

Argomento 2

Esercizi

Esercizio 2.1 Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $2x^2 + x - 1 > 0$

2) $2 - x - x^2 \geq 0$

3) $x^2 + x + 5 \geq 0$

4) $(x + 4)(2x + 5) > 0$

5) $(x + 1)^2 - \frac{x+1}{2} < x^2 + \frac{3}{2}$

6) $3x^2 + 2x \leq 0$

7) $(1 - 3x)^2 + 4x > 2(2x + 1)^2 - 11x - 20$

8) $(3x + 5)^2 > 3(4 + 9x) + 1$

9) $3x^2 - 18x + 27 \leq 0$

10) $(2x - \frac{1}{2})^2 - (2x - \frac{1}{3})(x + 1) \leq 6x + \frac{7}{12}$

11) $2x(5 - 3x) + 2 \geq \frac{2}{3}(9 - 6x)$

12) $x^2 + x + \sqrt{2} < 0$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.2 Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $x^2 - 2|x| - 3 \leq 0$ 2) $|x^3 - x| \leq 0$ 3) $|x^2 - 1| + |x^2 - 5| \geq 0$ 4) $|x - 5| \leq -1$

5) $|2x - 6| > 4$ 6) $\frac{|x - 1|}{|5 - x|} \leq 1$ 7) $x + 4 - 2|x| < 3$ 8) $|x - 1| < |x + 1|$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.3 Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $\frac{7x + 1}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$ 2) $\frac{7x^2 - 2x - 1}{3x - 4} \leq 0$ 3) $(x - 3)(x^2 - 2x + 1) \geq 0$

4) $\frac{-x^2 + 5x - 6}{25 - x^2} \leq 0$ 5) $\frac{x^2 - 7x}{1 - x^2} \geq 0$ 6) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x - x^2} < 0$

7) $\frac{3 + x}{1 - x} > x - 3$ 8) $\frac{8}{6x - x^2 - 8} > -1$ 9) $\frac{x}{x + 2} \leq 3 - x$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.4 Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

1) $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \leq 0 \\ \frac{x^2}{x^2 - 9} < 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 1 > \frac{1}{3}(x - 2) + 2x \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{x - 2}{2x + 1} > 0 \\ \frac{3x - 2}{x} > 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{x - 7} \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 10x + 21} \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + 11x + 24 \leq 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases}$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.5 Risolvere le seguenti disequazioni:

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\sqrt{ x } > x - 1$ | 2) $\sqrt{4 - x^2} < x + 1$ | 3) $x\sqrt{3 - 2x} \leq 1$ |
| 4) $\sqrt{x} > 3x + 1$ | 5) $\sqrt[3]{x} \leq -x$ | 6) $\sqrt{x - 1} > x + 1$ |
| 7) $\sqrt{2x - 3} < \sqrt{4x - 5}$ | 8) $\sqrt{3x^2 - 1} > \sqrt{x^2 - 3}$ | 9) $\sqrt{\frac{x-7}{x-2}} < 4$ |
| 10) $x - 3 < \sqrt[3]{x^3 - x}$ | 11) $\sqrt[5]{x - 4} > 2$ | 12) $\sqrt{x} + 3 \geq \sqrt{x - 2}$ |

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio 2.6 Risolvere le seguenti disequazioni:

- | | | | |
|---------------------------------|-------------------|---|--|
| 1) $2^x > 5$ | 2) $e^x \leq 8$ | 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{4}{9}$ | 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} > 6$ |
| 5) $(2)^{2x} - \frac{1}{4} < 0$ | 6) $4^{2x+1} < 7$ | 7) $3^{x^2-1} > 27$ | 8) $6^{x+1} \geq 3$ |

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.7 Risolvere le seguenti disequazioni:

- | | | |
|-----------------------------------|--|---------------------|
| 1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 > 0$ | 2) $3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$ | 3) $25^x - 5^x > 0$ |
|-----------------------------------|--|---------------------|

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.8 Risolvere le seguenti disequazioni:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\log_2 x < 8$ | 2) $\log_3 x > 5$ | 3) $\log x \leq -\frac{1}{2}$ |
| 4) $\log_2(x^2 - 4) < 2$ | 5) $\log_{1/3}(x^2 - 2x) > -1$ | 6) $\log_3(x + 8 - \sqrt{x - 3}) > 2$ |
| 7) $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x + 3)}{\log_{\frac{1}{2}}(x - 3)} \leq 1$ | 8) $\log_3 \sqrt{3x + 1} - \log_3 \sqrt{9x^2 - 1} \geq 0$ | 9) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) \leq 2$ |

