Argomento 2 – Funzioni elementari e disequazioni

Parte A - Funzioni elementari

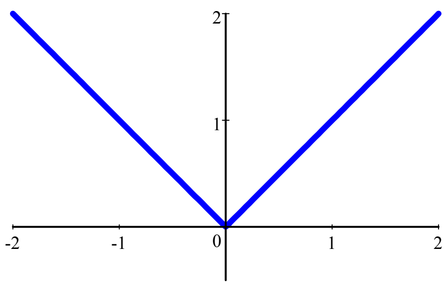
In questa lezione richiameremo alcune fra le più comuni funzioni di variabile reale, mettendone in evidenza le principali proprietà. Esamineremo in particolare le funzioni: modulo, potenza, esponenziali e logaritmiche, trigonometriche.
Suggeriamo di disegnare più volte i grafici delle funzioni riportate in questa sezione in modo da essere in grado di riprodurle senza esitazioni: questo favorirà l'apprendimento dei concetti successivi.

Modulo

La funzione modulo di x è così definita:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

È ovviamente sempre non negativa e il suo grafico è il seguente:

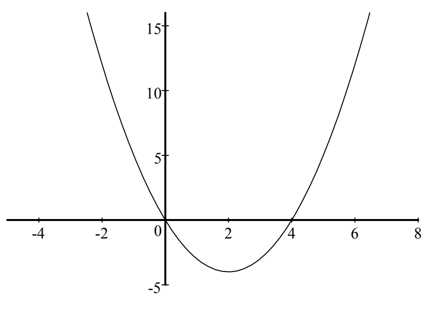


Data una funzione f definita in E, la funzione composta $|f|$ (**modulo** di f), è così definita:

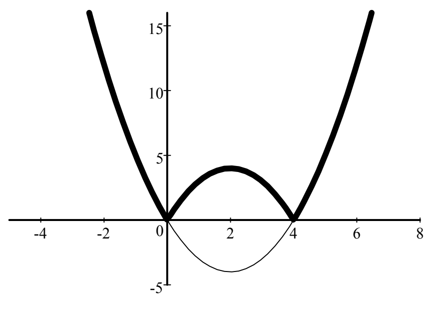
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Il grafico di $|f|$ è facilmente ottenibile da quello di f: infatti, $\forall x \in E$ con $f(x) \geq 0$, (cioè quando il grafico di f sta sopra l'asse x), coincide con il grafico di f stesso, mentre $\forall x \in E$ in cui $f(x) < 0$ (cioè quando il grafico di f sta sotto l'asse x) coincide con il grafico di $-f$, cioè quello simmetrico rispetto all'asse x.

Esempio 2.1 Sia $f(x) = x^2 - 4x$. Tracciamo il grafico di $f(x)$ e di $g(x) = |x^2 - 4x|$:



$f(x) = x^2 - 4x$



$g(x) = |x^2 - 4x|$

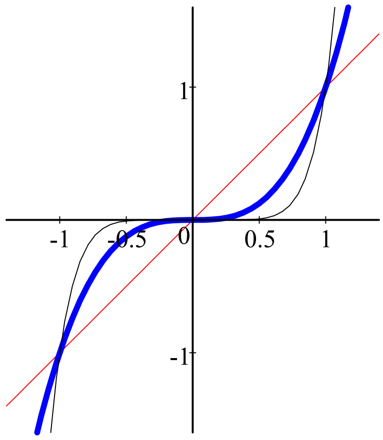
Funzione potenza

Potenze ad esponente intero positivo

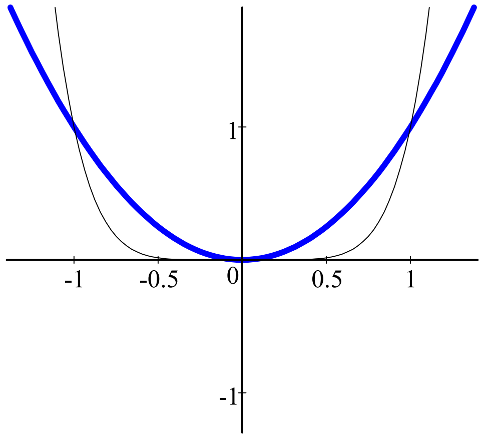
Utilizzando la nozione di potenza di un numero reale ad esponente naturale, data in Minimat, Lezione 2, si possono definire su tutto l'asse reale le funzioni potenze ad esponente naturale:

$$f(x) = x^n \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Alcuni esempi di grafici di funzioni potenza sono tracciati in figura, distinguendo i casi n dispari ed n pari.



