathrm{V})$ è la retta completa di punto di incidenza.

D'altra parte, se $f_i=a_i(x_2,\dots,x_n)\, x_1^{N_i}+\dots$, al generatore f_i di I^* si può sostituire $f_i^* = f_i - a_i(x_2,\dots,x_n)x_1^{N_i}$ che è un polinomio, appartenente allo stesso ideale, i cui termini, se contengono l'indeterminata x_1, la contengono a un grado $< N_i$.
Si può allora ricominciare l'esame del problema a partire da $I^*=<f_1^*,\dots,f_s^*,a_1,\dots,a_s>$, $V(I^*)=V(I)=V$ e $V((I^*)_1)=V(I_1)$.
Osservo che, dei generatori di I^*, i soli che contengono l'indeterminata x_1 sono $f_1^*,\dots,f_s^*$, per cui detti $a_1^*,\dots,a_s^*$ i polinomi di $\mathbf{C}[x_2,\dots,x_n]$ coefficienti dei termini di grado massimo in x_1 di $f_1^*,\dots,f_s^*$, il teorema di estensione afferma che

$$V(I_1) = \pi_1(V)\cup[V(a_1^*,\dots,a_s^*) \cap V(I_1)].$$

Allora, se $V(a_1^*,\dots,a_s^*)$ non contiene $V(I_1)$, si può prendere come W la varietà $V(a_1^*,\dots,a_s^*)\cap V(I_1)$; altrimenti si itera il procedimento, sostituendo all'ideale I^*, l'ideale

$$I^{**}=<f_1^{**},\dots,f_s^{**},a_1^*,\dots,a_s^*,a_1,\dots,a_s>$$

in cui, come in precedenza, ai polinomi f_i^* si sono sostituiti i polinomi f_i^{**} ottenuti sottraendo il multiplo di a_i^* che permette l'abbassamento del grado di x_1 in f_i^*.
Si prosegue così fino a quando si verifica una delle due eventualità [18]:

1. $V(a_1^{*\cdots *},\dots,a_s^{*\cdots *})$ non contiene $V(I_1)$: allora si pone $W = V(a_1^{*\cdots *},\dots,a_s^{*\cdots *})\cap V(I_1)$
2. $V(a_1^{*\cdots *},\dots,a_s^{*\cdots *})$ contiene $V(I_1)$ ma, sottraendo dai polinomi $f_i^{*\cdots *}$ il multiplo di $a_i^{*\cdots *}$ che permette l'abbassamento del grado di x_1, tutti i polinomi $f_i^{*\cdots **}$, trovati hanno grado 0 in x_1. In questo caso
$$I^{*\cdots **} = <f_1^{*\cdots **},\dots,f_s^{*\cdots **}, a_1^{*\cdots *},\dots, a_s^{*\cdots *},\dots, a_1^*,\dots,a_s^*, a_1,\dots, a_s> \subseteq \mathbf{C}[x_2,\dots,x_n]$$
cioè $I^{*\cdots **}$ coincide con il suo ideale di eliminazione prima, il che significa che ogni soluzione parziale $(c_2,\dots,c_n)\in V((I^{*\cdots **})_1)=V(I_1)$ può essere estesa scegliendo la prima componente c_1 a piacere in $\mathbf{C}$. D'altra parte $V(I^{*\cdots **})=V(I)=V$: quindi in questo caso $V(I_1)=\pi_1(V)$, cioè basta prendere $W=\emptyset$, il che – essendo $V\neq\emptyset$ – prova la tesi. C.V.D.

ESEMPIO 6.4 (rivisitato) Si è visto che, se I è l'ideale generato da $f_1=x(y-z)+z$, $f_2=y^2$, $f_3=z^2$ e $x_1=x$, risulta $<a_1,a_2,a_3>=<y-z>$ e $V(y-z) \cap V(I_1) = V(I_1)$. In questo caso $I^*=<x(y-z)+z, y^2, z^2, y-z>$ può essere più brevemente rappresentato come $I^*=<z, y^2, z^2, y-z>$ o, meglio: $I^*=<y, z>$. Si vede quindi che I e I^* sono diversi (e nessuno dei due è contenuto nell'altro), anche se palesemente la varietà associata è la stessa: $\{(c,0,0)$ con $c\in\mathbf{C}\}$. Questo esempio illustra anche la situazione presentata nella "seconda eventualità".

OSSERVAZIONE 6.6 Sia F un sistema di generatori per I (non necessariamente una sua base di Gröbner). Risulta sicuramente $V(I_1) =\pi_1(V)$ se

- almeno uno dei polinomi di F ha coefficiente direttore rispetto a x_1 costante (e non nullo)

oppure

- tutti i polinomi di F hanno coefficiente direttore rispetto a x_1 nullo.

OSSERVAZIONE 6.7 La dimostrazione del secondo punto del teorema 6.5 suggerisce che, se è noto che $V(a_1,\dots,a_s)\supseteq V(I_1)$, può essere più semplice risolvere il sistema se si rappresenta l'ideale che definisce la varietà aggiungendo i polinomi coefficienti e rimuovendo corrispondentemente i termini di grado massimo nella prima variabile.
Ad esempio, dato in $k[x,y]$ l'ideale $I=<yx^3+x^2, yx^4+x^2+y^2, y^3x^2+y^2>$, risulta $I_1=< y^2>\subseteq<y, y^3>=<y>$ e per quanto detto sopra

$$V(I) = V(yx^3+x^2, yx^4+x^2+y^2, y^3x^2+y^2, y, y^3).$$

---

[18] Da rilevare che sicuramente se non si verifica mai la prima, deve verificarsi la seconda: infatti ad ogni passaggio il grado in x_1 dei polinomi generatori si abbassa di 1.

