Argomento 14

Soluzioni degli esercizi

SUGGERIMENTI

ESERCIZIO 14.10 Porre $x + 2 = z$.

ESERCIZIO 14.11 Le equazioni di secondo grado in z si risolvono sostanzialmente come si suole fare nel campo reale, senza restrizioni sul discriminante; quelle di grado superiore o che coinvolgono moduli e coniugati si risolvono passando (dopo opportune considerazioni) alla forma trigonometrica; quelle che coinvolgono anche parte reale ed immaginaria si risolvono ponendo $z = x+iy$ e risolvendo il sistema delle due equazioni (in x e y) relative a parte reale ed immaginaria.

ESERCIZIO 14.12 Porre $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 14.19 Osservare che $\arg(z^{-1}) = \arg(\overline{z})$.

SOLUZIONI

Sol. Ex. 14.1

z	$\sqrt{2} - 2i$	$-\sqrt{7}i$	$-10 + 10\sqrt{3}i$	$10 - 10\sqrt{3}$
$\mathrm{Re}\, z$	$\sqrt{2}$	0	-10	$10 - 10\sqrt{3}$
$\mathrm{Im} z$	-2	$-\sqrt{7}$	$10\sqrt{3}$	0
$\overline{z}$	$\sqrt{2} + 2i$	$\sqrt{7}i$	$-10 - 10\sqrt{3}i$	$10 - 10\sqrt{3}$
$\lvert z\rvert$	$\sqrt{2+4} = \sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	20	$-10 + 10\sqrt{3}$

Sol. Ex. 14.2

$$z - w = 1 - 7i\ ; \qquad zw = 18 + i\ ; \qquad \frac{1}{w} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\ ; \qquad \frac{z}{w} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i$$

Sol. Ex. 14.3

a) $z = \dfrac{(2+i)(1-i)}{3-2i} = \dfrac{(3-i)\,(3+2i)}{(3-2i)\,(3+2i)} = \dfrac{11}{13} + \dfrac{3}{13}i$

b) $z = \dfrac{1}{i(3+2i)^2} = \dfrac{-i\,(5-12i)}{(5+12i)\,(5-12i)} = -\dfrac{12}{169} - \dfrac{5}{169}i$

c) $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}} = \dfrac{i^3\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}} = -i\left(\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)^2 = -2\sqrt{6}+i$

Sol. Ex. 14.4

Denotando con θ l'argomento prescelto per rappresentare il numero complesso, si ha

a) $|1-i| = \sqrt{2}, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{4}$ **b)** $|11i| = 11, \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$ **c)** $\left|-\dfrac{\pi}{4}\right| = \dfrac{\pi}{4}, \quad \theta = \pi$

d) $\left|-2+2\sqrt{3}i\right| = 4, \quad \theta = \dfrac{2\pi}{3}$ **e)** $|-4i| = 4, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{2}$ **f)** $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}, \quad \theta = 0$

Sol. Ex. 14.5

Poiché $\left|-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right| = 2$ e l'argomento principale di $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ è $\dfrac{3\pi}{4}$, il numero z si rappresenta in forma trigonometrica come $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$: quindi

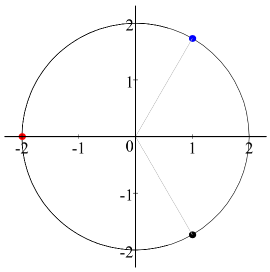
$$z^{20} = 2^{20}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 20\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 20\right)\right] = -2^{20}.$$

Poiché $\left|\sqrt{3}+i\right| = 2$ e l'argomento principale di $\sqrt{3}+i$ è $\dfrac{\pi}{6}$, il numero z si rappresenta in forma trigonometrica come $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$: quindi

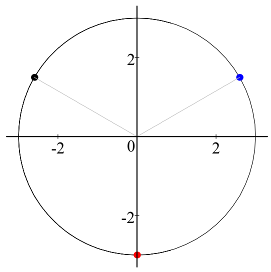
$$z^{13} = 2^{13}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 13\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 13\right)\right] = 2^{13}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i.$$

Sol. Ex. 14.6

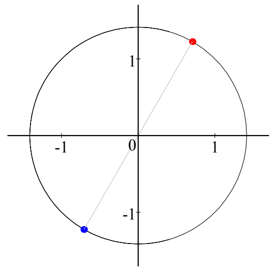
a) $z = -8$ ha modulo 8 e argomento principale $\theta = \pi$. Quindi le sue radici terze hanno modulo $\sqrt[3]{8} = 2$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$ con $k = -1, 0, 1$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$ e in particolare: $w_0 = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 1 + \sqrt{3}i$ e $w_1 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2$.
La forma algebrica della restante radice si ricava osservando che w_{-1} è simmetrica di w_1 rispetto all'asse reale: $w_{-1} = \overline{w_1} = 1 - \sqrt{3}i$.



