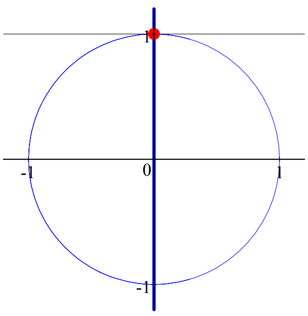
ESERCIZI SUL CAPITOLO VIII

1. Si consideri l'ideale I di $k[x, y]$ generato dai due polinomi x^2+y^2-1 e $y-1$. Trovare un polinomio di $I(V(\mathrm{I}))$ che non appartenga a I. Fare una congettura su quale potrebbe essere il radicale di I.
2. Si consideri l'ideale I di $k[x, y]$ generato dai due polinomi $f = 2x^4+3x^2y^2-14x^2$ e $g = 3x^2y^2-y^4+y^2$. Stabilire se il suo radicale contiene
   a) il polinomio $2x^3+3xy^2-14x$
   b) il polinomio $2x^3+5x^2y+3xy^2-3y^3-14x+7y$.
3. Mostrare che l'ideale $\mathrm{I} = < xy,\ xz,\ yz >$ di $k[x, y, z]$ è radicale.
4. Trovare il radicale dell'ideale generato in $k[x, y]$ dal polinomio
   $$f = x^3y^2-2x^3y+x^3+x^2y^3-4x^2y^2+3x^2y-2xy^3+3xy^2+y^3$$
   discusso nell'esercizio 6 del capitolo V.
5. Trovare il radicale dell'ideale generato in $k[x, y]$ dal polinomio
   $$f = 4x^4-8x^3y+5x^2y^2-2xy^3+y^4$$
6. Sia k il campo (non algebricamente chiuso) dei numeri reali. Mostrare che la varietà $V(y-x^2,\ z-x^3)$ di k^3 (che è una curva, nota come cubica "gobba" in quanto non è tutta contenuta in un piano) può essere rappresentata come varietà dell'ideale generato da $(y-x^2)^2+(z-x^3)^2$ e che in generale ogni varietà V di k^n può essere rappresentata come varietà dell'ideale generato da un unico polinomio di $k[x_1,\dots, x_n]$.
7. Mostrare che la somma di due ideali primi non è necessariamente un ideale primo. Che cosa se ne deduce sull'intersezione di due varietà irriducibili?
8. Mostrare che l'ideale $< x^2, y >$ di $k[x, y]$ è primario, ma non primo.

SOLUZIONI

1. La base di Gröbner ridotta di I rispetto a LEX è data da $\{x^2, y-1\}$ e quindi in k^2 risulta $V(\mathrm{I}) = \{(0,1)\}$. Su $V(\mathrm{I})$ si annulla certamente il polinomio x che però non appartiene a I.
   Notiamo che $I(V(\mathrm{I}))$ è l'ideale $<x, y-1>$. Infatti analogamente a quanto già visto per $I(\{(0,0)\})$ nell'esempio 2.1 del Capitolo VI, $a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 +\dots+ a_{0n}y^n$ si annulla in $x = 0$ e $y = 1$ solo se $a_{00} + a_{01} +\dots+ a_{0n} = 0$ e in questo caso il polinomio si riscrive come $x(a_{10}+a_{20}x+a_{11}y+\dots) + (y-1)[a_{01}+a_{02}(y+1)+\dots+a_{0n}(y^{n-1}+\dots+1)]$, cioè il polinomio sta in $<x, y-1>$; il viceversa è ovvio. Ciò suggerisce che il radicale di I possa essere $<x, y-1>$.
   In effetti, anche se il campo non è algebricamente chiuso, per quanto dimostrato nel lemma 3.2 (i), $I(V(\mathrm{I}))$ contiene $\sqrt{\mathrm{I}}$; d'altra parte la seconda potenza di ogni polinomio di $<x, y-1>$ sta in I e quindi ogni polinomio di $I(V(\mathrm{I}))$ sta in $\sqrt{\mathrm{I}}$. Quindi il radicale di I è $<x, y-1>$.



