Argomento 11

Vettori e loro applicazioni

Parte B - Applicazioni geometriche

Utilizzando la nozione di vettore si possono agevolmente rappresentare analiticamente distanze, rette e piani nello spazio.
Supponiamo di aver introdotto nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico destrorso con origine O.
Innanzitutto è ovvio che la **distanza tra due punti** A e B è il modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$ e quindi se $A=(a_1,a_2,a_3)$ e $B=(b_1,b_2,b_3)$ si ha:

$$\mathrm{dist}(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}.$$

Equazioni della retta

Una retta passante per O e per un punto A diverso da O è formata dai punti P tali che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha la stessa direzione del vettore $\overrightarrow{OA}$ cioè

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi.}$$

Dunque se $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ e $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$ si deve avere $(x,y,z)=t\,(a_1,a_2,a_3)$, cioè

$$(x,y,z)=(ta_1,ta_2,ta_3).$$

Più in generale una retta passante per due punti diversi A e B è formata dai punti P tali che il vettore $\overrightarrow{BP}$ ha la stessa direzione del vettore $\overrightarrow{BA}$ cioè

$$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BA} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi.}$$

Dunque se $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$ e $P=(x,y,z)$ si ha $\overrightarrow{BP}=(x-b_1,y-b_2,z-b_3)$ e $\overrightarrow{BA}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$ e quindi

$$(x-b_1,y-b_2,z-b_3)=t\,(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3),$$

cioè

$$(x-b_1,y-b_2,z-b_3)=(t\,(a_1-b_1)\,,t\,(a_2-b_2)\,,t\,(a_3-b_3)).$$

Perché due vettori siano uguali devono essere uguali le loro componenti scalari: quindi <u>le equazioni della retta passante per A e B</u> sono

$$\begin{cases} x-b_1=t\,(a_1-b_1) \\ y-b_2=t\,(a_2-b_2) \\ z-b_3=t\,(a_3-b_3) \end{cases} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi}$$

o mettendo in evidenza le coordinate del punto P variabile sulla retta:

$$(*) \qquad \begin{cases} x = b_1 + t\,(a_1 - b_1) \\ y = b_2 + t\,(a_2 - b_2) \\ z = b_3 + t\,(a_3 - b_3) \end{cases} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi.}$$

Una retta può anche essere assegnata dando un punto B per cui essa passa e la sua direzione $\mathbf{v}$. Con ragionamento analogo al precedente si trova che, se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, le equazioni della retta sono

$$\boxed{(**) \qquad \begin{cases} x = b_1 + tv_1 \\ y = b_2 + tv_2 \\ z = b_3 + tv_3 \end{cases} \qquad \text{con } t \text{ numero reale qualsiasi.}}$$

Tanto le equazioni $(*)$ che le $(**)$ vengono dette **equazioni parametriche della retta**: al variare del parametro t, esse rappresentano tutti i punti della retta.
Il vettore $\overrightarrow{BA}$ e il vettore $\mathbf{v}$, che nelle formule $(*)$ e $(**)$ indicano la direzione della retta, sono detti **vettori direttori della retta**.

Supponiamo di avere due rette r e s nello spazio; può verificarsi una e una sola delle seguenti situazioni:

- r e s hanno più di un punto in comune: allora hanno in comune tutti i punti e vengono dette **coincidenti**;
- r e s hanno uno e un solo punto in comune: allora vengono dette **incidenti**;
- r e s non hanno punti in comune, ma hanno la stessa direzione: allora vengono dette **parallele**;
- r e s non hanno punti in comune e hanno direzioni diverse: allora vengono dette **sghembe**.