$f(x) = x$, x^3 (medio), x^7 (sottile)



$f(x) = x^2$ (medio), x^6 (sottile)

Si osservi che:

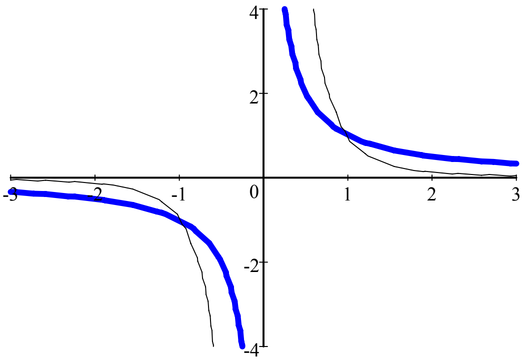
- se n è un numero dispari ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$), la funzione è strettamente crescente e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$; è una funzione dispari: $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre la funzione è concava su $(-\infty, 0)$, mentre è convessa su $(0, +\infty)$.
- Se n è un numero pari ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$), la funzione è strettamente decrescente su $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente su $(0, +\infty)$; è una funzione pari: $(-x)^{2k} = x^{2k}$, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre la funzione è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
- Se $n = 0$, ha senso scrivere x^0 solo per $x \neq 0$ ed in tal caso $x^0 = 1$.

Potenze ad esponente intero negativo

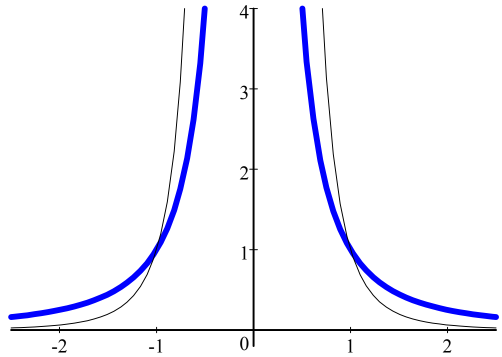
Ricordando (Minimat, Lezione 2) che una potenza ad esponente intero negativo di un numero reale x è definita solo per $x \neq 0$, valendo l'identità $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, possiamo definire funzioni potenza con esponente intero negativo solo per $x \neq 0$

$$f(x) = x^{-n} \quad \text{con} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Alcuni grafici di funzioni di questo tipo sono tracciati in figura:



$f(x) = \frac{1}{x}$ (media), $\frac{1}{x^3}$ (sottile)



$f(x) = \frac{1}{x^2}$ (media), $\frac{1}{x^4}$ (sottile)

Anche per queste funzioni si osservi che:

- se n è un numero dispari, la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$; è invertibile dove è definita; è una funzione dispari: $(-x)^{-(2k+1)} = -x^{-(2k+1)}$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre la funzione è concava su $(-\infty, 0)$, mentre è convessa su $(0, +\infty)$.

- Se n è un numero pari la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$; è una funzione pari: $(-x)^{-(2k)} = x^{-(2k)}$ e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre la funzione è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Funzioni Radice

Dalle considerazioni precedentemente fatte sull'invertibilità delle funzioni potenza con esponente intero, per introdurre le **funzioni radice n-esima,** funzioni inverse di x^n, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

- se $n > 0$ è dispari, si può definire su tutto $\mathbb{R}$ la funzione inversa di x^n:

  $$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

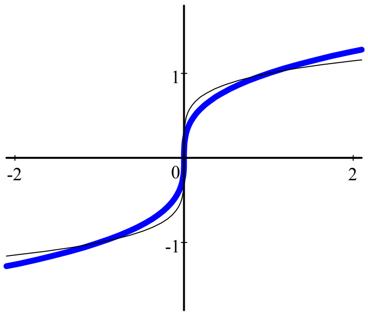
  Essa è tale che $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Se $n > 0$ è pari, la funzione x^n non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$, ma (vedi Arg. 1) lo è in $[0, +\infty)$, dove quindi si può definire la funzione inversa di x^n:

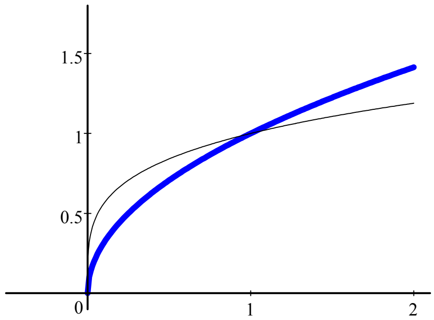
  $$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{con } x \geq 0 \quad \text{e} \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \neq 0.$$

  Essa è tale che $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$, $\forall x \geq 0$.

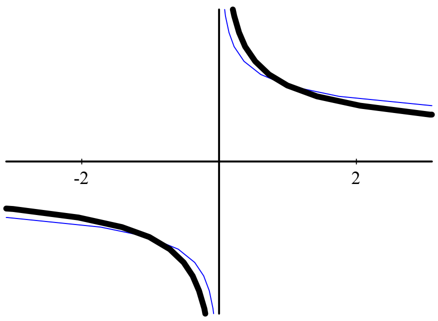
- Nel caso di esponente negativo, cioé per x^{-n}, si possono riprendere i casi precedenti, con la condizione aggiuntiva sull'insieme di definizione delle funzioni radice $\sqrt[n]{\frac{1}{x}}$ data da $x \neq 0$.



