Argomento 3s

Soluzioni degli esercizi

SUGGERIMENTI

ESERCIZIO 3s.2 (c), (f), (k) Utilizzare il Teorema del Confronto per i limiti di successioni: se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono al limite finito l e $a_n \le c_n \le b_n$ almeno da un certo indice n in poi, allora anche $\{c_n\}$ converge a l.
Che cosa succede facendo il prodotto di una successione limitata e di una convergente a zero?

ESERCIZIO 3s.3 In tutti questi limiti si ha $a_n = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{c_n}$. Se il polinomio P_n al numeratore ha lo stesso grado e coefficiente di quello Q_n al denominatore, si può scrivere $\frac{P_n}{Q_n} = 1 + \frac{R_n}{Q_n}$, ove il grado di R_n è minore del grado di Q_n. In tal caso, poichè l'esponente c_n tende a un ∞ si presenta la forma di indecisione $[1^\infty]$, risolubile usando le conseguenze del limite di Nepero.

ESERCIZIO 3s.8 (c), (d) Ricordare i prodotti notevoli

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3 \qquad \text{e} \qquad (x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3.$$

SOLUZIONI

Sol. Ex. 3s.1 Si tratta sempre di forme indeterminate del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: si possono utilizzare i confronti di infiniti.

a) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - n + 4}{n^{3/2} - n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^3}\right)}{-n^3\left(1 - n^{-3/2}\right)} = \boxed{-2}$

b) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 + n - 3}{n^{2/3} - n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{-n^2} = \boxed{-\infty}$

c) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt[6]{n}}{\sqrt{n} - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/3} + n^{1/6}}{n^{1/2} - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/3}\left(1 + n^{-1/6}\right)}{n^{1/2}\left(1 - n^{-1/2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} n^{(1/3)-(1/2)} = \lim_{n\to+\infty} n^{-1/6} = \boxed{0}$

d) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 + n^2}{e^{n/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{e^{n/2}} = \lim_{n\to+\infty} 8\frac{(n/2)^3}{e^{n/2}} = \boxed{0}$

e) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{(0.5)^n - n}{(0.3)^n + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{\sqrt{n}} = \boxed{-\infty}$: infatti $\{(0.5)^n\}$ e $\{(0.3)^n\}$ tendono a 0, essendo le basi < 1

f) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n - n}{3^n + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \boxed{+\infty}$ (base > 1)

g) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\ln\left(n^{1/2}\right)+(\ln n)^{1/2}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\frac{1}{2}\ln n+(\ln n)^{1/2}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\frac{1}{2}\ln n\left(1+2(\ln n)^{-1/2}\right)} = \boxed{2}$

h) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n-3^{-n}}{\ln(1+3^n)+n^{2/3}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln\left[3^n\left(1+3^{-n}\right)\right]+n^{2/3}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln 3^n+\ln\left(1+3^{-n}\right)+n^{2/3}} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\ln 3+n^{2/3}} = \boxed{\dfrac{1}{\ln 3}}$

k) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^5+5(\ln n)^4}{\sqrt[10]{n}-20} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^5\left(1+5(\ln n)^{-1}\right)}{n^{1/10}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^5}{n^{1/10}} = \boxed{0}$

Sol. Ex. 3s.2 In tutti i casi tranne **(c)**, **(f)**, **(h)**, **(k)** si tratta di forme indeterminate del tipo $[0\cdot\infty]$ risolubili tenendo presenti i limiti notevoli che riguardano seno, coseno e tangente.

a) $\lim_{n\to+\infty} n\sin\dfrac{3n}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{3n}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 3\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}} = \boxed{3}$

b) $\lim_{n\to+\infty} n^2\sin\dfrac{3n+1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{3n}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot n = \lim_{n\to+\infty} 3n = \boxed{+\infty}$

c) Non si tratta di una forma indeterminata

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(e^n)}{n} = \boxed{0}$ poiché $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\sin(e^n)}{n} \le \dfrac{1}{n}$ e si ha: $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}\to 0$ e $\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}\to 0$

d) $\lim_{n\to+\infty} n\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

e) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \boxed{0}$

f) Non si tratta di una forma indeterminata:

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos\sqrt{n}-1}{n} = \boxed{0}$ poiché $-\dfrac{2}{n} < \dfrac{\cos\sqrt{n}-1}{n} < 0$ e $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}\to 0$

g) $\lim_{n\to+\infty} n\tan\dfrac{5n+2}{n-n^2} = \boxed{-5}$ (vedi **(a)**)

h) È una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$; come in **(a)**, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\tan\left(\frac{1}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{n^2}\right)} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

k) Non si tratta di una forma indeterminata:

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n-\cos n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(1-\frac{\cos n}{n}\right)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \boxed{+\infty}$ poiché $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\cos n}{n} \le \dfrac{1}{n}$ e

$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}\to 0$

Sol. Ex. 3s.3 In tutti i casi tranne gli ultimi due si tratta di forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$: è quindi opportuno usare il limite di Nepero.

a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n+2}{n^2-n}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]^3 =$$
$$= \left(e^2\right)^3 = \boxed{e^6}$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+1}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n-1}{n^2-n+1}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]^{-1} =$$
$$= \boxed{e^{-2}}$$

c) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+2n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-2n+2}{n^2+2n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2n}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{e^{-1}}$$

d) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-n+2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-1}\right)^n = \boxed{0}$$

e) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n}{n^3}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = \boxed{1}$$

f) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+n-1}{n^3-2n}\right)^{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3n}{n^3}\right)^{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{3}\right)^n = \boxed{+\infty}$$

g) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^3+n^2-2}{2n^3+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2-3}{2n^3+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \boxed{e^{1/2}}$$

h) Visto che la base $\dfrac{2n^2}{n^2-n+2}$ tende a 2, non si tratta di una forma indeterminata:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2-n+2}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}2^{-n} = \boxed{0}$$

k) Non si tratta di una forma indeterminata:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^3-2}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3-2}{n^2+n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{n^2+2}{n^2+n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}(n-1)^n = \boxed{+\infty}$$

Sol. Ex. 3s.4 In tutti i casi tranne il penultimo si tratta di forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$: è quindi opportuno usare il limite di Nepero.

a) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln n}{n}} = \boxed{1}$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{\ln n}\right)^{(\ln n)\cdot\frac{n}{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-1}\right)^{\frac{n}{\ln n}} = \boxed{0}$$

c) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+2^{-n}\right)^{2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+2^{-n}\right)^{2^n\cdot 2} = \boxed{e^2}$$

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{2n-1}{2n+2}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-3}{2n+2}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{2n}\right)^{\frac{n}{3}(-2)(-\frac{1}{2})} = \boxed{e^{-1/2}}$

e) Non si tratta di una forma indeterminata:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{2n+1}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2})^n = \boxed{+\infty}$$

f) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2} = \boxed{e^{1/2}}$

Sol. Ex. 3s.5 Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo $[\infty \cdot 0]$ risolubili con uno dei limiti che servono per il confronto di infinitesimi.

a) $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n+3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right] = \ln(e^3) = \boxed{3}$

b) Osserviamo che $a_n = n\left(1-3^{\frac{1}{n}}\right) = -\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = -\frac{e^{\frac{\ln 3}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{e^{\frac{\ln 3}{n}}-1}{\frac{\ln 3}{n}}\cdot \ln 3 = \boxed{-\ln 3}$$

c) Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n^{3/2}}\right)^{9/4}-1}{\frac{2}{n^{3/2}}} = \frac{9}{4}$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 2\cdot\frac{n^{3/2}}{2}\cdot\left[1-\left(1+\frac{2}{n^{3/2}}\right)^{9/4}\right] = -2\cdot\frac{9}{4} = \boxed{-\frac{9}{2}}$$

d) Osserviamo che $a_n = n^2\left(2^{\frac{n+1}{n}}-2\right) = 2n^2\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln 2}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \ln 2.$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2\ln 2 \lim_{n\to+\infty} n = \boxed{+\infty}$

e) Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}} = 1$, cioè $\left(e^{-\frac{1}{n}}-1\right)\sim -\frac{1}{n}$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 1$, cioè $\left(\sin\frac{2}{n}\right)\sim\frac{2}{n}$.