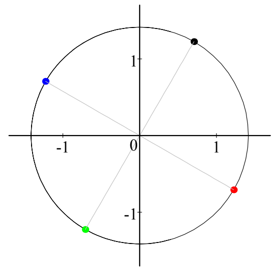
esercizio (a)



esercizio (b)



esercizio (c)



esercizio (d)

b) $z = 27i$ ha modulo 27 e argomento principale $\theta = \pi/2$. Quindi le sue radici terze hanno modulo $\sqrt[3]{27} = 3$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$ con $k = -1, 0, 1$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Per trovare facilmente la loro forma algebrica, osservare che

$w_{-1} = 3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = -3i, \quad w_0 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

e la restante radice è simmetrica di questa rispetto all'asse immaginario: $w_1 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

c) $z = -1 + i\sqrt{3}$ ha modulo 2 e argomento principale $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. Quindi le sue radici quadrate hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ con $k = -1, 0$.

Dunque in forma trigonometrica le radici, che sono una l'opposta dell'altra, si esprimono come: $w_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right)\right]$.

La loro forma algebrica è: $w_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $w_{-1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

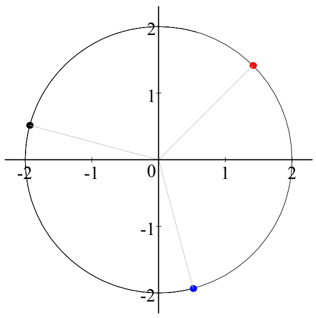
d) $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ ha modulo 4 e argomento principale $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$. Quindi le sue radici quarte hanno modulo $\sqrt{2}$ e argomento principale $\theta_k = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$ con $k = -1, 0, 1, 2$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

La loro forma algebrica si ricava osservando che

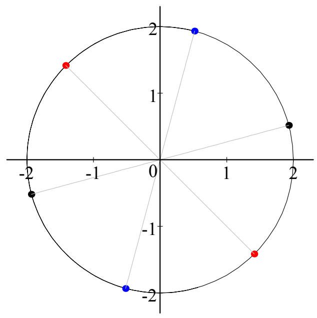
- per ognuno dei $k > 0$ si ha $w_k = -w_{k-2}$
- per $k = 0$, $\theta_0 = -\dfrac{\pi}{6} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{2}\left(\cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0)\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -w_2$
- per $k = 1$, $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2} + \theta_0 \Longrightarrow w_1 = \sqrt{2}\left(-\sin(\theta_0) + i\cos(\theta_0)\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2} = -w_{-1}$

Sol. Ex. 14.6 bis

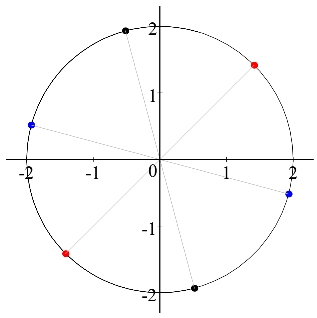
a) $z = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}$ ha modulo 8 e argomento principale $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Quindi le sue radici terze hanno modulo 2 e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3}$ con $k = -1, 0, 1$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$. Quindi $w_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, mentre l'espressione algebrica delle restanti radici si ricava usando le formule di addizione per coseno e seno e osservando che w_{-1} è simmetrica di w_1 rispetto alla bisettrice del I-III quadrante: $w_1 = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $w_{-1} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.



esercizio (a)



esercizio (b)



esercizio (c)

b) $z = 64i$ ha modulo 64 e argomento principale $\theta = \pi/2$. Quindi le sue radici seste hanno modulo $\sqrt[6]{64} = 2$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$ con $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.
Per trovare facilmente la loro espressione algebrica, osservare che