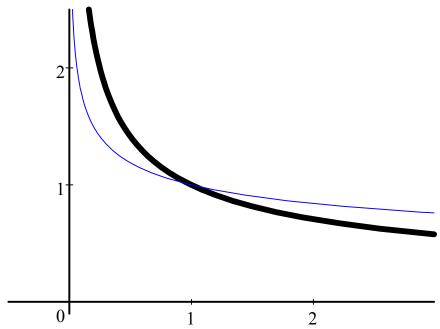
$f(x) = \sqrt[3]{x}$ (medio), $\sqrt[5]{x}$ (sottile)



$f(x) = \sqrt{x}$ (medio), $\sqrt[4]{x}$ (sottile)



$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ (medio), $\sqrt[5]{\frac{1}{x}}$ (sottile)



$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ (medio), $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ (sottile)

Potenze ad esponente razionale e reale

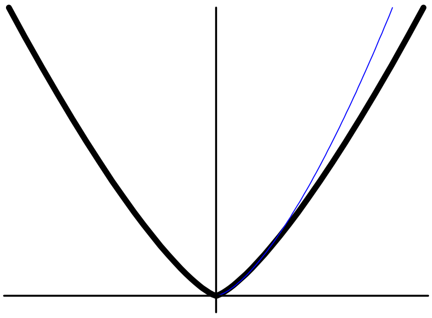
Le funzioni radice dove definite possono essere espresse come funzioni potenza utilizzando come esponente una frazione:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = x^{-\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \;\; n \neq 0,$$

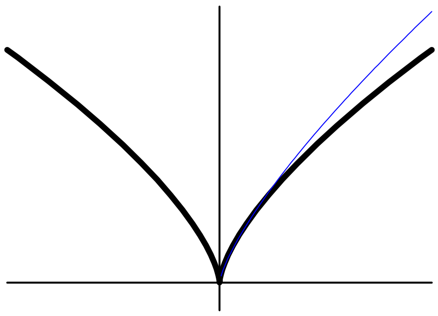
Utilizzando questa identificazione si possono definire, ma solo per $x \geq 0$, le funzioni **potenza ad esponente razionale**:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \quad \text{e, per } \; x > 0, \;\; x^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x^m}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{x}}\right)^m \qquad m, n \in \mathbb{N}, \;\; n \neq 0$$

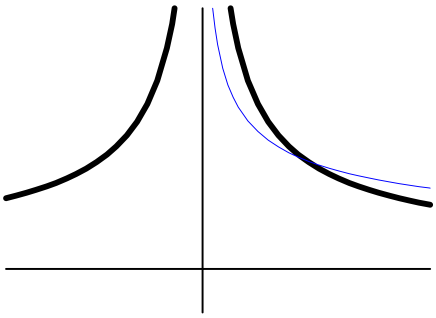
Osservazione 2.2 Abbiamo richiesto x non negativo, in quanto un numero razionale α è rappresentato da infinite frazioni equivalenti, quindi, a rigore, se $\alpha = \dfrac{m}{n}$ è anche $\alpha = \dfrac{2m}{2n}$, da cui $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{2m}{2n}} = \sqrt[2n]{x^{2m}} = (\sqrt[2n]{x})^{2m}$, e formalmente $x^{\frac{m}{n}}$ è definito solo quando l'argomento è non negativo. A livello operativo, assumeremo però che, quando l'esponente è del tipo $\dfrac{p}{q}$ con p ed q primi tra loro, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ e sia quindi definita dove è definita la radice. Per esempio, per noi $x^{\frac{2}{3}}$ sarà un altro modo di scrivere $\sqrt[3]{x^2}$ e quindi la pensiamo definita su tutto l'asse reale.



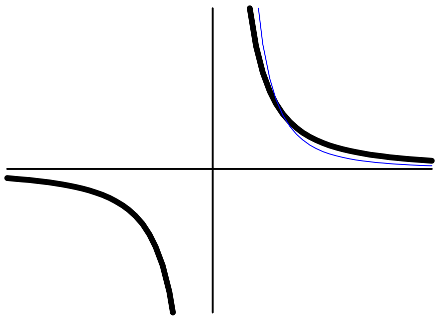
$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ (medio), $x^{\frac{3}{2}}$ (sottile)



$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (medio), $x^{\frac{3}{4}}$ (sottile)



$f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ (medio), $x^{-\frac{3}{4}}$ (sottile)

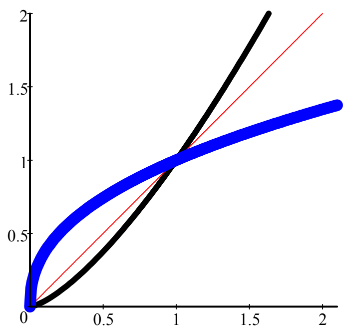


$f(x) = x^{-\frac{5}{3}}$ (medio), $x^{-\frac{5}{2}}$ (sottile)