Vedremo negli esempi 11.22 come stabilire qual è la posizione reciproca di due rette assegnate in forma parametrica.
Due rette incidenti formano quattro angoli convessi a due a due uguali: si usa comunque parlare "angolo tra le due rette" come se fosse uno solo (l'altro è il suo supplementare) e la sua misura viene assunta come misura dell'angolo tra le due rette.
Più in generale si può parlare anche di angolo tra rette non incidenti, definendolo come l'angolo tra i vettori direttori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ delle due rette. In particolare le due rette saranno

- <u>parallele</u> se i corrispondenti vettori direttori sono proporzionali (l'angolo tra i due vettori può essere di 0 o π radianti): $\mathbf{v} = h\mathbf{w}$ con $h \in \mathbb{R}$ non nullo
- <u>perpendicolari</u> se il prodotto scalare dei due vettori direttori è nullo: $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.

Se il vettore direttore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ha modulo 1, le sue componenti rappresentano i coseni degli angoli formati dalla retta rispettivamente con gli assi x, y, z (e si chiameranno coseni direttori della retta): infatti, detto θ l'angolo formato tra la retta e l'asse x, si ha $v_1 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{i} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{i}| \cos\theta = \cos\theta$ e similmente per gli altri assi.

Esempio 11.21

- Scriviamo le equazioni della retta passante per $A = (1, 2, -1)$ e $B = (0, 3, 0)$.

  Applicando la formula $(*)$ si trova $\begin{cases} x = 0 + t\,(1-0) \\ y = 3 + t\,(2-3) \\ z = 0 + t\,(-1-0) \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -t \end{cases}$.

- Ponendo nelle equazioni appena trovate $t = -1$ troviamo un altro punto della retta: $A' = (-1, 4, 1)$; analogamente, ponendo $t = 3$ troviamo il punto $B' = (3, 0, -3)$ che pure appartiene alla retta. Tutti i punti della retta si ottengono in questo modo.

- Anche il sistema $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$ rappresenta la stessa retta, visto che si può prendere come vettore direttore un qualunque multiplo di $\overrightarrow{BA}$ e in particolare $\overrightarrow{AB}$.

- Se si scambia il ruolo di A con quello di B si ottiene un'altra rappresentazione della retta per $A = (1, 2, -1)$ e $B = (0, 3, 0)$: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

- Se si scelgono altri due punti sulla retta, ad esempio $A' = (-1, 4, 1)$ e $B' = (3, 0, -3)$, si ottiene ancora una rappresentazione diversa: $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

Questo esempio dice che ci sono infiniti modi diversi - ma equivalenti! - di rappresentare una retta nello spazio: per verificare se due sistemi di equazioni rappresentano la stessa retta basta controllare se

- i vettori direttori sono proporzionali (cioè le due rette hanno la stessa direzione)
- uno dei punti appartenenti alla retta rappresentata dal primo sistema (ad esempio quello ottenuto per $t = 0$) appartiene anche alla retta rappresentata dal secondo.

Nell'esempio precedente, $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ rappresentano la stessa retta poiché i due vettori direttori $(1, -1, -1)$ e $(-4, 4, 4)$ (che si ottengono prendendo ordinatamente i coefficienti del parametro t in ciascuno dei due sistemi) sono proporzionali e il punto $B = (0, 3, 0)$ appartiene anche alla retta rappresentata dal secondo sistema, come si vede ponendovi $t = 3/4$.

Esempi 11.22

- Troviamo le equazioni della retta r parallela a quella dell'esempio 11.21 e passante per il punto $C = (3, 1, 2)$.

  Il vettore direttore di r deve essere proporzionale a $(1, -1, -1)$: in particolare si può scegliere $\mathbf{v} = (1, -1, -1)$. Quindi r ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$

- Vogliamo ora stabilire se la retta r ha punti in comune con la retta s di equazioni:

$$\begin{cases} x = 6 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

  Per capire il problema conviene pensare alle due rette come alle traiettorie di due aerei in volo: non ci stiamo chiedendo se i due aerei collideranno, cioè se passeranno allo stesso istante t per lo stesso punto $P = (x, y, z)$, bensì se passeranno per lo stesso punto $P = (x, y, z)$, eventualmente in due istanti diversi t e t'. Dobbiamo cioè riscrivere la retta s come

$$\begin{cases} x = 6 - t' \\ y = -3 + 2t' \\ z = 3 - 3t' \end{cases}$$

  e risolvere il sistema in t e t'

$$\begin{cases} 3 + t = 6 - t' \\ 1 - t = -3 + 2t' \\ 2 - t = 3 - 3t' \end{cases} \qquad \text{che equivale a} \qquad \begin{cases} t + t' = 3 \\ t + 2t' = 4 \\ t - 3t' = -1 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} t' = 1 \\ t = 2 \\ t - 3t' = -1 \end{cases}$$