- per ognuno dei $k < 0$ si ha $w_k = -w_{k+3}$
- per $k = 2$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{4} \Longrightarrow w_2 = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = -w_{-1}$
- per $k = 1$, $\theta_1 = \theta_2 - \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow$

$$w_1 = 2\left[\cos\left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = -w_{-2}$$

- per $k = 0$, $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2} - \theta_1 \Longrightarrow$

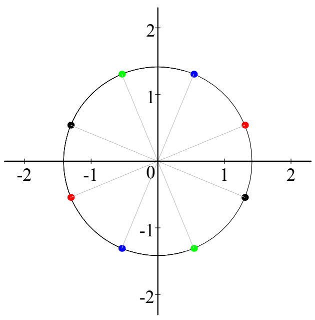
$$w_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right] = 2\left(\sin(\theta_1) + i\cos(\theta_1)\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = -w_{-3}$$

c) $z = -64i$ ha modulo 64 e argomento principale $\theta = -\pi/2$. Quindi le sue radici seste hanno modulo $\sqrt[6]{64} = 2$ e argomento principale $\theta_k = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$ con $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.
La loro espressione algebrica si ricava come sopra: $w_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = -w_{-2}$;

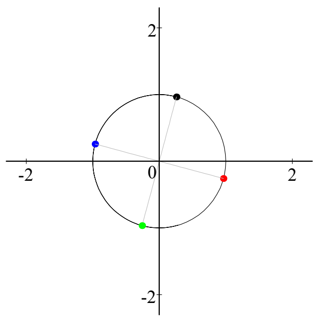
$w_0 = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} = -w_3$; $w_2 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = -w_{-1}$

d) $z = -16$ ha modulo 16 e argomento principale $\theta = \pi$. Quindi le sue radici ottave hanno modulo $\sqrt[8]{16} = \sqrt{2}$ e argomento principale $\theta_k = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$ con $k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\right)\right]$.
La loro espressione algebrica si ricava applicando le formule di bisezione (vedi MiniMat Lezione 7) per trovare $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ e $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ e osservando che

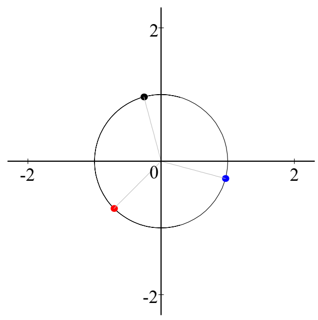
- per ognuno dei $k < 0$ si ha $w_k = -w_{k+4}$
- per $k = 0$, $\theta_0 = \dfrac{\pi}{8} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{2}\left(\cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0)\right) = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + i\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -w_{-4}$
- per $k = 1$, $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \theta_0 \Longrightarrow w_1 = \sqrt{2}\left(\sin(\theta_0) + i\cos(\theta_0)\right) = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + i\sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -w_{-3}$
- per $k = 2$, $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2} + \theta_0 \Longrightarrow w_2 = \sqrt{2}\left(-\sin(\theta_0) + i\cos(\theta_0)\right) = -\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + i\sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -w_{-2}$
- per $k = 3$, $\theta_3 = \pi - \theta_0 \Longrightarrow w_3 = \sqrt{2}\left(-\cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0)\right) = -\sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + i\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -w_{-3}$



esercizio (d)



esercizio (e)



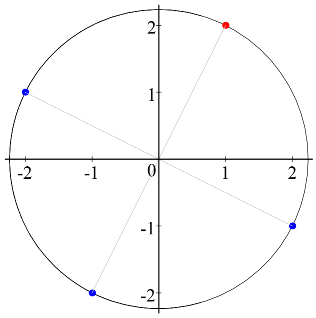
esercizio (f)

e) $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ha modulo 1 e argomento principale $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$. Quindi le sue radici quarte hanno modulo 1 e argomento principale $\theta_k = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$ con $k = -1, 0, 1, 2$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = \cos\left(-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)$.
La loro espressione algebrica si ricava come sopra:
$w_0 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = -w_2$;
$w_1 = -\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = -w_{-1}$.