A questo punto, per $x > 0$, possiamo estendere la definizione di funzione potenza al caso esponente α reale:

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \text{con } x > 0 \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha > 0$ la funzione è definita anche in $x = 0$, dove vale 0. Da notare che i grafici delle funzioni x^{α} passano tutti per il punto $(1, 1)$:



$f(x) = x^{\sqrt{2}}$ (medio), x (sottile), $x^{\frac{3}{7}}$ (grassetto)

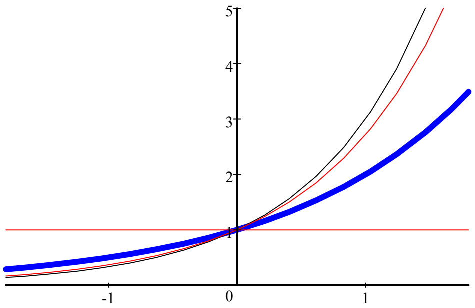
Esponenziali e logaritmi

Funzione esponenziale

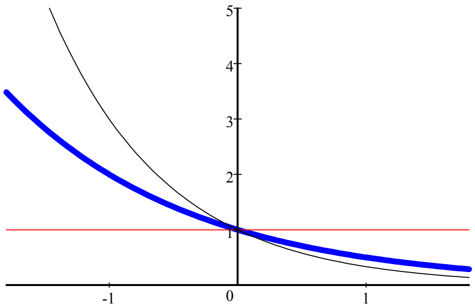
Sfruttando ancora la nozione di potenza con esponente reale, si può definire la funzione, detta **esponenziale**

$$f(x) = a^{x},$$

ove a è un numero reale > 0 fissato, chiamato **base**, mentre x è un numero reale qualsiasi (quindi come funzione è profondamente diversa dalla funzione potenza, dove varia la base ed è fisso l'esponente). Il dominio della funzione esponenziale è tutto $\mathbb{R}$ e ogni valore assunto a^x è strettamente positivo.
Al variare della base a, il grafico di a^x varia, in particolare se $a = 1$, vale $f(x) = 1^x = 1$, mentre le due figure che seguono riportano l'andamento nei casi $a > 1$ [1] oppure $0 < a < 1$:[2]



$f(x) = 2^x$ (medio), e^x, 3^x (sottili)



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ (medio), 3^{-x} (sottile)

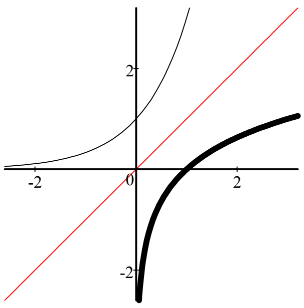
(si noti che i grafici passano tutti per il punto $(0, 1)$, essendo $a^0 = 1$, comunque sia la base a).
La funzione esponenziale è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ se $a > 1$, mentre è strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$ se $0 < a < 1$. In entrambi i casi l'immagine è costituita da $(0, +\infty)$.
Osserviamo che per $a > 0$, $a \neq 1$, la funzione esponenziale a^x è invertibile, mentre per $a = 1$ non lo è (perchè non è iniettiva!).

Funzione logaritmo

Dalle considerazioni sopra riportate sulle proprietà della funzione esponenziale, si ha che per $a > 0$, $a \neq 1$, possiamo definire su $(0, +\infty)$ la sua funzione inversa, che prende il nome di **logaritmo in base** a di x :[3]

$$f(x) = \log_a x, \quad x > 0, \; a > 0, \quad a \neq 1$$

ed ha grafico ottenibile da quello di a^x per simmetria rispetto a $y = x$:



$f(x) = \log_3 x$ (medio), 3^x (sottile),

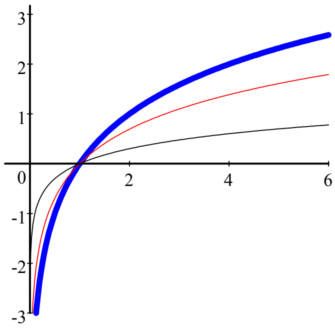
[1] Tra questi, riveste particolare importanza la funzione esponenziale e^x con base data dal numero di Nepero e.
[2] Da notare che, essendo $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, i grafici di a^x e $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ sono simmetrici rispetto all'asse y.

[3] In partcolare, quando la base è il numero di Nepero e (vedi Arg.1), il logaritmo prende il nome di logaritmo **naturale** e viene indicato con log (o con ln).