  Notiamo che $t = 2$ e $t' = 1$ verificano anche l'ultima equazione: quindi <u>le due rette hanno uno e un sol punto in comune</u>, che si ottiene sostituendo (ad esempio) $t' = 1$ nelle equazioni di s: $P = (5, -1, 0)$. Tornando all'esempio dei due aerei, essi hanno toccato terra nello stesso punto, il primo dopo un lasso di tempo doppio rispetto al secondo.

- Se invece la retta s ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 7 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

  la stessa procedura porta a risolvere il sistema

$$\begin{cases} t + t' = 4 \\ t + 2t' = 4 \\ t - 3t' = -1 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} t' = 0 \\ t = 3 \\ t - 3t' = -1 \end{cases}$$

  che risulta però non risolubile poiché sostituendo nell'ultima uguaglianza $t = 3$ e $t' = 0$ si ottiene l'equazione impossibile $3 = -1$. Dunque r e s non hanno punti in comune: visto che i due vettori direttori: $(1, -1, -1)$ e $(-1, 2, -3)$ non sono proporzionali e quindi le due rette non sono parallele, <u>le due rette sono sghembe</u>.

Osservazione 11.23 Quando si rappresenta una retta nello spazio tridimensionale usando le equazioni parametriche sono necessarie tre equazioni. Eliminando il parametro t si può eliminare un'equazione.
Ad esempio ricavando t dalla prima equazione del sistema

$$(\blacklozenge) \qquad \begin{cases} x = t/2 \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

e sostituendo nelle altre equazioni si ottiene

$$\begin{cases} t = 2x \\ 2x + y = 3 \\ 6x - z = -1 \end{cases}$$

e quindi le coordinate dei punti che stanno sulla retta avente equazioni parametriche ($\blacklozenge$) sono legate dalle due condizioni

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x - z = -1 \end{cases}$$

che rappresentano dunque la retta in forma non parametrica.
Un altro modo di procedere è quello di ricavare t da ciascuna delle equazioni parametriche ed uguagliare i risultati ottenuti:

$$\begin{cases} t = 2x \\ t = 3 - y \\ t = \dfrac{z-1}{3} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x = 3 - y = \frac{z-1}{3},$$

che si può anche riscrivere

$$\frac{x}{1/2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

evidenziando al numeratore di ogni frazione le coordinate del punto di passaggio e al denominatore le componenti del vettore direttore [1].
Anche in questo modo si sono individuate due equazioni in x, y, z che rappresentano la retta.
Comunque, nello spazio non basta una sola equazione in x, y, z per rappresentare una retta [2].

Equazione del piano

Ricordando che ci sono infiniti piani ortogonali ad una retta data (tutti paralleli tra loro), si vede che un piano può essere individuato assegnando la direzione $\mathbf{v}$ di una retta ad esso ortogonale e un punto A per cui esso passa.
Se P è un punto appartenente al piano, la retta AP appartiene al piano ed è quindi ortogonale a $\mathbf{v}$: dunque i punti appartenenti al piano sono descritti dall'equazione:

$$\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AP} = 0.$$

[1] Attenzione: questo modo di procedere non può essere utilizzato quando il vettore direttore contiene delle componenti nulle.
[2] Vedere anche la successiva osservazione 11.26

Se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $P = (x, y, z)$ si ottiene l'equazione

$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (x - a_1, y - a_2, z - a_3) = 0$$

cioè

$$\boxed{(\bigstar) \qquad v_1\,(x - a_1) + v_2\,(y - a_2) + v_3\,(z - a_3) = 0.}$$

La $(\bigstar)$ è detta **equazione cartesiana del piano** mentre il vettore $\mathbf{v}$ è detto **vettore direttore del piano** [3]: si noti che esso non può essere nullo, poiché rappresenta la direzione di una retta e quindi almeno uno dei coefficienti di x, y, z deve essere diverso da zero.
Viceversa ogni equazione di primo grado in x, y, z a coefficienti a, b, c non tutti nulli

$$ax + by + cz = d$$

rappresenta un piano.

