Argomento 2 –Funzioni elementari e disequazioni

Parte B - Applicazioni alla risoluzione di disequazioni

Disequazioni algebriche di II grado

Vogliamo risolvere una disequazione di II grado, cioè una disequazione che, semplificata, si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ (oppure } \geq 0, \quad < 0, \quad \leq 0),$$

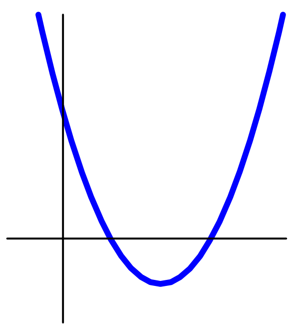
con $a \neq 0$. Ci si può sempre ricondurre al caso di $a > 0$, cambiando, se $a < 0$, il segno a tutti i termini della disequazione e cambiando verso alla disuguaglianza. Tratteremo quindi solo tale caso; il caso $a < 0$ si può comunque trattare in modo del tutto analogo, con gli opportuni cambiamenti.
Per risolvere una disequazione di questo tipo, dovremo studiare il segno (vedi Arg.1) della funzione

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0.$$

Ricordiamo (vedi Minimat, Lezione 6) che il grafico di tale funzione è una parabola rivolta verso l'alto: quindi la funzione è positiva negli intervalli in cui la parabola si trova al di sopra dell'asse delle ascisse e negativa negli intervalli in cui la parabola si trova al di sotto. Per determinare tali intervalli, si deve dapprima trovare l'intersezione (eventualmente vuota) della parabola con l'asse x, cioè risolvere l'equazione $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, le cui eventuali soluzioni danno gli zeri della funzione [(1)].

Si presentano tre casi:

(1) $\Delta > 0$: l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e distinte x_1 e x_2 , con $x_1 < x_2$.
La parabola interseca l'asse x in due punti ed un possibile grafico è il seguente:

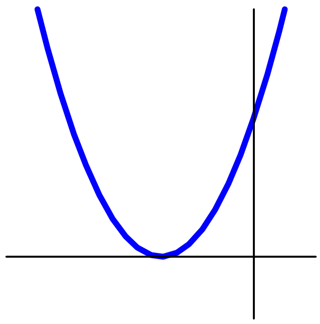


da cui si deduce che:

$f(x) > 0$	per $x < x_1$, $x > x_2$
$f(x) = 0$	per $x = x_1$, $x = x_2$
$f(x) < 0$	per $x_1 < x < x_2$

(2) $\Delta = 0$: l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2$.
La parabola è tangente all'asse x ed un possibile grafico è il seguente:

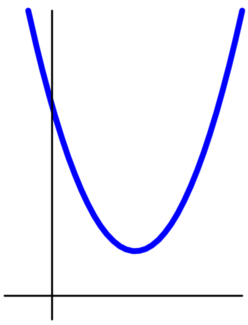
[1] Ovviamente si possono ripetere analoghe considerazioni nel caso $a < 0$, quando il grafico da considerare è una parabola rivolta verso il basso.



da cui si deduce che:

$f(x) > 0$	per $x \neq x_1$
$f(x) = 0$	per $x = x_1$
$f(x) < 0$	per nessun x reale.

(3) $\Delta < 0$: l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ha radici reali.
La parabola giace completamente nel semipiano positivo ed un possibile grafico è il seguente:



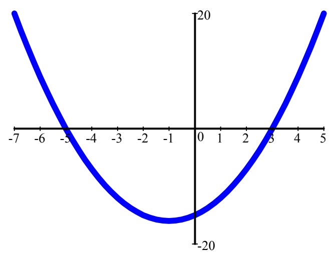
da cui si deduce che:

$f(x) > 0$	per ogni x reale
$f(x) = 0$	per nessun x reale
$f(x) < 0$	per nessun x reale.

Queste considerazioni sul segno permettono di risolvere le disequazioni del tipo $ax^2 + bx + c \gtreqless 0$, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 2.7 Risolvere la disequazione $x^2 + 2x - 15 > 0$.