L'ideale $I^*=<yx^3+x^2,\ yx^4+x^2+y^2,\ y^3x^2+y^2,\ y,\ y^3>$ coincide con $<x^2, y>$, come si vede rimuovendo tutti i termini divisibili per y (in quanto multipli del generatore y). Dunque $V(I) = V(x^2, y)=\{(0,0)\}$.

Ma possiamo calcolare I_1 solo costruendo la base di Gröbner rispetto a LEX ($x>y$).

Facciamo seguire il calcolo poiché illustra una situazione in cui la divisione preventiva di un polinomio per gli altri della base non risulta efficiente rispetto al proposito di contenere il grado totale.

$S(f_1,f_2)^F= xf_1- f_2 = x^3- x^2-y^2$; sostituire a f_2:

$$I = <x^3y+x^2,\ \ x^3-x^2-y^2,\ \ x^2y^3+y^2>$$

$S(f_2,f_1)^F = yf_2 - f_1 = x^2y - x^2+y^3$; sostituire a f_1:

$$I = < x^2y-x^2+y^3,\ \ x^3- x^2-y^2,\ \ x^2y^3+y^2>$$

$S(f_1,f_2)^F=(xf_1 - yf_2)^F=(-x^3+xy^3+x^2y+y^3)^F=([-x^3+x^2+y^2]+xy^3+[x^2y+y^3- x^2]-y^2)^F=xy^3- y^2$; aggiungere f_4:

$$I =< x^2y-x^2+y^3,\ \ x^3-x^2-y^2,\ \ x^2y^3+y^2,\ \ xy^3- y^2>$$

$S(f_3,f_4)^F=(f_3 - xf_4)^F=(y^2+xy^2)^F=xy^2 +y^2$; sostituire a f_3:

$$I = < x^2y - x^2+y^3,\ \ x^3- x^2-y^2,\ \ xy^2 +y^2,\ \ xy^3- y^2>$$

$S(f_3,f_4)^F =(yf_3 - f_4)^F=y^3+y^2$; sostituire a f_4:

$$I =< x^2y - x^2+y^3,\ \ x^3- x^2-y^2,\ \ xy^2 +y^2,\ \ y^3+y^2>$$

$S(f_1,f_3)^F =(yf_1-xf_3)^F=(-x^2y-xy^2+y^4)^F=([-x^2y+x^2-y^3]-x^2-[xy^2+y^2]-y^2+[y^4+y^3])^F=-x^2-y^2$; aggiungere f_5, sottraendolo/sommandolo, quando possibile, dai restanti polinomi

$$I = < x^2y+y^2+y^3, x^3, xy^2+y^2, y^3+y^2, x^2+y^2> = < x^2y, x^3, xy^2 +y^2, y^3+y^2, x^2+y^2>$$

$S(f_1,f_3)^F=(yf_1-xf_3)^F=(-xy^2)^F=y^2$; aggiungere f_6, sottraendolo, quando possibile, dai restanti polinomi

$$I = \ < x^2y, x^3, xy^2, y^3, x^2, y^2>,$$

cioè, eliminando dalla base i monomi multipli di altri,

$$I = < x^2, y^2>.$$

Quindi $I\cap k[y]= < y^2>$.

OSSERVAZIONE 6.8 Se il campo non è algebricamente chiuso $V(I_1)$ può essere molto più grande di $\pi_1(V)$. Ad esempio, se $I=<x^2+y^2+z^2+2,\ 3x^2+4y^2+4z^2+5>=<x^2+3,\ y^2+z^2-1>$ l'ideale di eliminazione prima è $I_1=<y^2+z^2-1>$ e $V(I_1)$ è una circonferenza: visto che il polinomio che contiene l'indeterminata x ha coefficiente direttore 1 rispetto a x, il teorema di estensione garantisce che in $\mathbf{C}^3$ ogni soluzione $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ dell'equazione $y^2+z^2=1$ può essere estesa: $(\pm i\sqrt{3},\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$ ($V(I)$ è una coppia di "circonferenze" che stanno sui piani immaginari $x = \pm i\sqrt{3}$): si ha cioè $V(I_1) = \pi_1(V)$. Invece in $\mathbf{R}^3$ le suddette soluzioni non si estendono e quindi $V(I)$ è vuota e la sua proiezione $\pi_1(V)$ pure.

Anche se il campo è algebricamente chiuso, la descrizione di $\pi_h(V)$ fornita dal teorema di chiusura è parziale, poiché può darsi che $\pi_h(V)$ contenga propriamente la differenza $V(I_h)\ \ W$. La struttura di $\pi_h(V)$ è precisata dal seguente enunciato:

esistono r varietà affini $Z_1,\dots,Z_r$ e altre r: $W_1,\dots,W_r$ con $Z_i\subseteq W_i\subseteq \mathbf{C}^{n-h}$, tali che

$$\pi_h(V)= (W_1\ \ Z_1)\cup\dots\cup (W_r\ \ Z_r).$$

7. PASSAGGIO A FORMA IMPLICITA

Per motivi di tempo questo argomento non è stato svolto nell'a.a. 2006/07.