Esempio 11.24 L'equazione

$$3x - 4y + 2z = 1$$

rappresenta un piano ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (3, -4, 2)$ e passante (ad esempio) per il punto $A = (1, 1, 1)$: il vettore direttore è stato ottenuto prendendo ordinatamente i coefficienti di x, y, z, mentre il punto A è stato ottenuto assegnando il valore 1 a due variabili (ad esempio x e y) e ricavando la terza. Naturalmente se avessimo dato valori diversi alle due variabili, ad esempio $x = 1$ e $y = 0$, avremmo ottenuto un altro punto dello stesso piano: $B = (1, 0, -1)$.

Se $a = b = 0$ il piano $cz = d$ è ortogonale all'asse z (infatti un suo vettore direttore è $\mathbf{k}$) e similmente se si annullano altre due coppie di coefficienti.
Invece se è solo $a = 0$ il piano è parallelo all'asse x (e similmente per gli altri coefficienti) poiché il punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ appartiene al piano $by + cz = d$ se e solo se $ba_2 + ca_3 = d$, ma in questo caso il piano contiene anche tutti i punti $A_t = (t, a_2, a_3)$ con t reale qualunque, cioè tutta la retta passante per A e parallela all'asse x.
Se $d = 0$ il piano passa per l'origine.

Supponiamo di avere due piani α e β nello spazio; può verificarsi una e una sola delle seguenti situazioni:

- α e β hanno in comune tutti i punti: allora vengono detti **coincidenti**;
- α e β si intersecano esattamente lungo una retta: allora vengono detti **incidenti**;
- α e β non hanno punti in comune: allora vengono detti **paralleli**.

---

[3] Visto che ogni vettore della forma $h\mathbf{v}$, con $h \in \mathbb{R}$ non nullo, individua la stessa direzione di $\mathbf{v}$, ogni vettore non nullo proporzionale a $\mathbf{v}$ può essere interpretato come vettore direttore del piano.

Due piani incidenti formano quattro angoli diedri a due a due uguali: si usa comunque parlare "angolo tra i due piani" come se fosse uno solo (l'altro è il suo supplementare) e la sua misura viene assunta come misura dell'angolo tra i due piani.
Fissato un vettore direttore per ciascun piano, si vede che l'angolo tra i due piani è uguale all'angolo tra i due vettori (o ad esso supplementare: dipende dall'orientamento dei vettori). Ciò suggerisce di definire in ogni caso l'angolo tra due piani (anche non incidenti) come l'angolo tra i loro vettori direttori. In particolare:

- due piani sono paralleli se e solo se hanno vettori direttori proporzionali
- due piani sono ortogonali se e solo se hanno vettori direttori ortogonali.

Supponiamo di avere un piano α e una retta r nello spazio; può verificarsi una e una sola delle seguenti situazioni:

- tutti i punti di r appartengono ad α: allora si dice che r giace in α;
- r interseca α esattamente in un punto A: allora retta e piano vengono detti **incidenti**;
- r e α non hanno punti in comune: allora retta e piano vengono detti **paralleli**.

Se r e α sono incidenti, tra i tanti angoli formati da r con le rette del piano passanti per A, il minore è quello formato con la retta s proiezione ortogonale di r sul piano: quest'angolo acuto viene chiamato angolo tra r e α.
Visto che il vettore direttore del piano è ortogonale a s, l'angolo tra r e α è il complementare dell'angolo acuto formato tra un vettore direttore di r e uno di α (bisogna stare attenti nella scelta dei vettori direttori: potremmo trovare due vettori che formano un angolo ottuso).
In particolare:

- un piano e una retta sono paralleli se e solo se hanno vettori direttori ortogonali
- un piano e una retta sono ortogonali se e solo se hanno vettori direttori proporzionali.