Poichè il coefficiente di x^2 è positivo, la parabola è rivolta verso l'alto. Le soluzioni dell'equazione $x^2 + 2x - 15 = 0$ sono $x_1 = -5$, $x_2 = 3$, e queste sono le ascisse delle intersezioni della parabola con l'asse delle x. Il grafico è il seguente:



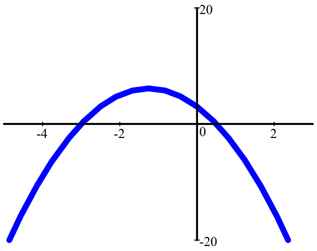
$y = x^2 + 2x - 15$

e permette di concludere che la disequazione è verificata in $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$.

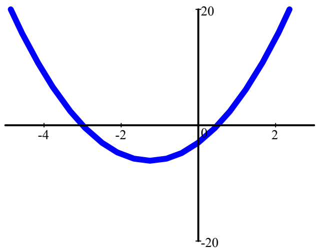
Osservazione 2.8 Se la disequazione da risolvere fosse: $x^2 + 2x - 15 < 0$, allora le soluzioni sarebbero date da $x \in (-5, 3)$.

Esempio 2.9 Risolvere la disequazione $-2x^2 - 5x + 3 > 0$.

Si può considerare la disequazione equivalente[(2)] $2x^2 + 5x - 3 < 0$ e procedere come fatto prima, oppure si può tracciare la parabola rivolta verso il basso e risolvere direttamente la disequazione data. Ovviamente le intersezioni delle due parabole con l'asse x sono le stesse, di ascisse $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Diamo il grafico di entrambe le parabole:



$y = -2x^2 - 5x + 3$

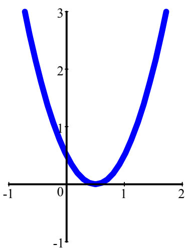


$y = 2x^2 + 5x - 3$

da cui si deduce che la disequazione è verificata per $x \in (-3, 1/2)$.

Esempio 2.10 Risolvere la disequazione $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$ (caso $\Delta = 0$) e quindi si annulla solo per $x = \frac{1}{2}$. Come si vede dal grafico,



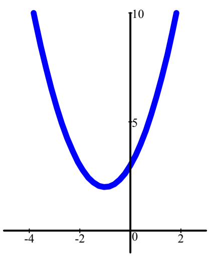
$y = 4x^2 - 4x + 1$

la parabola è tangente all'asse x e l'unica soluzione della disequazione è $x = \frac{1}{2}$.

<u>Attenzione</u> : $4x^2 - 4x + 1 < 0$ <u>non</u> ha soluzioni!

Esempio 2.11 Risolvere la disequazione $x^2 + 3x + 3 \geq 0$.

$x^2 + 3x + 3$ non si annulla mai, in quanto $\Delta < 0$. Abbiamo il grafico:



$y = x^2 + 3x + 3$

e quindi la disequazione è verificata $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

<u>Attenzione</u>: $x^2 + 3x + 3 > 0$ <u>ha</u> le stesse soluzioni!

[2] Due equazioni, due disequazioni o anche due sistemi si dicono **equivalenti** se le soluzioni del primo sono tutte e sole le soluzioni del secondo.

Osservazione 2.12 Nel caso in cui nella disequazione compaia non un trinomio ma un prodotto di fattori lineari del tipo

$$(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) \gtreqless 0$$

non conviene operare come descritto sopra. In tal caso il segno è determinato dal segno dei fattori.

Esempio 2.13 Risolvere la disequazione $(1 - x)(2x + 3) \geq 0$.

Dobbiamo determinare i valori di x per cui i fattori sono concordi, quindi entrambi positivi o entrambi negativi.
Si può ottenere il risultato usando lo schema introdotto in Minimat, Lezione 4 e precisamente

		$-3/2$		1		x
$(1-x)$	———	———	———	$\bullet$	- - -	
$(2x+3)$	- - -	$\bullet$	———	———	———	
$(1-x)(2x+3)$	$-$		$+$		$-$	

La disequazione è quindi soddisfatta per $x \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$.

Osservazione 2.14 Il metodo sopra descritto è ovviamente utilizzabile anche nel caso si abbia un prodotto di più di due fattori. Come regola generale, ogni qualvolta dobbiamo determinare il segno di una funzione, conviene, se è possibile, fattorizzare la funzione in fattori più semplici e studiare i segni dei singoli fattori, in quanto questi determinano il segno della funzione. In altri termini, se $f = f_1 \times f_2 \times \cdots\cdots \times f_n$, allora signum f = signum $f_1 \times$ signum $f_2 \times \cdots\cdots \times$ signum f_n.

