Argomento 14 - Esercizi

ESERCIZIO 14.1 Trovare parte reale, parte immaginaria, coniugato e modulo dei seguenti numeri complessi

a) $z = 2 - \sqrt{2}i$ **b)** $z = -\sqrt{7}i$ **c)** $z = -10 + 10\sqrt{3}i$ **d)** $z = 10 - 10\sqrt{3}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.2 Dati i numeri $z = -2-3i$ e $w = -3+4i$, calcolare $z-w$, zw, $\frac{1}{w}$, $\frac{z}{w}$ esprimendo il risultato in forma algebrica.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.3 Scrivere in forma algebrica:

a) $z = \frac{(2+i)(1-i)}{3-2i}$ **b)** $z = \frac{1}{i(3+2i)^2}$ **c)** $z = \frac{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.4 Trovare il modulo e un argomento dei seguenti numeri complessi:

a) $z = 1 - i$ **b)** $z = 11i$ **c)** $z = -\frac{\pi}{4}$

d) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ **e)** $z = -4i$ **f)** $z = \frac{1}{2}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.5 Dati i numeri $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e $w = \sqrt{3} + i$, calcolare z^{20} e w^{13}.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.6 Trovare modulo ed un argomento delle radici n-esime dei seguenti numeri complessi, e disegnarle sul piano. Trovare la forma trigonometrica di tali radici e quella algebrica.

a) $z = -8$ ove $n = 3$ **b)** $z = 27i$ ove $n = 3$

c) $z = -1 + i\sqrt{3}$ ove $n = 2$ **d)** $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ ove $n = 4$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.6 bis Trovare modulo ed un argomento delle radici n-esime dei seguenti numeri complessi, e disegnarle sul piano. Trovare la forma trigonometrica di tali radici e quella algebrica.

a) $z = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}$ ove $n = 3$ **b)** $z = 64i$ ove $n = 6$

c) $z = -64i$ ove $n = 6$ **d)** $z = -16$ ove $n = 8$

e) $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ove $n = 4$ **f)** $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ove $n = 3$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.7 Sia $z_0 = 1 + 2i$ una radice quarta di un numero complesso α; si scrivano in forma algebrica le restanti radici quarte di α, dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.8 Sia $z_0 = 4 - 3i$ una radice ottava di un numero complesso α; si scrivano in forma algebrica le restanti radici ottave di α, dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.9 Sia $z_0 = -3 + 2i$ una radice terza di un numero complesso α; si scrivano in forma algebrica le restanti radici terze di α, dopo averle rappresentate nel piano di Argand-Gauss.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.10 Si rappresentino le radici del polinomio a coefficienti reali $P(x) = (x+2)^4 + 1$ nel piano di Argand-Gauss. Si dia poi una scomposizione di $P(x)$ come prodotto di polinomi a coefficienti complessi di primo grado e una come prodotto di polinomi reali di secondo grado.

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 14.11 Determinare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:

a) $z^2 + 2z + 3 = 0$ **b)** $z^2 + 2iz - 3 = 0$

c) $iz^2 + (1+i)z + 1 = 0$ **d)** $z^6 + 2z^3 - 1 = 0$

e) $2|z|^2 = z^3$ **f)** $z^2 + \overline{z} = 0$

g) $(\overline{z})^4 = |z|$ **h)** $iz^3 = \overline{z}$

i) $i\,\mathrm{Re}(z) + z^2 = |z|^2 + 1$ **j)** $z + 3i + (\mathrm{Re}(z))(i + (\mathrm{Im}(z))^2) = 0$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 14.12 Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi e descriverli a parole:

a) $A = \{z : \quad 0 \leq \mathrm{Re}(z) < 2\pi\}$ **b)** $B = \{z : \quad 0 \leq \mathrm{Re}(iz) < 2\pi\}$

c) $C = \{z : \quad \mathrm{Re}(z^2) = 2\}$ **d)** $D = \{z : \quad \mathrm{Im}(z^2) = 2\}$

e) $E = \{z : \quad |z^3| < 2\}$ **f)** $F = \{z : \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 2\}$

g) $G = \{z : \quad \left|\frac{1}{z}\right| \geq 2\}$ **h)** $H = \{z : \quad \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 2\}$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 14.13 Individuare sul piano complesso il luogo dei punti z tali che sia reale il numero:

$$\frac{z+1-i}{z+1}$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.14 Si rappresenti sul piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z per i quali risulti

$$|z+1| \leq \frac{5}{2} < |z-2i|.$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.15 Si rappresentino sul piano di Argand-Gauss gli insiemi dei numeri complessi z per i quali risulti

a) $|z+1| \leq |z-2i| < \frac{5}{2}$ **b)** $|z-2| \leq |z+i| < \frac{5}{4}$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.16 Si denoti con $\arg(z)$ l'argomento principale del numero complesso non nullo z. Disegnare sul piano complesso i seguenti insiemi:

a) $A = \left\{z : \quad 1 < |z| < 2; \quad \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\right\}$

b) $B = \{iz : \quad z \in A\}$

c) $C = \left\{z : \quad |z-1| < \left|\frac{z}{2}\right|; \quad 3\arg(z) > \frac{\pi}{2} + \arg(\overline{z})\right\}$

Argomento *Soluzione*

Qualche esercizio teorico

ESERCIZIO 14.17 Si mostri che w è una radice n-esima del numero complesso z se e solo se $\overline{w}$ è una radice n-esima di $\overline{z}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.18 Denotati con α e β due numeri complessi, che cosa rappresenta l'uguaglianza $|z-\alpha| = |z-\beta|$ nel piano di Argand-Gauss?

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 14.19 Si denoti con $\arg(z)$ l'argomento principale del numero complesso non nullo z. Si dica, motivando, se almeno una delle seguenti relazioni è verificata da ogni numero complesso non nullo z:

$$\begin{aligned} \arg(z\,\overline{z}) &= \arg(z)\cdot\arg(z^{-1}), \\ \arg(z\,\overline{z}) &\equiv \arg(z)+\arg(z^{-1}) \mod 2\pi, \\ \arg(z\,\overline{z}) &\equiv \arg(z)\cdot\arg(z^{-1}) \mod 2\pi. \end{aligned}$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 14.20 Senza operare conti, si dica quali delle seguenti disuguaglianze sono risolubili, quali impossibili, quali prive di significato:

$$z+\overline{z}+|z|^2 \leq 0, \qquad z-\overline{z}+|z|^2 \geq 0, \qquad |2z| < |z-\overline{z}|$$

Argomento *Soluzione*