In figura: in nero $V(y-1)$, in blu sottile $V(x^2+y^2-1)$, in blu spesso $V(x^2)$, in rosso $V(x^2)\cap V(y-1) = V(x^2+y^2-1)\cap V(y-1)$

2. Comincio intanto a trovare una base di Gröbner ridotta rispetto a grLEX ($x>y$) di I.
Divido $f = 2x^4+3x^2y^2-14x^2$ per $g = 3x^2y^2-y^4+y^2$ e sostituisco a f il resto $f^* = 2x^4+y^4-14x^2-y^2$ (ottenendo ancora una base per I).
$S(f^*, g) = 2x^2y^4+3y^6-44x^2y^2-3y^4 = (x^2y^2-y^4/3+y^2/3)(2y^2-44)+11y^6/3-55y^4/3+44y^2/3 \Rightarrow$ aggiungo alla base $h = y^6-5y^4+4y^2 = y^2(y^2-1)(y^2-4)$.
I restanti polinomi sizigietici
$S(f^*, h)$, costruito a partire da due polinomi con LT primi tra loro e
$S(h, g) = y^8-15x^2y^4-y^6+12x^2y^2 = (y^6-5y^4+4y^2)(y^2-1)+(3x^2y^2-y^4+y^2)(-5y^2+4)$
non ampliano la base di I; quindi la base di Gröbner ridotta rispetto a grLEX ($x>y$) di I è

$$f^* = 2x^4+y^4-14x^2-y^2, \quad g = 3x^2y^2-y^4+y^2, \quad h = y^6-5y^4+4y^2$$

a) Uso il criterio di appartenenza al radicale: verifico se l'ideale J generato in $k[x, y, t]$ da f^*, g, h e $l = 1-t(2x^3+3xy^2-14x)$ contiene l'unità, cioè ad esempio se 1 appartiene ad una sua base di Gröbner rispetto a grLEX ($x>y>t$).
$S(f^*, -l) = -3x^2y^2t + y^4t - y^2t + x = -(3x^2y^2-y^4+y^2)t+x \Rightarrow$ aggiungo x alla base di J e riduco: in particolare dividendo l per x si vede che tra i generatori dell'ideale J c'è 1.
Dunque $2x^3+3xy^2-14x$ appartiene al radicale di I.

b) Dovrei ancora usare lo stesso criterio, che però porta a conti abbastanza fastidiosi. Conviene osservare che $2x^3+5x^2y+3xy^2-3y^3-14x+7y = (2x^3+3xy^2-14x)+(5x^2y-3y^3+7y)$: avendo già mostrato che il primo dei due addendi sta nel radicale di I, il polinomio assegnato sta in tale radicale se e solo se ci sta il polinomio $5x^2y-3y^3+7y$. Considero dunque l'ideale J'generato da

$$f^* = 2x^4+y^4-14x^2-y^2, \quad g = 3x^2y^2-y^4+y^2, \quad h = y^6-5y^4+4y^2, \quad L = 5x^2yt -3y^3t +7yt - 1$$

$S(g, L) = 5gt - 3Ly = 4y^4t -16y^2t + 3y = F \Rightarrow$ lo aggiungo alla base di J'
$S(h, F) = -20y^4t + 16y^2t + 16y^4t - 3y^3 = -4y^4t + 16y^2t - 3y^3 = -F - 3y^3 + 3y \Rightarrow$ aggiungo $H = y^3-y = y(y^2-1)$ alla base di J' anzi <u>lo sostituisco a</u> $h = y^6-5y^4+4y^2 = y^2(y^2-4)(y^2-1)$.
Attualmente la base (avendo diviso f^*, g, L e F per $H = y^3-y$) è quindi:

$$f^{**} = x^4-7x^2, \quad g^* = x^2y^2, \quad H = y^3-y, \quad L^*=5x^2yt +4yt -1, \quad F^* = y^2t - y/4$$

e sostituendo a g^* la sizigia $S(g^*, H) = x^2y = G$ e ad L^* il suo resto nella divisione per x^2y:

$$f^{**} = x^4-7x^2, \quad G = x^2y, \quad H = y^3-y, \quad L^{**} = yt - 1/4, \quad F^* = y^2t - y/4 = yL^*$$

e rimuovendo l'ultimo polinomio F^*:

$$f^{**} = x^4-7x^2, \quad G = x^2y, \quad H = y^3-y, \quad L^{**} = yt - 1/4.$$

$S(H, L^{**}) = y^2 - 4yt = y^2 - 4L^{**} -1 = H^* \Rightarrow$ sostituisco questo polinomio a $H = yH^*$

$$f^{**} = x^4-7x^2, \quad G = x^2y, \quad H^* = y^2 - 1, \quad L^{**} = yt - 1/4$$