Disequazioni razionali

Siano dati due polinomi $N(x)$ e $D(x)$. Una disequazione del tipo $\frac{N(x)}{D(x)} \gtreqless 0$ si dice **razionale fratta** se l'incognita compare al denominatore.

La disequazione $\frac{3x^2 + 4}{28} < \frac{3 - 5x}{6}$ non è una disequazione razionale fratta, mentre lo è $\frac{3x^2 + 4}{28 + x} < \frac{3 - 5x}{6}$.

Per quanto riguarda la teoria e i metodi di soluzione si veda Minimat, Lezione 4, in cui sono trattate le disequazioni e i sistemi di disequazioni.
Qui affronteremo il caso in cui il numeratore e/o il denominatore hanno grado maggiore di 1. Ricordiamo comunque che per risolvere questo tipo di disequazioni bisogna studiare i segni del numeratore e del denominatore e poi confrontarli per sapere quando sono concordi o discordi.

Esempio 2.15 Risolvere la disequazione $\frac{10x - 3x^2 + 25}{(x - 4)(x^2 + 1)} \geq 0$.

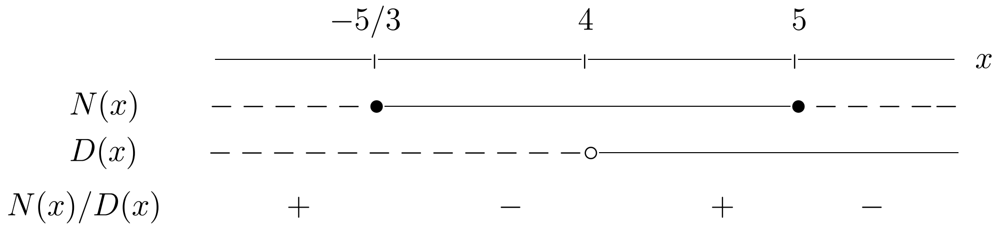
Studio del segno di N : al numeratore compare un trinomio di II grado, studiarne il segno significa quindi studiare il segno di $f(x) = -3x^2 + 10x + 25$.

$$N \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 10x - 25 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{5}{3} \leq x \leq 5,$$

visto che $3x^2 - 10x - 25 = 0$ ha come soluzioni $x_1 = -\dfrac{5}{3}$, $x_2 = 5$.
Studio del segno di D : il denominatore è il prodotto di due fattori, ma quello di II grado è sempre positivo e quindi il segno di D è determinato dal segno di $(x - 4)$. Avremo allora che

$$D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 4$$

(comprende anche la condizione di esistenza $x \neq 4$).
Si possono ottenere le soluzioni usando lo schema introdotto in Minimat, Lezione 4 e precisamente



Analizzando lo schema, possiamo dedurre che la disequazione è verificata in $(-\infty, -5/3] \cup (4, 5]$.

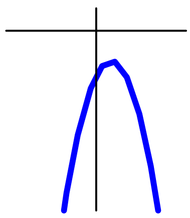
Esempio 2.16 Risolvere la disequazione $\dfrac{x^2 + 6x + 5}{(x + 3)\,(2x - 3x^2 - 1)} \leq 0$.

Studio del segno di N : anche qui compare al numeratore un trinomio di II grado, quindi[(3)]:

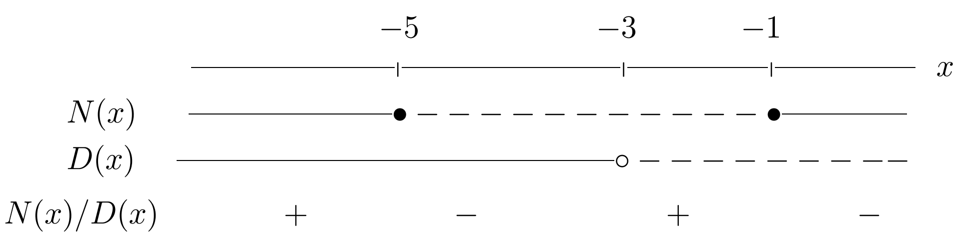
$$N \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -5,\ x \geq -1$$

visto che $x^2 + 6x + 5 = 0$ ha come soluzioni $x_1 = -5$, $x_2 = -1$.