f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ha modulo 1 e argomento principale $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$. Quindi le sue radici terze hanno modulo 1 e argomento principale $\theta_k = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}$ con $k = -1, 0, 1$. Dunque in forma trigonometrica le radici si esprimono come: $w_k = \cos\left(-\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

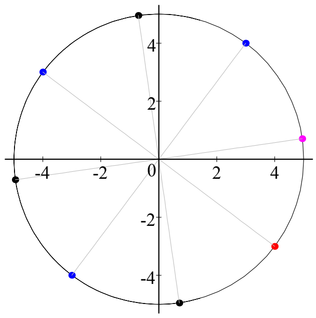
La loro espressione algebrica si ricava osservando che $\theta_{-1} = -\frac{3\pi}{4}$ e quindi $w_{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e inoltre w_1 è simmetrica di w_0 rispetto alla bisettrice del I-III quadrante.
Quindi $w_0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $w_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Sol. Ex. 14.7



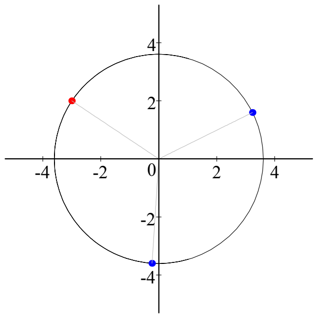
Se $z_0 = 1 + 2i$ è una radice quarta di un numero complesso α, le altre radici quarte si trovano sulla stessa circonferenza con centro nell'origine a cui appartiene z_0 (che ha raggio $\sqrt{5}$): una sarà la sua opposta $z_2 = -1 - 2i$, le altre due stanno in direzione ortogonale a queste e quindi sono $z_1 = -2 + i$ e $z_3 = 2 - i$.

Sol. Ex. 14.8



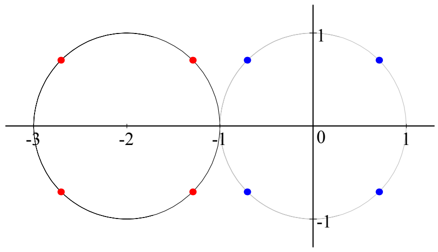
Se $z_0 = 4 - 3i$ una radice ottava di un numero complesso α, le altre radici ottave si trovano ai vertici di un ottagono regolare inscritto nella circonferenza con centro nell'origine a cui appartiene z_0 (che ha raggio 5): una sarà la sua opposta $z_4 = -4 + 3i$, altre due stanno in direzione ortogonale a queste e quindi sono $z_2 = 3 + 4i$ e $z_3 = -3 - 4i$. Vi sono poi le radici ruotate di $\pi/4$ rispetto a queste: $z_1 = \frac{7\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_5 = -\frac{7\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{7\sqrt{2}}{2}$, $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Sol. Ex. 14.9



Se $z_0 = -3 + 2i$ una radice terza di un numero complesso α, le altre radici terze si trovano ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza con centro nell'origine a cui appartiene z_0 (che ha raggio $\sqrt{13}$): quindi sono ruotate di $2\pi/3$ e $-2\pi/3$ rispetto a z_0:
$z_1 = \left(-3 \cdot \frac{-1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(2 \cdot \frac{-1}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,
$z_2 = \left(-3 \cdot \frac{-1}{2} - 2 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(2 \cdot \frac{-1}{2} - 3 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(-1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Sol. Ex. 14.10 Posto $x+2=z$, si ha $z^4+1=0$ se e solo se z è una radice quarta di -1. Si vede quindi che le radici del polinomio $P(x)=(x+2)^4+1$ nel piano di Argand-Gauss risultano traslate di tali radici quarte nella direzione dell'asse reale e nel verso negativo di 2 unità.



Le 4 radici di -1 sono $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Di conseguenza $x_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono le radici (a due a due coniugate) del polinomio $P(x)$ che si può quindi scrivere come prodotto di polinomi a coefficienti complessi di primo grado come segue:

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Tenendo conto che $x_3=\overline{x_0}$ e $x_2=\overline{x_1}$ si vede che
$P(x)=[(x-x_0)(x-\overline{x_0})]\cdot[(x-x_1)(x-\overline{x_1})]=\left[x^2-2(\mathrm{Re}\,x_0)\,x+|x_0|^2\right]\cdot\left[x^2-2(\mathrm{Re}\,x_1)\,x+|x_1|^2\right]=$
$=\left[x^2-\left(\sqrt{2}-4\right)x+5-2\sqrt{2}\right]\cdot\left[x^2-\left(\sqrt{2}+4\right)x+5+2\sqrt{2}\right].$

