

Argomento 11 - Esercizi

ESERCIZIO 11.1 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (3, -4)$ e $B = (-2, 0)$. Disegnare il vettore \overrightarrow{AB} e trovare il punto P tale che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$; calcolare infine le componenti del vettore.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.2 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (3, -4)$, $B = (-2, 0)$, $C = (-1, 1)$ e $D = (2, 4)$. Calcolare la somma dei vettori \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} con la regola del parallelogramma. Verificare il risultato calcolando la somma per componenti.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.3 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (1, 3)$, $B = (4, 7)$, $C = (-2, -1)$ e $D = (6, 5)$. Quali tra i seguenti vettori sono uguali a $-2\overrightarrow{AB}$?

A) \overrightarrow{AC}

B) \overrightarrow{CD}

C) \overrightarrow{BC}

D) \overrightarrow{CB}

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.4 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (2a_1, 2a_2)$ e $D = (2b_1, 2b_2)$. L'affermazione $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ è

A) sempre vera

B) mai vera

C) vera solo per particolari valori di a_1, a_2, b_1, b_2

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.5 Nel piano (con sistema di riferimento cartesiano di origine O) si considerino i punti $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (2b_1, 2b_2)$. L'affermazione $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ è

A) sempre vera

B) mai vera

C) vera solo per particolari valori di a_1, a_2, b_1, b_2

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.6 Nel piano si considerino: un vettore \mathbf{v} di modulo 4 avente la direzione e il verso dell'asse x , una retta r tale che $\widehat{xr} = \pi/4$ e una retta s tale che $\widehat{xs} = -\pi/3$. Si determinino geometricamente i vettori componenti di \mathbf{v} secondo le direzioni delle due rette e si calcoli il valore dei loro moduli.

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 11.7 Nello spazio si considerino il vettore $\mathbf{v} = (4, -2, 1)$ ed il punto $A = (1, 0, 2)$. Quali sono le coordinate del punto B tale che $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$?

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.8 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (-1, 1, 2)$. È vero che $\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$? Qualunque sia la risposta, si spieghi che cosa significa.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.9 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1, 3, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$. Si calcoli il modulo di $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.10 A che cosa è uguale il prodotto scalare $(1, -2, 2) \bullet (3, 1, -4)$?

- A) $(3, -2, -8)$ B) -7 C) $(6, 10, 7)$ D) 13

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.11 Nel piano si considerino i vettori $\mathbf{u} = (4, 3)$ e $\mathbf{v} = (-1, 2)$. Si calcoli il vettore proiezione ortogonale di \mathbf{v} nella direzione di \mathbf{u} .

Argomento

Suggerimento

Soluzione

ESERCIZIO 11.12 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (2, -\sqrt{5}, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, \sqrt{5}, 2)$. Si dica se l'angolo da essi formato vale (in radianti)

- A) $-\pi/3$ B) $2\pi/3$ C) $\pi/3$ D) $\pi/6$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.13 Nello spazio si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, -1) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (-1, 1, 2).$$

Si dica se \mathbf{u} forma con \mathbf{v} e \mathbf{w} angoli (non orientati) uguali.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.14 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$. Si trovi un vettore \mathbf{w} non nullo ortogonale ad entrambi. È unico?

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.15 A che cosa è uguale il prodotto vettoriale $(1, -2, 0) \wedge (3, 1, -1)$?

A) $(3, -2, 0)$ B) 1 C) $(2, 1, 7)$ D) $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.16 Come devono essere fatti i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} perché valga l'uguaglianza

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}?$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.17 Nello spazio si considerino i vettori $\mathbf{u} = (-2, -4, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, -1, 2)$. Si stabilisca se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.18 Si stabilisca per quali valori reali di h i vettori

$$\mathbf{u} = (h, -1, h) \text{ e } \mathbf{v} = (2 - h, 1, 0)$$

sono ortogonali e per tali valori si trovi il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.19 Si trovi un vettore \mathbf{w} di modulo 1 che sia contemporaneamente ortogonale a $\mathbf{u} = (2, 1, -4)$ e a $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$. È unico?