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.9 Risolvere le seguenti disequazioni:

- | | | |
|---------------------------------------|---|--------------------------------------|
| 1) $3 \log_3^2 x + 2 \log_3 x \geq 5$ | 2) $\log_{1/2} x > \log_{1/2}(x + 1) + 1$ | 3) $\log_4^2 x - 2 \log_4 x \leq -1$ |
|---------------------------------------|---|--------------------------------------|

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.10 Risolvere le seguenti disequazioni:

- 1) $2 \sin x < 1$ 2) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\operatorname{tg} x > 1$
 4) $\sin^2 x - 2 \sin x \leq 0$ 5) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 > 0$ 6) $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 2) < 2 \operatorname{tg} x + 3$
 7) $\sin x (\sin x - \frac{1}{3}) > 0$ 8) $\operatorname{tg}^2 x \geq 4$ 9) $\sin^2 x + 2 \cos^2 x < \frac{1}{3}$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.11 Risolvere le seguenti disequazioni:

- 1) $\frac{1 + \log_2(x+1)}{3-x^2} \geq 0$, 2) $\frac{2^{3x}-4}{\sqrt{x}-5} > 0$, 3) $\frac{3^{-x}-1}{2+\log_3(x+2)} \geq 0$.

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio 2.12 Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

- 1) $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ \frac{1-2x}{\log x - 1} < 0 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} 2^{(x+\frac{2}{3})} - 4 > 0 \\ \sqrt{x+1} \leq 3 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x-4} \leq 0 \\ \sqrt{x^2-2x-3} + 2 > 0 \end{cases}$

Argomento

Suggerimento

Soluzione

Esercizio 2.13 Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

- 1) $f(x) = \log \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+2}$ 2) $f(x) = \sqrt{\frac{\log(x+5)}{x+2}}$ 3) $f(x) = \log \left(\frac{x^2-x-6}{x-1} \right)$
 4) $f(x) = \sqrt{\frac{\log(x+3)}{e^{4x}-1}}$ 5) $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt[4]{3^x-\frac{1}{9}}}$ 6) $f(x) = \log \left(\frac{x+3}{|x|-2} \right)$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.14 Determinare il segno delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione:

- 1) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-3x-2}}{(x+2)(3x-10)}$ 2) $f(x) = \frac{4-3x}{\log(x-1)}$ 3) $f(x) = \frac{\log(2x+2)}{3x+1}$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.15 Date le seguenti funzioni, indicarne l'insieme di definizione e tracciarne un grafico qualitativo:

$$1) f(x) = -x^3 \quad 2) f(x) = x^6 \quad 3) f(x) = x^{-5} \quad 4) f(x) = -\sqrt{x} \quad 5) f(x) = \sqrt[7]{x}$$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.16 Tracciare un grafico qualitativo e precisare l'insieme di definizione delle funzioni:

$$1) f(x) = \sqrt{|x|} \quad 2) f(x) = \sqrt{x-1} \quad 3) f(x) = |\log_2 x| \quad 4) f(x) = \log_2 |x|$$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.17 Tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni e dal grafico stabilire per ogni funzione f :

- a) in quali intervalli f è crescente
- b) in quali intervalli f è decrescente
- c) in quali intervalli f è concava
- d) in quali intervalli f è convessa
- e) se f è superiormente limitata nel suo insieme di definizione;
- f) se f è inferiormente limitata nel suo insieme di definizione;
- g) se f ha massimo nel suo insieme di definizione;
- h) se f ha minimo nel suo insieme di definizione;
- k) se f è iniettiva nel suo insieme di definizione.

$$1) f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ -\sqrt{3x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x^3 + \frac{1}{2} & \text{per } x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{x + \frac{1}{2}} & \text{per } \frac{1}{2} < x \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \log(-x) - \frac{1}{2} & \text{per } x < -1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{(x+1)} & \text{per } x \geq -1 \end{cases}$$

Argomento

Soluzione

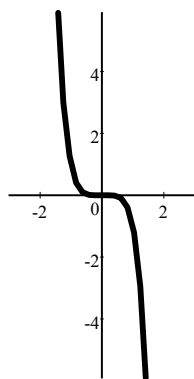
Esercizio 2.18 Quale tra le seguenti funzioni ha approssimativamente il grafico disegnato di seguito?