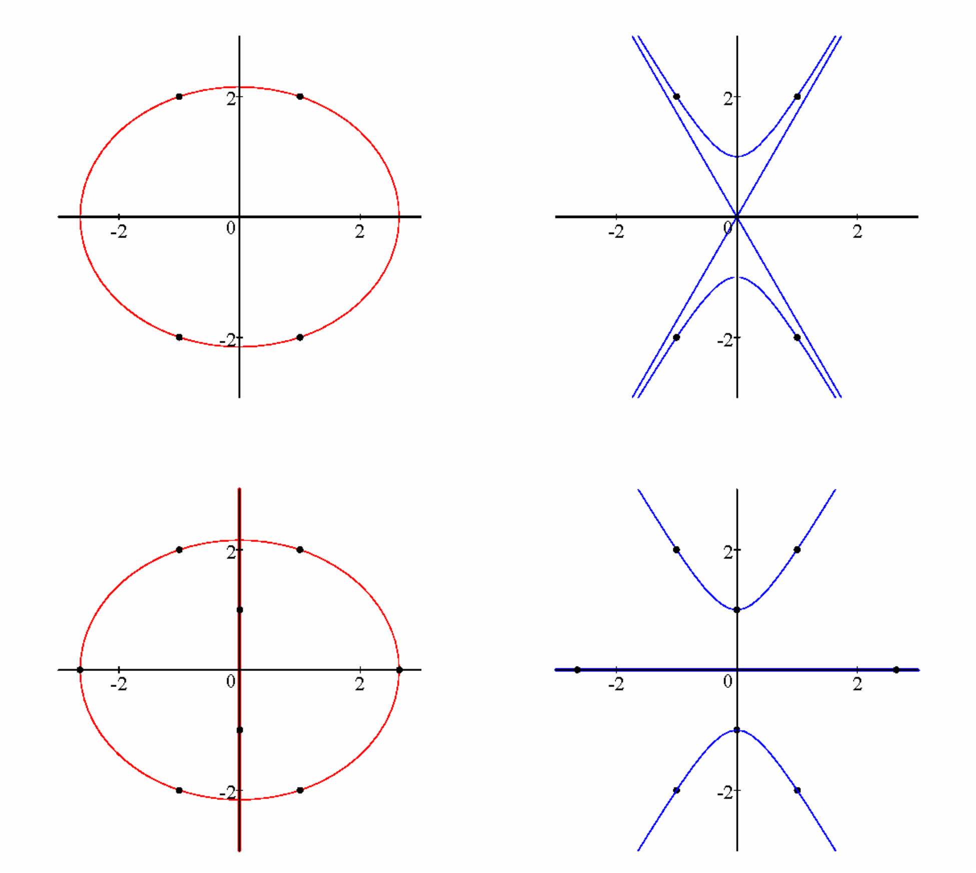
$S(G, H^*) = x^2 = G^* \Rightarrow$ sostituisco questo polinomio a $G = yG^*$ e rimuovo $f^{**} = x^4-7x^2 = x^2(x^2-7)$

$$G^* = x^2, \quad H^* = y^2 - 1, \quad L^{**} = yt - 1/4$$

$4S(H^*, L^{**}) = y - 4t = K \Rightarrow$ aggiungo alla base e vedo che $H^* = K + L^{**}$, per cui rimuovo H^*. Inoltre $L^{**} = tK + 4t^2 - 1/4$ e sostituendo il resto ottengo infine la base di Gröbner ridotta rispetto a grLEX ($x>y>t$) di J'