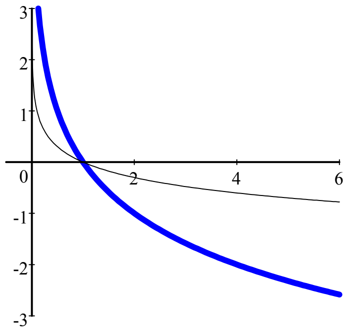
Per definizione di funzione inversa, valgono le relazioni:

$$
\begin{aligned}
a^{\log_a x} &= x \qquad \text{per ogni } x > 0 \ (a > 0,\ a \neq 1) \\
\log_a(a^x) &= x \qquad \text{per ogni numero reale } x \ (a > 0,\ a \neq 1)
\end{aligned}
$$

(si ricordi che $a^x > 0$ per ogni $a > 0$, x reale).
L'insieme di definizione della funzione logaritmo è $(0, +\infty)$, la sua immagine è $(-\infty, +\infty)$. Essa è strettamente crescente e concava su $(0, +\infty)$ se la base a è maggiore di 1, mentre è strettamente decrescente e convessa su $(0, +\infty)$ se $0 < a < 1$.
Diamo qui di seguito i grafici di alcune funzioni logaritmo, tra cui quello naturale, notando che tutti passano per il punto $(1, 0)$, visto che $\log_a 1 = 0$, $\forall a > 0,\ a \neq 1$:



$f(x) = \log_2 x$ (medio), $\log x$, $\log_{10} x$ (sottili)



$f(x) = \log_{1/2} x$ (medio), $\log_{1/10} x$ (sottile)

Osservazione 2.3 *Utilizzando la formula del cambiamento di base:*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad a, b, x > 0, \quad a, b \neq 1,$$

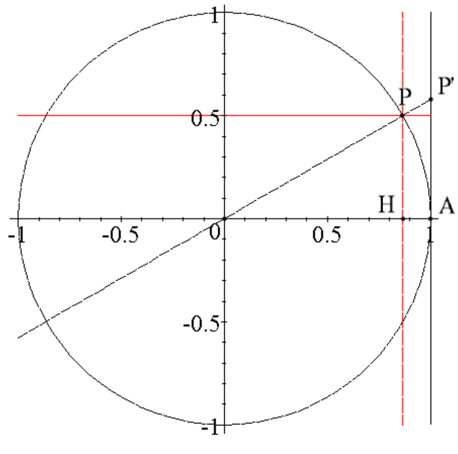
per $b = \frac{1}{a}$ si ottiene $\qquad \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x, \quad a, x > 0,\ a \neq 1$

(notare come questa relazione si riflette sui grafici).

Funzioni trigonometriche

Richiami di trigonometria

Nel piano cartesiano consideriamo la circonferenza, centrata nell'origine, **di raggio 1**. Siano $A = (1, 0)$ e P un punto sulla circonferenza. Sia O l'origine degli assi.



Al variare di P sulla circonferenza, il segmento OP forma con il segmento OA un angolo $\widehat{AOP}$.

- Se P si muove in senso antiorario**,** l'angolo si dice orientato **positivamente,**
- se P si muove in senso orario**,** l'angolo si dice orientato **negativamente**.

Possiamo notare che il punto P può percorrere più giri sulla circonferenza, sia in un senso che nell'altro. Anche se P si ritrova nella stessa posizione sulla circonferenza dopo aver compiuto un certo numero di giri, vogliamo misurare l'angolo così descritto tenendo conto dei giri effettuati e anche del senso in cui sono stati effettuati.

Per "**misura in radianti**" di un angolo orientato $\widehat{AOP}$ si intende il numero che esprime la misura della lunghezza del percorso effettuato dal punto P sulla circonferenza a partire da A nel descrivere l'angolo, preso con il segno positivo, se è orientato positivamente, oppure negativo, se l'angolo è orientato negativamente.
Osserviamo che se per descrivere l'angolo $\widehat{AOP}$, P compie meno di un giro, la misura in radianti di $\widehat{AOP}$ coincide, a meno del segno, con la misura dell'arco di circonferenza AP ed è quindi compresa tra 0 e 2π (o tra -2π e 0). La misura dell'angolo "giro", percorso in senso antiorario, equivale a 2π, ovvero al valore della lunghezza della circonferenza di raggio 1. Se P compie più di un giro, nella misura in radianti di $\widehat{AOP}$ si tiene conto del numero k di giri compiuti sulla circonferenza aggiungendo $2k\pi$ (o $-2k\pi$) alla misura dell'arco AP. Quindi un qualunque numero reale x può rappresentare la misura in radianti di un angolo orientato.

Se x rappresenta la misura, espressa in radianti, dell'angolo orientato $\widehat{AOP}$, allora:[(4)]

- $\sin x$ (seno di x) rappresenta l'ordinata del punto P e quindi $-1 \leq \sin x \leq 1$,
- $\cos x$ (coseno di x) rappresenta l'ascissa del punto P e quindi $-1 \leq \cos x \leq 1$,
- $\operatorname{tg} x$ (tangente di x) rappresenta l'ordinata del punto P' intersezione della retta passante per P e per l'origine con la retta tangente alla circonferenza in A e quindi tg $x \in (-\infty, +\infty)$. Notiamo che per $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, queste due rette sono parallele e quindi per tali angoli la tangente non è definita.