Quindi, sostituendo ciascuna successione con la sua asintotica,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{-\frac{1}{n}}-1}\right)\left(\sin\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{-\frac{1}{n}}\cdot\frac{2}{n} = \boxed{-2}$$

f) Osserviamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{4}{n}\right)^{3/2}-1}{-\frac{4}{n}} = \frac{3}{2}$, cioè $\left[\left(1-\frac{4}{n}\right)^{3/2}-1\right]\sim\left(-\frac{4}{n}\cdot\frac{3}{2}\right)$. Quindi, sostituendo la successione con la sua asintotica,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left[\left(1-\frac{4}{n}\right)^{3/2}-1\right] = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\cdot\left(-\frac{4}{n}\cdot\frac{3}{2}\right) = \boxed{0}$$

Sol. Ex. 3s.6 Tre di questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo $[\infty \cdot 0]$ risolubili con uno dei limiti che servono per il confronto di infinitesimi. Gli altri non presentano forme indeterminate.

a) La successione di termine generale $a_n = \sqrt{n} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ presenta una forma indeterminata $[\infty \cdot 0]$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = 1$, cioè $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \boxed{0}$

b) Non è una forma indeterminata: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \boxed{0}$, in quanto prodotto di successioni che tendono a 0

c) $\lim_{n\to+\infty} e^{n+1} \ln(1+e^{-n}) = [\infty \cdot 0] = \lim_{n\to+\infty} e \cdot \frac{\ln(1+e^{-n})}{e^{-n}} = \boxed{e}$

d) Non è una forma indeterminata: $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\ln \frac{n+4}{n^{3/2}-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(n^{-1/2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to+\infty} n^2 \ln n = \boxed{-\infty}$, in quanto prodotto di successioni che tendono a infinito.

e) Non è una forma indeterminata: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \left(\ln \frac{n^2+1}{n-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \cdot \ln n = \boxed{+\infty}$, in quanto prodotto di successioni che tendono a $+\infty$.

f) La successione di termine generale $a_n = \left(\sin \frac{3}{n}\right) \ln(2n+1)$ presenta una forma indeterminata $[0 \cdot \infty]$: poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{3}{n}}{\frac{3}{n}} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\sin \frac{3}{n}\right) \ln(2n+1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} \ln(2n+1) = \boxed{0}$, per confronto di infiniti.

Sol. Ex. 3s.7 Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo $[\infty - \infty]$: alcuni sono banalmente risolubili con considerazioni di ordine di infinito, altri no.

a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \boxed{0}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2-n} - \sqrt{n-1}\right) = \boxed{+\infty}$ poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-n} \left(1 - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2-n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n}$: più semplicemente, la prima radice si comporta come $\sqrt{n^2}$, la seconda come $\sqrt{n}$; visto che $\sqrt{n^2}$ è infinito di ordine superiore a $\sqrt{n}$, il suo comportamento prevale.

c) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2-n} - \sqrt{2n^2-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\sqrt{2}\right) = \boxed{-\infty}$ poiché, per $n \to \infty$, la prima radice si comporta come n, la seconda come $\sqrt{2}n$.

d) $a_n = \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+3n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+3n}\right)\left(\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+3n}\right)}{\sqrt{n^2+5n}+\sqrt{n^2+3n}}$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5n-n^2-3n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n} = \boxed{1}$

e) $a_n = \dfrac{n^2-n}{\sqrt{n^2-1}} - n = n \cdot \dfrac{(n-1)-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-1}} = n \cdot \dfrac{(n-1)^2-(n^2-1)}{\sqrt{n^2-1}\left[(n-1)+\sqrt{n^2-1}\right]}$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{2-2n}{\sqrt{n^2-1}\left[n+\sqrt{n^2}\right]} = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{-2n}{n(2n)} = \boxed{-1}$$

f) $a_n = \dfrac{2n^2-3n}{\sqrt{n^2+n}} - 2n = n \cdot \dfrac{(2n-3)-2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n}} = n \cdot \dfrac{(2n-3)^2-4\left(n^2+n\right)}{\sqrt{n^2+n}\left[(2n-3)+2\sqrt{n^2+n}\right]}$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{4n^2-12n+9-4n^2-4n}{\sqrt{n^2}\left[2n+2\sqrt{n^2}\right]} = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{9-16n}{n\,(2n+2n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-16n}{4n} = \boxed{-4}$$

Sol. Ex. 3s.8 Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo $[\infty - \infty]$.