$$G^* = x^2, K = y - 4t, \quad L^{***} = t^2 - 1/16$$

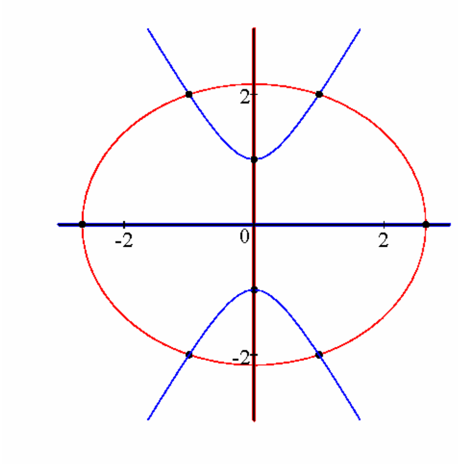
che non contiene 1. Quindi il polinomio $5x^2y-3y^3+7y$ non appartiene al radicale di I, per cui la somma dei due polinomi non appartiene al radicale di I (come si vede anche osservando che il suo LT non è divisibile per alcuno dei LT della base di Gröbner ridotta rispetto a grLEX ($x>y$) di $\sqrt{I}$, calcolata con CoCoa, $\{x^4+y^4/2 -7x^2-y^2/2, x^2y^2-y^4/3+y^2/3, y^5-5y^3+4y, x^5-8x^3+7x\}$).



Da notare che l'esercizio 2 è stato costruito a partire dalla varietà su cui si voleva che si annullassero i polinomi di I. Nel fascio di coniche passanti per i 4 punti di coordinate (1,2), (−1,2), (1,−2), (−1, −2), che ha equazione: $a(x-1)(x+1)+b(y-2)(y+2)=0$, si sono scelte l'ellisse e l'iperbole aventi rispettivamente equazioni

$$2x^2+3y^2-14=0 \quad \text{e}$$
$$3x^2-y^2+1=0$$

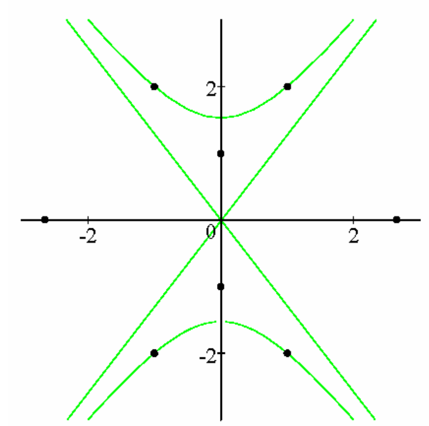
(rappresentate nelle prime due figure qui a fianco) e si è aggiunta a ciascuna di queste varietà affini una retta (l'asse y nel primo caso e l'asse x nel secondo): le due varietà così costruite (che sono rappresentate dalle restanti due figure a fianco) hanno in comune 8 punti (evidenziati sui due grafici dai punti in nero), come si vede nella quinta figura qui sotto: essi costituiscono $V(2x^4+3x^2y^2-14x^2, 3x^2y^2-y^4+y^2)=V(\mathrm{I})$.

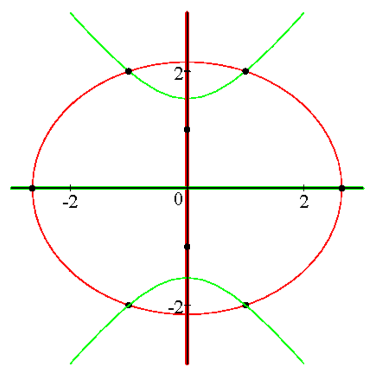


L'iperbole di equazione $5x^2-3y^2+7=0$ (rappresentata nella figura in fondo a sinistra) appartiene anch'essa al fascio di coniche, ma non passa per i due punti dell'asse y per cui passano le due varietà la cui intersezione dà $V(\mathrm{I})$.
Dei due polinomi di cui si chiede l'appartenenza al radicale di I, uno, $(2x^2+3y^2-14)x$ ha per varietà associata l'ellisse e l'asse y e quindi si annulla sugli 8 punti che costituiscono $V(\mathrm{I})$ per cui certamente appartiene a $I(V(\mathrm{I}))$ che almeno nel campo complesso coincide con il radicale di I; il secondo polinomio è ottenuto come somma

$$(2x^2+3y^2-14)x+(5x^2-3y^2+7)y = p$$

del precedente e di uno che ha per varietà associata quest'ultima iperbole e l'asse x: quindi p si annulla nei punti comuni a queste due varietà, che però (come si vede facilmente nella figura a destra) non coincidono con $V(\mathrm{I})$. Dunque p non appartiene a $I(V(\mathrm{I}))$, e a maggior ragione non appartiene al radicale di I.