Per similitudine di triangoli rettangoli, si ha che

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dal teorema di Pitagora si ha l'identità fondamentale:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Con semplici considerazioni di geometria elementare si possono ricavare i valori qui riportati per angoli particolari:

[4] Le definizione qui date di seno, coseno e misura in radianti di un angolo orientato dipendono fortemente dal fatto che si sta considerando una circoferenza di raggio 1. In realtà si possono usare definizioni indipendenti dal raggio della circonferenza scelta, in cui si rapportano le misure dei segmenti o archi coinvolti con il raggio della circonferenza.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg } x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non è definita

$(*)$

Funzioni trigonometriche

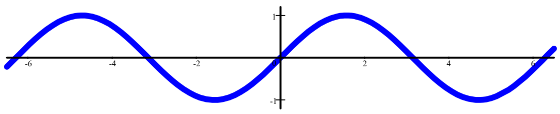
Grazie alle definizioni di seno e coseno di un angolo misurato in radianti, possiamo introdurre le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$ che, per quanto scritto sopra, sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$ e hanno come immagine $[-1, 1]$. Sono entrambe periodiche [5] di periodo 2π:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

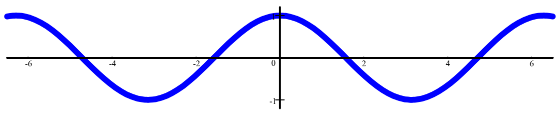
Dalle definizioni di seno e coseno, risulta che la funzione $\sin x$ è dispari, mentre $\cos x$ è pari:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

I loro grafici sono qui sotto riportati:

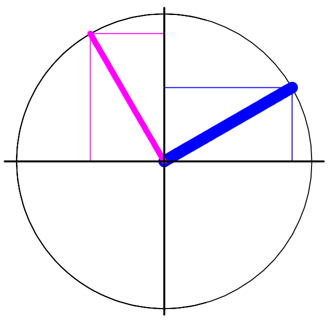


$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$

Guardando la figura sotto riportata, ci si può convincere che, se x è l'angolo compreso tra il semiasse delle ascisse positive e la semiretta disegnata con il tratto più spesso,

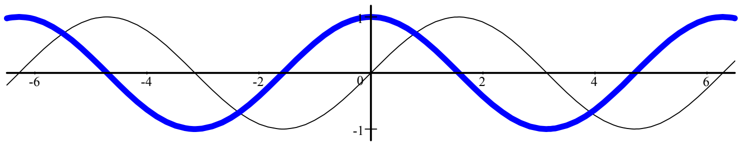


[5]Ricordiamo che una funzione si dice periodica di periodo T se $\forall x \in E(f)$ si ha che $f(x + T) = f(x)$.

valgono le relazioni

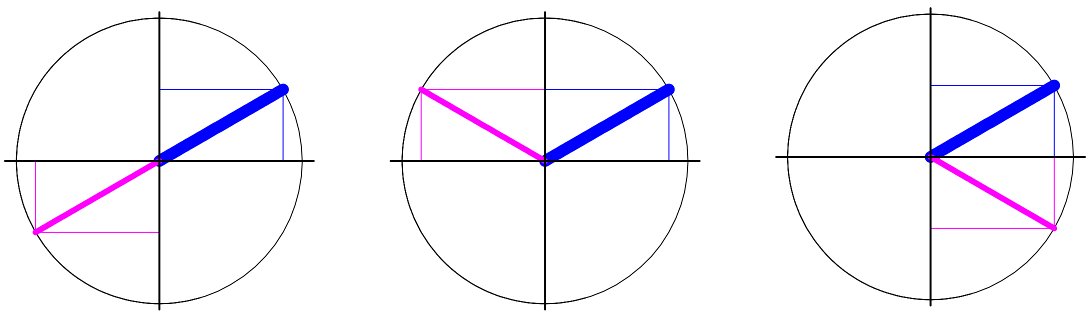
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x, \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

da cui si deduce che il grafico di $\cos x$ si ottiene da quello di $\sin x$ traslandolo verso sinistra di $\pi/2$, come si vede nella figura successiva:



$f(x)=\sin x$ (sottile), $\cos x$ (medio)

Sempre considerazioni di geometria elementare analoghe alle precedenti



(a) (b) (c)

portano alle seguenti relazioni, che possono servire per calcolare valori di seno e coseno per angoli ottenibili da quelli riportati nella tabella precedente:

$$(a) \quad \sin(\pi+x)=-\sin x, \qquad \cos(\pi+x)=-\cos x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$(b) \quad \sin(\pi-x)=\sin x, \qquad \cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$(c) \quad \sin(2\pi-x)=-\sin x, \qquad \cos(2\pi-x)=\cos x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Esempio 2.4 Vogliamo calcolare i valori del seno e del coseno per gli angoli $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{10}{3}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$.