[A] $f(x) = x^2$

[B] $f(x) = -x^2$

[C] $f(x) = -x^5$

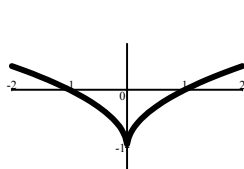
[D] $f(x) = x^5$



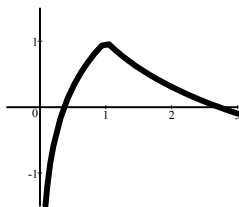
Argomento

Soluzione

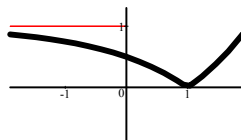
Esercizio 2.19 *Dati i grafici:*



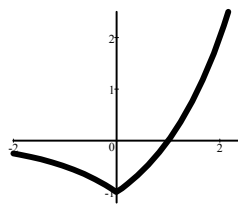
A



B



C



D

e le funzioni:

1) $f(x) = -|\log x| + 1$, 2) $f(x) = |2^{x-1} - 1|$, 3) $f(x) = |2^x - 1| - 1$, 4) $f(x) = \sqrt[2]{|x|} - 1$,

associare ad ogni funzione il suo grafico e trovare le soluzioni delle disequazioni:

a) $\sqrt[2]{|x|} < 1$, b) $|2^x - 1| \geq 1$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.20 *Utilizzando il grafico delle funzioni elementari coinvolte, risolvere per via grafica le seguenti disequazioni:*

1) $2^x + x \leq 0$ 2) $\sin x > 4 - x^2$ 3) $\arctan x - x^2 > 0$

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ULTERIORI ESERCIZI

Esercizio 2.21 Stabilire l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$1) f(x) = \sqrt{\frac{12-4x}{x^2-1}}$$

$$2) f(x) = \sqrt{\frac{\log(x-2)+1}{x^2-9}}$$

$$3) f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2-3x+5}{\log_2(x+1)}}$$

$$4) f(x) = \log(\sqrt{x^2+2x}+7x-1)$$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.22 Stabilire l'insieme di definizione ed il segno delle seguenti funzioni:

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+5x-3}}{\log(3x-2)}$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}-x}{x-2}$$

$$3) f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{e^{(x^2-2x)}-1}}$$

$$4) f(x) = \log\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$$

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.23 Tracciare i grafici delle seguenti funzioni:

$$1) f(x) = -\left(\frac{3}{5}\right)^x + 2 \quad 2) f(x) = |\log(x+1)| \quad 3) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{per } x \leq 0 \\ \cos x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

e stabilire quali tra di esse sono iniettive nel loro campo di esistenza e quali decrescenti in $(-1, 0)$.

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.24 Tracciare un grafico qualitativo della seguente funzione $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+1) + 2 & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ 2^{-x} + 1 & \text{per } 0 < x \leq 2 \\ -\sqrt{x-2} + \frac{5}{4} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

e dal grafico stabilire:

- | | |
|---|--|
| a) se f è limitata in $(-1, +\infty)$; | d) gli intervalli di monotonia di f ; |
| b) se f ha massimo nel suo insieme di definizione e nel caso quale; | e) se f è concava in $(-1, 0)$; |
| c) se f ha minimo nel suo insieme di definizione e nel caso quale; | f) se f è concava in $(-1, +\infty)$. |

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.25 *Disegnare il grafico di*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2 & \text{per } x < 0 \\ |1 - x| & \text{per } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$$

e dedurre:

- a) intervalli di monotonia;
- b) intervalli di convessità;
- c) eventuali punti di massimo o minimo assoluti per f .

Argomento

Soluzione

Esercizio 2.26 *Disegnare il grafico di*

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{per } x \leq 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

e dal grafico stabilire

- a) se f è limitata nel suo insieme di definizione
- b) l'estremo superiore in $(-\infty, 0)$
- c) l'estremo inferiore in $(0, +\infty)$.

Argomento

Soluzione