Studio del segno di D : al denominatore compaiono due fattori, dei quali $(2x - 3x^2 - 1)$ ha $\Delta < 0$. Essendo il suo grafico una parabola rivolta verso il basso, sarà sempre negativo:



Allora il segno di D viene dato dall'opposto del segno di $(x + 3)$, cioè :
$D > 0 \quad \Leftrightarrow (x + 3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3$



Le soluzioni saranno quindi date da $[-5, -3) \cup [-1, +\infty)$.

[3]Notare che, anche se nella disequazione compare un segno di $\leq$, per studiare il segno di N si pone $N(x) \geq 0$. Il segno $\leq$ che compare nella disequazione significa che dovremo cercare i valori di x per cui N e D sono discordi.

Disequazioni irrazionali

Si dice **irrazionale** una disequazione in cui l'incognita x compare, almeno una volta, sotto il segno di radice.

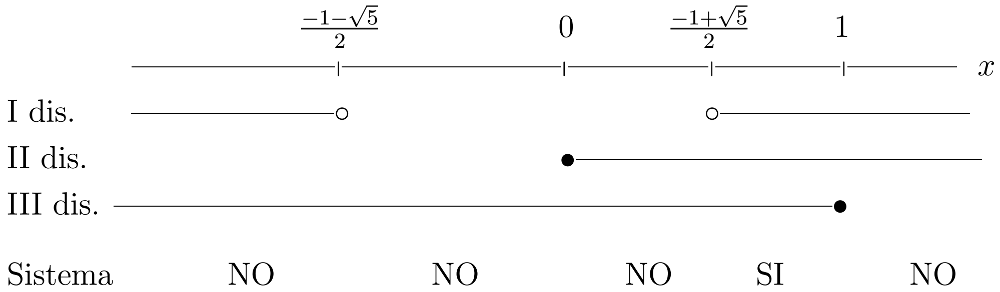
Esempio 2.17 Risolvere la seguente disequazione irrazionale $\sqrt{1-x} < x$.

Per prima cosa osserviamo che $\sqrt{1-x}$ è definita solo per l'argomento $1 - x \geq 0$ (trattandosi di radice di indice pari) e quindi per $x \leq 1$. Inoltre, sempre perchè si tratta di radice di indice pari, la quantità $\sqrt{1-x}$ è sempre ≥ 0. Quindi quando il secondo membro è negativo, cioè per $x < 0$, la risposta è immediata: non ci sono soluzioni. Quando invece il secondo membro è anch'esso non negativo, si possono elevare al quadrato entrambi i membri della disuguaglianza ed ottenere una disequazione equivalente alla data. In conclusione

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} < x \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x < x^2 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+x-1 > 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

e quindi (essendo $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, le soluzioni dell'equazione $x^2 + x - 1 = 0$), le soluzioni saranno i valori di x che soddisfano contemporaneamente le tre condizioni

$$\begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \; x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}.$$



Concludiamo che la disequazione data è soddisfatta per ogni $x \in (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1]$. In generale si ha:

Metodo di risoluzione di disequazioni irrazionali con radicale di indice pari.

Caso A) $\sqrt[2n]{a(x)} < b(x)$.

$$\sqrt[2n]{a(x)} < b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \text{ (condizione di realtà)} \\ b(x) \geq 0 \text{ (condizione necessaria)} \\ a(x) < [b(x)]^{2n} \end{cases}$$

Le eventuali soluzioni saranno i valori di x che soddisfano contemporaneamente le tre disequazioni, cioè le soluzioni del sistema indicato. Ribadiamo che, come nell'esempio precedente, la condizione $b(x) \geq 0$ è necessaria per l'esistenza di soluzioni, in quanto $\sqrt[2n]{a(x)} \geq 0$ e non potrà mai essere minore di una quantità negativa. Inoltre solo sotto questa condizione possiamo elevare a potenza con esponente pari entrambi i membri della disequazione.

Caso B) $\sqrt[2n]{a(x)} > b(x)$.