Considerando che $\frac{5}{6}\pi=\pi-\frac{\pi}{6}$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2},\\ \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Da $\frac{10}{3}\pi = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi$, si ha:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{10}{3}\pi\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\\
\cos\left(\frac{10}{3}\pi\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Poiché $\frac{7}{4}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4}$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Possono inoltre essere utili le cosiddette *formule di addizione*:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

per tutti gli x, y reali. Come caso particolare, per $x = y$ si hanno le seguenti

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

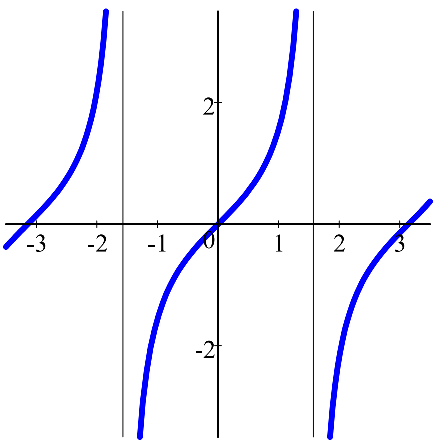
Per studiare la funzione trigonometrica tangente, possiamo utilizzare, come visto, il rapporto tra le funzioni appena studiate, cioè $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Ritroviamo quindi che $\operatorname{tg} x$ è definita per ogni x tale che $\cos x \neq 0$, ovvero per:

$$x \neq \pi/2 + k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

È periodica di periodo π. Infatti si ha:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

È dispari, in quanto $\operatorname{tg}(-x) = \sin(-x)/\cos(-x) = -\sin x/\cos x = -\operatorname{tg} x$ ed ha grafico dato da:



$f(x) = \operatorname{tg} x$

Si ha inoltre che

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Funzioni trigonometriche inverse

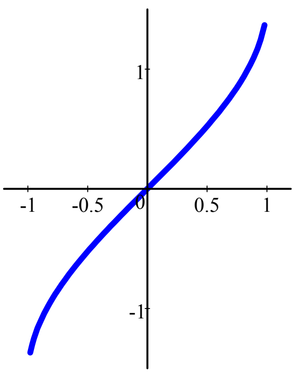
Le funzioni trigonometriche non sono invertibili sul loro campo di esistenza; infatti, essendo periodiche, non sono iniettive. Per esempio, l'equazione $\boxed{\sin x = 0}$ ha infinite soluzioni: $\boxed{x = k\pi}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
È però possibile introdurre le funzioni inverse di $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a patto di restringere il loro dominio in modo opportuno.

- La funzione $\sin x$, se considerata sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, è iniettiva (è strettamente crescente!), e la sua immagine è data da $[-1,1]$. È possibile pertanto definire su $[-1,1]$ la funzione $\arcsin x$ (**arcoseno** di x) come funzione inversa di $\sin x$ ristretta a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, intervallo che risulta essere l'immagine di $\arcsin x$. Valgono quindi:

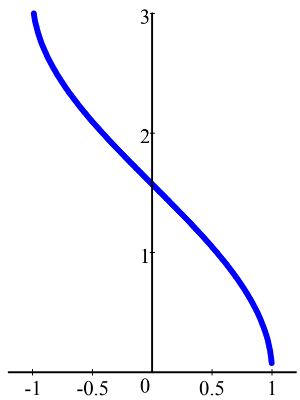
$$\arcsin(\sin x)=x,\ \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\qquad \sin(\arcsin x)=x,\ \forall x\in[-1,1].$$

- La funzione $\cos x$, se considerata sull'intervallo $[0,\pi]$, è iniettiva (è strettamente decrescente!), e la sua immagine è data da $[-1,1]$. È possibile pertanto definire su $[-1,1]$ la funzione $\arccos x$ (**arcocoseno** di x) come funzione inversa di $\cos x$ ristretta a $[0,\pi]$, intervallo che risulta essere l'immagine di $\arccos x$. Valgono quindi:

$$\arccos(\cos x)=x,\ \forall x\in[0,\pi],\qquad \cos(\arccos x)=x,\ \forall x\in[-1,1].$$



$f(x)=\arcsin x$

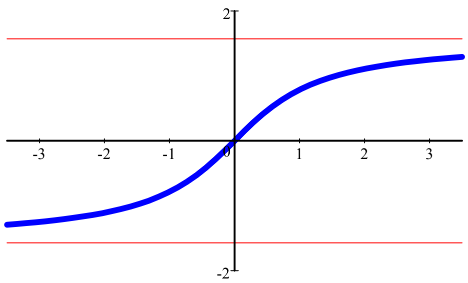


$f(x)=\arccos x$

- La funzione $\operatorname{tg} x$, se considerata sull'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, è iniettiva, e la sua immagine è data da $(-\infty,+\infty)$. È possibile pertanto definire su $\mathbb{R}$ la funzione $\operatorname{arctg} x$ (**arcotangente** di x) come inversa di $\operatorname{tg} x$ ristretta a $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, intervallo che risulta essere l'immagine di $\operatorname{arctg} x$. Valgono quindi:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x,\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Il grafico di tale funzione inversa è:



$$f(x) = \arctan x$$

La funzione $\operatorname{arctg} x$ definita su tutto $\mathbb{R}$ risulta essere una funzione dispari, strettamente crescente su $\mathbb{R}$, convessa su $(-\infty, 0)$ e concava su $(0, \infty)$. È inoltre superiormente limitata con estremo superiore $\sup(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{\pi}{2}$ e inferiormente limitata con estremo inferiore $\inf(\operatorname{arctg} x) = -\dfrac{\pi}{2}$, mentre non ammette valore massimo nè valore minimo.

Esempio 2.5 Vogliamo calcolare i valori di $\operatorname{arctg} x$ per $x = 1, -\sqrt{3}, 104$.

$\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, in quanto $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} = 1$, vedi tabellla (*);

$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$, in quanto $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

$\operatorname{arctg}(104)$: in questo caso non possiamo sfruttare i valori riportati sulla tabella, in quanto $\operatorname{arctg}(104)$ non è riconducibile all'arcotangente di tali valori. È comunque un numero reale ben definito, positivo e minore di $\pi/2$. Mediante una calcolatrice scientifica, possiamo darne un valore approssimato: $\operatorname{arctg}(104) \cong 1.56$.

Esempio 2.6 Vogliamo trovare una soluzione (se esiste) delle seguenti equazioni:

$$a) \quad \sin x = 3, \qquad b) \quad \cos x = \tfrac{1}{5}, \qquad c) \quad \operatorname{tg} x = 4.$$

Nel caso a), l'equazione non ha soluzione, in quanto $\sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (e quindi non può coincidere con 3).

Per b), notiamo dapprima che $\frac{1}{5} \in [-1, 1]$, insieme dei valori assunti dalla funzione coseno ed insieme di definizione dell'arccoseno. Possiamo quindi utilizzare tale funzione inversa ed ottenere una soluzione (appartenente all'intervallo $[0, \pi]$) data da $x = \arccos \frac{1}{5} \cong 1.37$. [6]

Nel caso di c), possiamo applicare direttamente la funzione inversa (definita su tutto $\mathbb{R}$) ad entrambi i membri ed ottenere come soluzione nell'intervallo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $x = \operatorname{arctg} 4 \cong 1.33$ [7].

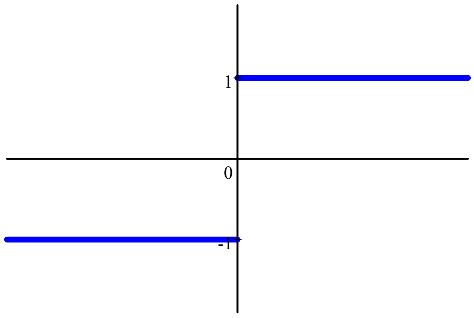
[6] Per determinare tutte le (infinite) soluzioni di tale equazione, si deve sfruttare dapprima l'identità $\cos(2\pi - x) = \cos x$ per trovare un'altra soluzione nell'intervallo $[0, 2\pi)$, data da $\left(2\pi - \arccos \frac{1}{5}\right)$. Per periodicità della funzione coseno, si ottengono tutte le soluzioni: $\arccos \frac{1}{5} + 2k\pi$, $\left(2\pi - \arccos \frac{1}{5}\right) + 2k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.

[7] Per periodicità della funzione tangente, si ha che tutte le (infinite) soluzioni dell'equazione sono date da $\operatorname{arctg} 4 + k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.

Altre funzioni elementari

Ci sono altre funzioni molto semplici che fanno parte della famiglia delle funzioni elementari e che possono risultare molto utili. Iniziamo dalla funzione che esprime il segno di un numero reale, e per questo detta **funzione segno (o signum)** di x :

$$\operatorname{signum} x = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Osserviamo che tale funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e che in tale insieme vale $\operatorname{signum} x = \dfrac{|x|}{x}$.
Il suo grafico presenta "un salto" nell'origine e si usa dire che tale grafico forma "un gradino".
Un'altra funzione con il grafico a gradini (questa volta infiniti) è la funzione **parte intera**, che, dato un qualunque numero reale x, gli assegna **il numero intero più grande tra gli interi a lui minori od eguali**, indicato con $[x]$. Il nome deriva dal fatto che, se $x \geq 0$, $[x]$ rappresenta la parte intera che compare nella rappresentazione decimale di x $\left([4,\overline{6}] = 4\right)$, mentre, se $x < 0$, $[x]$ si ottiene come la parte intera diminuita di $1.([-2,72] = -3)$. Riassumendo, abbiamo che

$$[x] = \text{"il più grande intero minore od uguale ad } x\text{"}$$

ed il suo grafico ha la forma di una "scala infinita":