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} [\ln(3n^3-2n) - \ln(n^3+1)] = \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{3n^3-2n}{n^3+1} = \boxed{\ln 3}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} [\ln(n^2-3n) - \ln(n^2+1)] = \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{n^2-3n}{n^2+1} = \ln 1 = \boxed{0}$

c) $a_n = \sqrt[3]{2n^3+3n^2} - \sqrt[3]{2n^3-n+1} = \dfrac{(2n^3+3n^2)-(2n^3-n+1)}{(2n^3+3n^2)^{2/3}+[(2n^3+3n^2)(2n^3-n+1)]^{1/3}+(2n^3-n+1)^{2/3}}$.

Quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n-1}{2^{2/3}n^2+2^{2/3}n^2+2^{2/3}n^2} = \frac{3}{3\cdot 2^{2/3}} = \boxed{2^{-2/3}}$

d) $a_n = \sqrt[3]{2n^3+n^2+1} + \sqrt[3]{3n-2n^3} = \sqrt[3]{2n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{2n^3-3n}$. Quindi, ragionando come in

(c), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{2^{2/3}n^2+2^{2/3}n^2+2^{2/3}n^2} = \boxed{\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}}$

Sol. Ex. 3s.9 Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo $[\infty^0]$: ci si riconduce a un confronto di infiniti.

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)^{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\ln n}} = \boxed{e^{1/2}}$, poiché,

per $n \to +\infty$, $\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \sim \ln(2\sqrt{n}) = \dfrac{1}{2}\ln n + \ln 2$ e quindi l'esponente tende a $\dfrac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} (n-1)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(n-1)}{\sqrt{n}}} = \boxed{1}$, poiché, per $n \to +\infty$,

$\ln(n-1) \sim \ln n$ e quindi l'esponente tende a 0.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (e^n+2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{\ln(e^n+2)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(e^n+2)}{n}} = \boxed{e}$, poiché, per $n \to +\infty$,

$\ln(e^n+2) \sim n$ e quindi l'esponente tende a 1.

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{n^2}-1\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln\left(e^{n^2}-1\right)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln\left(e^{n^2}-1\right)}{n}} = \boxed{+\infty}$, poiché, per $n\to+\infty$, $\ln\left(e^{n^2}-1\right)\sim n^2$ e quindi l'esponente tende a $+\infty$.

Sol. Ex. 3s.10 Tutti questi limiti presentano una forma indeterminata del tipo $[0^0]$: ci si riconduce a un confronto di infiniti. Si possono utilizzare gli asintotici che provengono dai limiti notevoli utili per il confronto di infinitesimi.

a) Poiché, per $n\to+\infty$, $\sin\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}=n^{-1}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(n^{-1}\right)^{\frac{3}{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-\ln n}\right)^{\frac{3}{\ln n}} = \boxed{e^{-3}},$$

b) Poiché, per $n\to+\infty$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}=n^{-1}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(n^{-1}\right)^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{n^2}} = \boxed{1}, \text{ in quanto } \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^2}=0.$$

c) Poiché, per $n\to+\infty$, $\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sim\frac{1}{n}=n^{-1}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n\to+\infty}\left(n^{-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-\ln n}{\sqrt{\ln n}}} = \boxed{0}, \text{ poiché l'esponente tende a } -\infty.$$

d) Poiché, per $n\to+\infty$, $\sqrt{e^{-n}+1}-1\sim\frac{1}{2}e^{-n}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{e^{-n}+1}-1\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left(e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} = \boxed{e^{-1}}, \text{ in quanto}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$