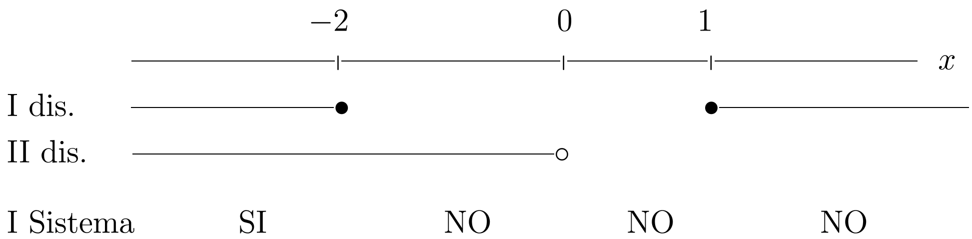
In questo caso la condizione $b(x) < 0$, se associata alla condizione di realtà, comporta una situazione in cui la disequazione viene verificata, in quanto si richiede che $\sqrt[2n]{a(x)}$ (numero positivo o nullo, quando esiste, cioè quando $a(x) \geq 0$), sia maggiore di un numero negativo. In tale caso quindi per ottenere le soluzioni della disequazione irrazionale dovremo unire le soluzioni di due sistemi:

$$\sqrt[2n]{a(x)} > b(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) \geq 0 \text{ (condizione di realtà)} \\ b(x) \geq 0 \text{ (condizione necessaria)} \\ a(x) > [b(x)]^{2n} \end{cases} \cup \begin{cases} a(x) \geq 0 \text{ (condizione di realtà)} \\ b(x) < 0 \text{ (condizione sufficiente)} \end{cases}$$

Esempio 2.18 Risolvere la disequazione $\sqrt{(x-1)(x+2)} > x$.

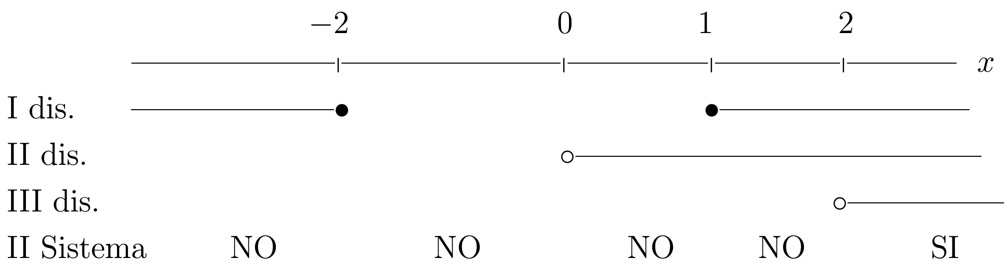
Innanzitutto consideriamo la condizione di realtà che sarà data da: $\boxed{x \leq -2,\ x \geq 1}$.
Sotto queste condizioni, analizziamo i due casi possibili per il II membro:

I Sistema: $\begin{cases} x \leq -2,\ x \geq 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2$, in quanto utilizzando lo schema dei sistemi, si ha:



II Sistema: $\begin{cases} x \leq -2,\ x \geq 1 \\ x > 0 \\ (x-1)(x+2) > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2,\ x \geq 1 \\ x > 0 \\ x^2 + x - 2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2,\ x \geq 1 \\ x > 0 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2,$

come si deduce dallo schema seguente:



In conclusione le soluzioni della disequazione saranno date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi, cioè da $(-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$.

Osservazione 2.19 Se i radicali sono più d'uno, le disequazioni si trattano in modo analogo, anche se i calcoli possono diventare molto complicati.

Metodo di risoluzione di disequazioni irrazionali con radicale di indice dispari. Il caso in cui compaiono <u>soltanto</u> radicali di indice <u>dispari</u> è più semplice in quanto non ci sono limitazioni al dominio (dovute alla presenza della radice), né dobbiamo distinguere casi dovuti al segno, in quanto l'elevamento a potenza con esponente dispari mantiene il segno della base:

$$\sqrt[2k+1]{a(x)} > b(x) \Longleftrightarrow a(x) > [b(x)]^{2k+1}$$

Esempio 2.20 Risolvere la disequazione $\sqrt[3]{x^3 - x + 1} > x - 1$.

Essa è equivalente alla disequazione: $x^3 - x + 1 > (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, da cui si ottiene $3x^2 - 4x + 2 > 0$, con $\Delta < 0$, che è soddisfatta per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Risolviamo ora alcune disequazioni che coinvolgono le funzioni esponenziali e logaritmiche, illustrando i vari metodi di soluzione direttamente negli esempi proposti.