3. Per mostrare che l'ideale I = < xy, xz, yz > di $k[x, y, z]$ è radicale, bisogna far vedere che se un'opportuna potenza di un polinomio p sta in I, anche p sta in I.
Dividendo p per i generatori di I si avrà $p = xy\,f + xz\,g + yz\,h + r = i + r$ ove r è un polinomio in cui non compaiono prodotti misti nelle 3 indeterminate. Se esiste un $m\in\mathbf{N}$ tale che I contenga $p^m = (i + r)^m = i\,(i^{m-1}+\ldots+mr^{m-1}) + r^m$, anche r^m deve stare in I. Ora posso scrivere
$$r = a + x\,B + y\,C + z\,D$$
ove a è un elemento del campo mentre B, C, D sono polinomi rispettivamente nelle indeterminate x, y, z. Poiché la potenza m-esima di una somma contiene sicuramente le potenze m-esime dei suoi addendi e l'unico addendo di grado zero è a, la costante a^m deve appartenere a I ed, essendo l'ideale diverso da <1>, si deve avere a=0. Similmente $(x\,B)^m$ deve stare in I e - se il termine di grado minimo di B è $b_i\,x^i$ - il termine $b_i^m\,x^{im}$ di grado minimo di $(x\,B)^m$ non può essere compensato da altri termini e quindi deve avere coefficiente b_i^m nullo: dunque b_i=0, cioè B=0. Allo stesso modo si verifica che sono nulli C e D: quindi il resto r è nullo, il che garantisce che p sta in I.

4. Si è mostrato nelle soluzioni dell'esercizio citato che MCD(f, f_x, f_y) = $xy-x-y$. Quindi il radicale di <f> è l'ideale principale generato da $[f/(xy-x-y)] = x^2y-x^2+xy^2-2xy-y^2$.

5. Il mcm(f_x, f_y) calcolato come indicato nel Capitolo V, § 12 (calcolo della base di Gröbner rispetto a LEX $t>x>y$ di $<t(16x^3-24x^2y+10xy^2-2y^3), (1-t)(-8x^3+10x^2y-6xy^2+4y^3)>$) è $32x^5-56x^4y+48x^3y^2-33x^2y^3+11xy^4-2y^5$ e quindi il MCD(f_x, f_y) è $x-y$. Questo polinomio divide anche f e quindi è MCD(f, f_x, f_y). Allora il generatore del radicale è $[f/(x-y)] = 4x^3-4x^2y+xy^2-y^3$.

6. Che la varietà $V(y-x^2,\ z-x^3)$ di $\mathbf{R}^3$ sia una curva, discende immediatamente guardando le soluzioni $(t,\ t^2,\ t^3)$ del sistema delle due equazioni $y-x^2=0$ e $z-x^3=0$ (si noti che la base dell'ideale che definisce la varietà è già una base di Gröbner rispetto a LEX $y>z>x$ e quindi non sono necessari passaggi preliminari per applicare la procedura di eliminazione-estensione). Che la stessa varietà possa essere definita dall'unica equazione $(y-x^2)^2+(z-x^3)^2=0$ è ovvio pur di ricordare che la somma di due quadrati in $\mathbf{R}$ è nulla se e solo se lo sono le due basi dei quadrati: $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0$ e $b=0$. In generale ogni varietà V di $\mathbf{R}^n$ può essere rappresentata come varietà dell'ideale generato da un unico polinomio di $\mathbf{R}[x_1,\ldots,x_n]$, poiché la proprietà appena ricordata vale per le somme di un numero qualunque di quadrati e quindi, se V=V(I) con I=< $f_1,\ldots,f_s$ >, si avrà $(f_1)^2+\ldots+(f_s)^2=0$ se e solo se $f_1=0,\ldots,f_s=0$, cioè l'ideale generato da $(f_1)^2+\ldots+(f_s)^2$ avrà a sua volta come varietà associata la V.