Esempi 11.25

- Utilizzando questi enunciati si riscopre che il piano di equazione $by + cz = d$ che ha vettore direttore $(0, b, c)$ è parallelo all'asse x che ha vettore direttore $(1, 0, 0)$, poiché
$$(0, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0.$$
- Un'angolo tra i due piani di equazioni: $x+2y-3z = 0$ e $-3x+y+2z = 4$ è l'angolo θ formato dai vettori $(1, 2, -3)$ e $(-3, 1, 2)$, cioè $\cos\theta = \dfrac{(1,2,-3) \bullet (-3,1,2)}{|(1,2,-3)| \cdot |(-3,1,2)|} = \dfrac{-7}{14} = -\dfrac{1}{2}$ e quindi $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$. L'angolo acuto tra i due piani è il suo supplementare $\theta' = \dfrac{\pi}{3}$

- L'angolo tra il piano di equazione: $x+2y-3z=0$ e la retta di equazioni $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases}$

  è ancora legato ai due vettori direttori dell'esempio precedente: ma l'angolo tra quei due vettori è ottuso, quindi occorre cambiare il verso ad uno dei due vettori direttori, ad esempio a quello della retta. L'angolo tra i vettori $(1,2,-3)$ e $(3,-1,-2)$ è $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$ e quindi l'angolo tra retta e piano è $\frac{\pi}{6}$. Per le note relazioni tra il seno e il coseno di angoli complementari, lo stesso risultato può essere ottenuto calcolando $\arcsin\left|\frac{(1,2,-3)\bullet(-3,1,2)}{|(1,2,-3)|\cdot|(-3,1,2)|}\right|=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

- Cerchiamo l'equazione del piano passante per l'origine e parallelo alle due rette aventi equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad 2x=y=3z-6.$$

  Poiché il piano passa per l'origine, ha equazione della forma $ax+by+cz=0$: bisogna trovarne il vettore direttore (a,b,c) sapendo che esso è ortogonale ai vettori direttori delle due rette. Un vettore direttore della prima retta è $(-3,1,2)$; la seconda si può riscrivere $\frac{x}{1/2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1/3}$ e quindi un suo vettore direttore è $(1/2,1,1/3)$, ma è più comodo scegliere come vettore direttore il suo multiplo: $6\,(1/2,1,1/3)=(3,6,2)$. Un vettore ortogonale tanto a $(-3,1,2)$ che a $(3,6,2)$ è $(-3,1,2)\wedge(3,6,2)=(-10,12,-21)$ e quindi il piano richiesto ha equazione $10x-12y+21z=0$.

- Cerchiamo le equazioni della retta passante per l'origine, parallela al piano avente equazione $x-3z=1$ e perpendicolare alla retta avente equazioni $2x=y=3z-6$.

  – Poiché la retta passa per l'origine, ha equazioni della forma $\begin{cases} x=at \\ y=bt \\ z=ct \end{cases}$

  – poiché è parallela a un piano avente vettore direttore $(1,0,-3)$, il suo vettore direttore (a,b,c) verifica la condizione $(1,0,-3)\bullet(a,b,c)=0$

  – poiché è perpendicolare a una retta avente vettore direttore $(3,6,2)$, il suo vettore direttore (a,b,c) verifica la condizione $(3,6,2)\bullet(a,b,c)=0$.

  Resta quindi da risolvere [4] il sistema $\begin{cases} a-3c=0 \\ 3a+6b+2c=0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} a=3c \\ 6b+11c=0 \end{cases}$: una possibile soluzione è $(18,-11,6)$ e quindi la retta ha equazioni $\begin{cases} x=18t \\ y=-11t \\ z=6t \end{cases}$.