Esempio 2.21 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\ \ 2^x \geq 16, \qquad (b)\ \ e^x > 5, \qquad (c)\ \ 4^x \leq 8, \qquad (d)\ \ 5^x < -2.$$

Poiché le funzioni esponenziali a^x con base $a > 1$ sono <u>strettamente crescenti</u> ed hanno inverse $\log_a x$ <u>strettamente crescenti</u>, ricaviamo che:

(a) $2^x \geq 16 = 2^4 \;\Leftrightarrow\; x > 4$;

(b) $e^x > 5 \;\Leftrightarrow\; x > \log 5$;

(c) $4^x = 2^{2x} \;\leq\; 8 = 2^3 \;\Leftrightarrow\; 2x \leq 3 \;\Leftrightarrow\; x \leq \dfrac{2}{3}$;

(d) $5^x < -2$ mai, in quanto $a^x > 0$, $\forall x \in R$.

Criterio 2.22 Per risolvere una disequazione del tipo $a^x \gtreqless k$, con $a > 1$, $k > 0$, possiamo applicare ad entrambi i membri della disequazione la funzione $\log_a$ mantenendo lo stesso verso della diseguaglianza. Se $k < 0$, la soluzione è immediata: o tutto $\mathbb{R}$ per $a^x \geq k$ o $\emptyset$ per $a^x \leq 0$.

Esempio 2.23 Risolvere la disequazione $3^{5x+8} > 9^{x+1}$.

$3^{5x+8} > (3^2)^{x+1} = 3^{2x+2} \;\Leftrightarrow\; 5x + 8 > 2x + 2 \;\Leftrightarrow\; x > -2.$

Esempio 2.24 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\ \left(\frac{3}{5}\right)^x < 1, \qquad (b)\ \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} \geq 9, \qquad (c)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} < 2, \qquad (d)\ \left(\frac{\pi}{4}\right)^x > 0.$$

Poiché le funzioni esponenziali a^x con base $0 < a < 1$ sono <u>strettamente decrescenti</u> ed hanno inverse $\log_a x$ <u>strettamente decrescenti</u>, ricaviamo che:

(a) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x < 1 \;\Leftrightarrow\; x > 0$;

(b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x} \geq 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{-3x} \geq 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\dfrac{2}{3}$;

(c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4-x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x > \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 5$;

(d) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{x} > 0$ sempre, in quanto $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall a > 0$.

Criterio 2.25 Per risolvere una disequazione del tipo $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{x} \gtreqless k$ con $a > 1$, k> 0, si può operare la trasformazione $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{x} = a^{-x}$ e ricondursi al caso precedente, come fatto, ad esempio in (b). Alternativamente, come in (c), possiamo applicare ad entrambi i membri della disequazione la funzione $\log_{\frac{1}{a}}$ <u>cambiando</u> il verso della diseguaglianza. Se $k < 0$, la soluzione è immediata (o tutto $\mathbb{R}$ o $\emptyset$).

Esempio 2.26 Risolvere la disequazione $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1-2x} \leq 7$.

Applicando ad entrambi i membri della disequazione la funzione $\log_{\frac{2}{3}}$, otteniamo: $1 - 2x \geq \log_{\frac{2}{3}} 7$, da cui $x \leq \frac{1}{2}(1 - \log_{\frac{2}{3}} 7)$.

Esempio 2.27 Risolvere la disequazione $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2x+1} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}$.

Essa è equivalente a: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3(2x+1)} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-1}$ da cui si ottiene $6x + 3 < x^2 - 1$, equivalente a $x^2 - 6x - 4 < 0$, che è verificata per $x \in (-\infty, 3 - \sqrt{13}) \cup (3 + \sqrt{13}, +\infty)$.

Esempio 2.28 Risolvere la disequazione $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 > 0$.

Poniamo $3^x = t$, che ovviamente deve essere una quantità positiva. La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 > 0 \\ t > 0 \end{cases} .$$

Le soluzioni dell'equazione $t^2 - 5t + 6 = 0$ associata sono $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Quindi il sistema è soddisfatto per $0 < t < 2$ e per $t > 3$. Sostituendo si ottengono le due disequazioni:

$$3^x < 2, \quad 3^x > 3$$

che, una volta risolte, danno come soluzioni della disequazione di partenza $(-\infty, \log_3 2) \cup (1, +\infty)$.