7. Considero i due ideali principali di $\mathbf{R}[x, y, z]$: I = <$xy - z$> e J = <z>. Essi sono palesemente primi (perché generati da un polinomio primo oppure poiché i due anelli quozienti $\mathbf{R}[x, y, z]$/I e $\mathbf{R}[x, y, z]$/J sono isomorfi a $\mathbf{R}[x, y]$ che è un dominio di integrità), ma la loro somma I + J = <$xy-z$, z> = <xy, z> non è un ideale primo in quanto contiene xy ma non x né y. Dunque la somma di due ideali primi non è necessariamente un ideale primo.
Se ne deduce che l'intersezione di due varietà irriducibili può non essere irriducibile. Nell'esempio in questione l'intersezione di un paraboloide a sella con un piano (ad esso tangente) è costituito da una coppia di rette distinte (gli assi x e y).

8. Che l'ideale I = < x^2, y > di $k[x, y]$ non sia primo è ovvio (contiene x^2 ma non x). Per verificare che è primario consideriamo due polinomi f, g almeno uno dei quali (ad esempio f) non appartenga a I e il cui prodotto fg appartenga a I.
Rappresentiamo ognuno due polinomi come somma di un polinomio di I e di un resto:
$$f = a_0 + a_1x + x^2C + yD \qquad g = b_0 + b_1x + x^2E + yF$$
poiché f non sta in I, il resto $a_0 + a_1x$ non è nullo.
Il prodotto
$fg = (a_0 + a_1x)\,(b_0 + b_1x) + (x^2C + yD)(b_0 + b_1x + x^2E + yF) = (a_0\,b_0 + a_0\,b_1x + b_0\,a_1x) + a_1b_1x^2 + i$

è somma di tre addendi gli ultimi due dei quali stanno in I per ogni scelta dei parametri, mentre il primo appartiene a I se e solo se il polinomio è nullo. Ciò comporta $a_0b_0 = 0$ e $a_0b_1 + b_0a_1 = 0$.
Se $a_0 = 0$ non si può avere $a_1 = 0$ e quindi la seconda equazione fornisce $b_0 = 0$.
Se $b_0 = 0$ la seconda equazione fornisce oltre alla precedente soluzione anche $b_1 = 0$.
Nel primo caso tanto il polinomio $f = a_1x + x^2C + yD$ che il polinomio $g = b_1x + x^2E+ yF$ non appartengono a I, ma il loro quadrato appartiene a I.
Nel secondo caso $f = a_0 + a_1x + x^2C + yD$ non appartiene a I, ma $g = x^2E + yF$ appartiene a I.

Il lavoro fatto equivale a mostrare che l'anello quoziente $k[x, y]/< x^2, y >$ è privo di divisori dello zero che non siano nilpotenti. In effetti

$$(f+\mathrm{I})(g+\mathrm{I}) = (a_0 + a_1x + \mathrm{I})(b_0 + b_1x + \mathrm{I}) = a_0b_0 + a_0b_1x + b_0a_1x + \mathrm{I}$$

coincide con I solo se valgono sui parametri le condizioni $a_0 = b_0 = 0$ o $b_0 = b_1 = 0$ viste sopra, la seconda delle quali però nega di fatto che siamo in presenza di divisori dello zero, poiché se g sta in I si ha g+I=I. Dunque i veri divisori dello zero sono gli elementi del quoziente il cui quadrato è nullo.

Si noti che è sempre vero che
Un ideale Q *di un anello* A *è primario se e solo se gli unici divisori dello zero di* A/*Q sono gli elementi nilpotenti* di A/Q.
Infatti $\{fg\in Q \text{ e } f\notin Q \Rightarrow g^m\in Q\}$ equivale a $\{ (f+Q)(g+Q)=Q \text{ e } f+Q\neq Q \Rightarrow (g+Q)^m=g^m+Q=Q\}$
e, come visto sull'esempio, se f+Q ed g+Q sono divisori non nulli dello zero entrambi devono essere nilpotenti (poiché né f né g possono stare in Q).