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.20 Nello spazio si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (-2, -4, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 1, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (1, -1, 2).$$

Si stabilisca se sono complanari.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.21 Come devono essere fatti i vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} perché valga l'uguaglianza

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})?$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.22 Spiegare perché per ogni coppia di vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} si ha $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = 0$ mentre, se \mathbf{u} e \mathbf{v} non sono proporzionali, il vettore $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è sempre non nullo.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.23 Mostrare che per ogni numero reale h risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + h\mathbf{u}) &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{u} + h\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \\ (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + h\mathbf{u})) \bullet \mathbf{w} &= (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} + h\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.24 Quali delle seguenti scritte hanno senso?

$$\text{A)} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}) \quad \text{B)} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \quad \text{C)} \quad ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} \quad \text{D)} \quad ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u}$$

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.25 Quali delle seguenti scritte hanno senso?

$$\text{A)} \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u} \quad \text{B)} \quad ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}) \bullet \mathbf{u} \quad \text{C)} \quad (\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})) \bullet \mathbf{u}$$

Argomento

Soluzione

Applicazioni geometriche

ESERCIZIO 11.26 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (1, -2, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$. Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.27 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (1, 0, 1)$ e avente la direzione del vettore $\mathbf{v} = (4, 1, 2)$. Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.28 Nello spazio di dimensione 3 il sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ y - 4z = 2 \end{cases}$ rappresenta una retta? In caso affermativo se ne trovi un vettore direttore e i coseni degli angoli formati con gli assi.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.29 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (1, 1, -1)$ e parallela alla retta di equazioni $x + z = 3x - y + 1 = 0$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.30 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (3, -2, 1)$ e ortogonale al piano di equazione $2x + y - 4z = 0$. Passare poi a una rappresentazione della retta che non contenga parametri.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.31 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A = (1, 2, 3)$ e ortogonale alle due rette di equazioni rispettivamente $\frac{x-2}{3} = \frac{2-y}{2} = 2z+1$ e $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.32 Stabilire se le rette trovate nei due esercizi precedenti sono diverse e in caso affermativo se sono parallele, incidenti o sghembe.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.33 Calcolare la misura dell'angolo acuto formato dalle rette di equazioni $\frac{x-3}{2} = y+2 = \frac{1-z}{4}$ e $x = -y = z$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.34 Trovare le equazioni della retta passante per $A = (1, 0, 0)$, ortogonale alla retta di equazioni $2-x = 3y = z$ e parallela al piano di equazione $x + y + z = 0$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.35 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (0, 1, 1)$ e parallelo al piano di equazione: $3x - 2y - z = 0$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.36 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (1, 0, 1)$ e ortogonale alla retta di equazioni: $1 - x = y = 3z$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.37 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ e $C = (1, 0, 2)$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.38 Si verifichi che il punto $C = (1, 0, 2)$ non appartiene alla retta di equazioni $2 - x = y = 2z$ e si calcoli l'equazione del piano contenente tanto la retta che il punto.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.39 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e parallelo alla retta di equazioni: $x = y = 2z - 1$ e si calcoli la sua distanza dall'origine.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.40 Si scriva l'equazione del piano passante per $A = (0, 1, 0)$, parallelo alla retta di equazioni: $x - 1 = 2y = -z$ e ortogonale al piano di equazione $x - y - z = 0$.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.41 Calcolare la misura dell'angolo ottuso formato dai piani trovati nei due esercizi precedenti.

Argomento

Soluzione

Applicazioni fisiche

ESERCIZIO 11.42 Una renna trascina una slitta mediante una bretella con una forza di $20N$. La bretella forma un angolo 30° con il suolo. Determinare il valore della forza che fa muovere la slitta ed il valore della forza che tende a sollevarla.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.43 La renna dell'esercizio precedente trascina la slitta in linea retta lungo il suolo per $16m$. Trovare il lavoro effettuato dalla forza applicata alla slitta.

Argomento

Soluzione

ESERCIZIO 11.44 Un battello che si muove con una velocità di $16km/h$ deve attraversare un fiume la cui corrente, costante in ogni suo punto, è di $8km/h$. Quale angolo rispetto alla riva deve mantenere il battello per raggiungere la riva opposta compiendo il tragitto minimo?

Argomento

Suggerimento

Soluzione