Esempio 2.29 Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $\log x < -2$, $\quad (b)$ $\log_{10} x \geq 3$, $\quad (c)$ $\log_2(x - 4) < 2$, $\quad (d)$ $\log_8 x > 0$.

Poiché le funzioni logaritmiche con base $a > 1$ sono definite per argomenti positivi, sono strettamente crescenti e hanno inverse a^x strettamente crescenti, ricaviamo che:

(a) $\log x < -2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x < e^{-2} \\ x > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; 0 < x < \dfrac{1}{e^2};$

(b) $\log_{10} x \geq 3 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \geq 10^3 \\ x > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x \geq 10^3 = 1000;$

(c) $\log_2(x-4) < 2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x - 4 < 2^2 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; 4 < x < 8;$

(d) $\log_8 x > 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x > 1.$

Criterio 2.30 Per risolvere una disequazione del tipo $\log_a x \gtreqless k$, con $a > 1$, dopo aver posto la condizione di esistenza del logaritmo, possiamo applicare ad entrambi i membri della disequazione data la funzione esponenziale di base a, mantenendo lo stesso verso della diseguaglianza. Avremo quindi così determinato un sistema di disequazioni equivalente alla disequazione di partenza.

Esempio 2.31 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\;\; \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq 5, \qquad (b)\;\; \log_{\frac{2}{3}}(x+1) < 2, \qquad (c)\;\; \log_{\frac{3}{5}}(2x-1) \leq 0.$$

Poiché le funzioni logaritmiche con base $a < 1$ sono definite per argomenti positivi, sono strettamente decrescenti e hanno inverse a^x strettamente decrescenti , ricaviamo che:

(a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq -3 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x - 2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \\ x - 2 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; 2 < x \leq 10$

(b) $\log_{\frac{2}{3}}(x+1) < 2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x + 1 > \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x > -\dfrac{5}{9}$

(c) $\log_{\frac{3}{5}}(2x-1) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (2x-1) \geq \frac{3}{5}^0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x \geq 1$

Criterio 2.32 Per risolvere una disequazione del tipo $\log_{\frac{1}{a}} \gtreqless k$, con $a > 1$, si può operare la trasformazione $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a x$ e ricondursi al caso precedente. Alternativamente, sempre dopo aver posto la condizione di esistenza del logaritmo, si può applicare ad entrambi i membri della disequazione data la funzione esponenziale di base $\frac{1}{a}$, cambiando il verso della diseguaglianza.

Esempio 2.33 Risolvere la disequazione

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 > 0.$$

Deve essere $x > 0$, condizione di esistenza del logaritmo. Poniamo $\log_2 x = t$ e otteniamo la disequazione

$$t^2 - t - 2 > 0$$

che è verificata da $t < -1,\; t > 2$. Sostituendo $\log_2 x$ a t, si ottengono le due disequazioni logaritmiche: $\log_2 x < -1$ e $\log_2 x > 2$, che, risolte nel loro insieme di definizione, danno le soluzioni della disequazione di partenza, cioè $\left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cup (4, +\infty)$.

Disequazioni trigonometriche

Risolviamo ora alcune disequazioni che coinvolgono le funzioni trigonometriche, illustrando i vari metodi di soluzione direttamente negli esempi proposti.

Osservazione 2.34 Osserviamo che, quando dobbiamo risolvere disequazioni in cui compaiono solo funzioni periodiche di periodo T, possiamo dapprima limitarci a risolverle in un intervallo di ampiezza T e poi estendere a tutto R traslando gli intervalli soluzione di kT, $k \in Z$.

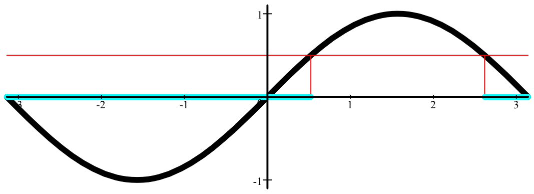
Esempio 2.35 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$(a)\ \sin x \leq 2\,, \qquad (b)\ \cos x > \tfrac{\sqrt{5}}{2}\,, \qquad (c)\ \sin x < \tfrac{1}{2}, \qquad (d)\ \cos x \geq -\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

(a) Poiché vale $-1 \leq \sin x \leq 1$ per ogni x reale, la disequazione è sempre verificata.