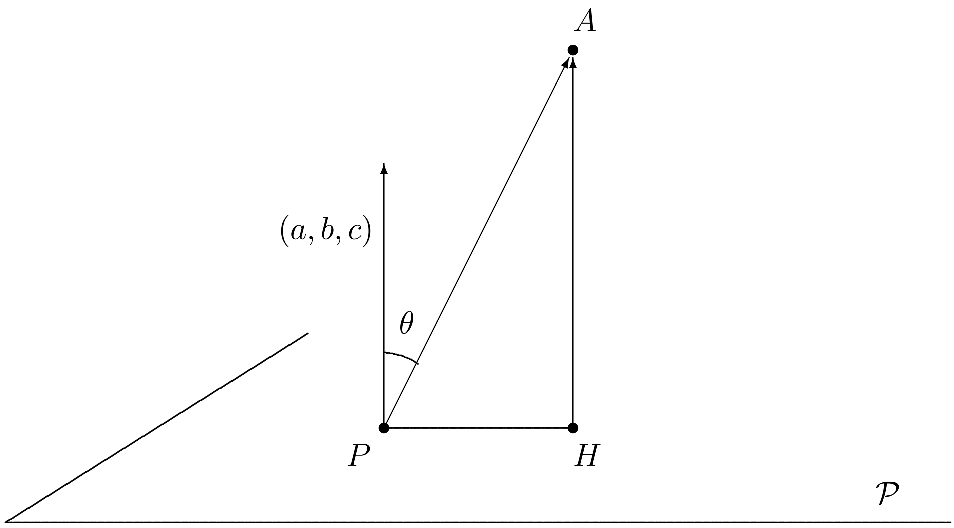
[4] Anche in questo caso si potrebbe semplicemente calcolare $(1,0,-3)\wedge(3,6,2)=(18,-11,6)$.

Osservazione 11.26 L'intersezione di due piani non paralleli è una retta: quindi in generale un sistema del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

rappresenta una retta, purché non ci sia un numero reale h tale che $(a', b', c') = h\,(a, b, c)$.
Se invece esiste un numero reale h tale che $(a', b', c') = h\,(a, b, c)$, il sistema equivale all'unica equazione $ax + by + cz = d$ (e quindi rappresenta un piano) se $d' = hd$, mentre se $d' \neq hd$ il sistema non ha soluzioni e quindi non può rappresentare un insieme di punti.

Osservazione 11.27 Vogliamo calcolare la **distanza di un punto** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **da un piano** $\mathcal{P}$ di equazione $ax + by + cz = d$.



Detta H la proiezione ortogonale di A sul piano, tale distanza è la lunghezza del segmento HA [5].
Osserviamo che, scelto comunque un punto P del piano:
1) il vettore $\overrightarrow{HA}$ è la proiezione del vettore $\overrightarrow{PA}$ sulla direzione ortogonale al piano $\mathcal{P}$,
2) tale direzione è individuata dal vettore direttore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ di $\mathcal{P}$,
3) $\mathbf{v} \bullet \overrightarrow{PA} = |\mathbf{v}| \cdot \left|\overrightarrow{PA}\right| \cos\theta = |\mathbf{v}| \cdot \left|\overrightarrow{HA}\right|$ e quindi

$$\left|\overrightarrow{HA}\right| = \frac{\overrightarrow{PA} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Se $P = (x, y, z)$, risulta $\overrightarrow{PA} = (a_1 - x, a_2 - y, a_3 - z)$. Allora, sostituendo e calcolando il prodotto scalare e il modulo, si ha

$$\left|\overrightarrow{HA}\right| = \left|\frac{(a_1 - x, a_2 - y, a_3 - z) \bullet (a, b, c)}{|(a, b, c)|}\right| = \frac{|a\,(a_1 - x) + b\,(a_2 - y) + c\,(a_3 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ricordiamo che P appartiene al piano e quindi nella formula si può sostituire $ax + by + cz = d$. Dunque la distanza tra A e il piano è data da

$$\boxed{\left|\overrightarrow{HA}\right| = \frac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

[5] Se si preferisce, il problema può essere risolto, invece che come indicato di seguito, trovando le equazioni della retta passante per A e ortogonale al piano $\mathcal{P}$, determinandone l'intersezione H con $\mathcal{P}$ e calcolando la distanza tra A e H.