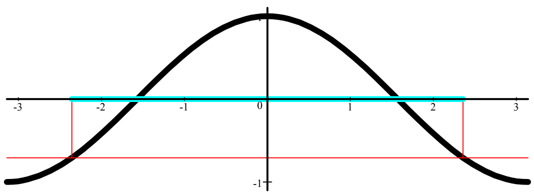
(b) Poiché anche $\cos x$ è limitata superiormente da 1 e $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, non può essere verificata per nessun x reale.

(c) Limitandoci al grafico di $\sin x$ su $(-\pi, \pi]$ [4], innanzitutto notiamo che le intersezioni di tale grafico con la retta $y = \frac{1}{2}$ hanno come ascisse le soluzioni dell'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$ in $(-\pi, \pi]$, cioè $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$. Dunque, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, la disequazione è verificata per $-\pi < x < \frac{\pi}{6}$ e per $\frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$:



La soluzione generale sarà data quindi dall'unione di tutti gli intervalli del tipo $\left(-\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]$, per $k \in Z$.

(d) Limitandoci al grafico di $\cos x$ su $(-\pi, \pi]$, innanzitutto notiamo che le intersezioni di tale grafico con la retta $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ hanno come ascisse le soluzioni dell'equazione $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $(-\pi, \pi]$, cioè $x = \pm\frac{3}{4}\pi$. Dunque, nell'intervallo $(-\pi, \pi]$, la disequazione è verificata per $-\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$:



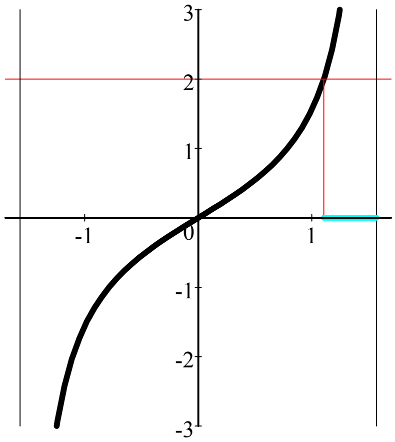
La soluzione generale sarà data quindi dall'unione di tutti gli intervalli del tipo $\left[-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$, per $k \in Z$.

[4] Gli intervalli di ampiezza 2π solitamente usati nella risoluzione di disequazioni trigonometriche che coinvolgono le funzioni seno e coseno sono $(-\pi, \pi]$ o $[0, 2\pi)$.

Esempio 2.36 Risolvere la disequazione

$$2 - \operatorname{tg} x \leq 0 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{tg} x \geq 2.$$

Limitandoci al grafico di $tg\, x$ su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, innanzitutto notiamo che le intersezioni di tale grafico con la retta $y = 2$ hanno come ascisse le soluzioni dell'equazione $\operatorname{tg} x = 2$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, cioè $x =$arctg 2 (ricordiamo che la funzione tangente in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ha come inversa l'arcotangente). Dunque, nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la disequazione è verificata per arctg $2 \leq x < \frac{\pi}{2}$:



La soluzione generale sarà data quindi dall'<u>unione</u> di tutti gli intervalli del tipo $\left[\text{arctg } 2 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, per $k \in Z$.

In certi casi, come i seguenti, possono essere richieste solo le soluzioni all'interno di un intervallo:

Esempio 2.37 Trovare i valori di $x \in [0, 2\pi)$ che verificano la disequazione: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0$.

Ponendo $t = \sin x$, si ottiene una disequazione di II grado: $2t^2 - 3t + 1 < 0$, che ha come soluzioni $1/2 < t < 1$. Pertanto la soluzione è data da

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < t = \sin x < 1 \\ x \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2}.$$

Esempio 2.38 Trovare i valori di $x \in [0, 2\pi)$ che verificano la disequazione:

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 > 0$$

Conviene, quando è possibile, riportarsi al caso in cui l'espressione dipende soltanto da $\sin x$ oppure $\cos x$. Qui ad esempio, usando l'identità fondamentale, si può sostituire $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ed ottenere $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 > 0$ che è equivalente alla disequazione dell'esempio precedente.