Sol. Ex. 14.11

a) $z^2+2z+3=0 \Leftrightarrow (z+1)^2+2=0 \Leftrightarrow (z+1)^2=-2 \Leftrightarrow z=-1\pm\sqrt{2}i$

b) $z^2+2iz-3=0 \Leftrightarrow (z+i)^2-2=0 \Leftrightarrow z=-i\pm\sqrt{2}$

c) $iz^2+(1+i)z+1=0 \Leftrightarrow -i\,(iz^2+(1+i)z+1)=0 \Leftrightarrow z^2+(1-i)z-i=0$ cioè, applicando la proprietà che lega i coefficienti di un'equazione di secondo grado alle sue radici: $z=-1$ oppure $z=i$.
Se non si ricorda tale proprietà basta proseguire nel seguente modo:
$\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{2}(1-i)z+\frac{1}{4}(1-i)^2+\frac{1}{2}i-i=0 \Leftrightarrow \left[z+\frac{1}{2}(1-i)\right]^2=\frac{1}{2}i \Leftrightarrow z+\frac{1}{2}(1-i)=\pm\frac{1}{2}(1+i) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z=-1$ oppure $z=i$.

d) $z^6+2z^3-1=0 \Leftrightarrow z^3=-1\pm\sqrt{2}$. Si tratta dunque di trovare le radici cubiche complesse di due numeri reali, uno, $a=-1+\sqrt{2}$, positivo (e quindi di argomento 0), l'altro, $b=-1-\sqrt{2}$, negativo (e quindi di argomento π). Le radici di a sono $z_0=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$, $z_1=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $z_2=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Quelle di b sono $z_3=-\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$, $z_4=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $z_6=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Dunque ci sono 6 soluzioni distinte.

e) $2|z|^2=z^3$ ha tra le sue soluzioni $z=0$. Se $z\neq 0$ si può scrivere in forma trigonometrica: $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ e quindi l'equazione diventa: $2|z|^2=|z|^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$, cioè $|z|(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=2$. Questo succede se e solo se $|z|=2$ e $3\theta=2k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$). Ciò dà luogo a 3 radici distinte ottenute per $k=0,1,-1$: $z_0=2$, $z_1=-1+i\sqrt{3}$ e $z_{-1}=-1-i\sqrt{3}$. Dunque l'equazione ha 4 soluzioni distinte.

f) $z^2 + \overline{z} = 0$ ha tra le sue soluzioni $z = 0$. Se $z \neq 0$, si può si può moltiplicare per z ottenendo l'equazione equivalente: $z^3 + |z|^2 = 0$ e sostituire: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Come sopra si arriva all'equazione: $|z|(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = -1$. Questo succede se e solo se $|z| = 1$ e $3\theta = \pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Ciò dà luogo a 3 radici distinte ottenute per $k = 0, 1, -1$: $z_0 = -1$, $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_{-1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque l'equazione ha 4 soluzioni distinte.

g) $(\overline{z})^4 = |z| \Leftrightarrow \overline{(\overline{z})^4} = \overline{|z|} \Leftrightarrow (z)^4 = |z|$. Tra le sue soluzioni c'è $z = 0$. Se $z \neq 0$, si può sostituire: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Si arriva all'equazione: $|z|^3(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 1$. Questo succede se e solo se $|z| = 1$ e $4\theta = 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Ciò dà luogo a 4 radici distinte ottenute per $k = -1, 0, 1, 2$: $z_0 = 1$, $z_1 = i$ e le loro opposte $z_2 = -1$ e $z_{-1} = -i$. Dunque l'equazione ha 5 soluzioni distinte.

h) $iz^3 = \overline{z}$ ha tra le sue soluzioni $z = 0$. Se $z \neq 0$, si può moltiplicare per $-iz$ ottenendo l'equazione equivalente: $z^4 = -i|z|^2$ e sostituire: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Come sopra si arriva all'equazione: $|z|^2(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = -i$. Questo succede se e solo se $|z| = 1$ e $4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Ciò dà luogo a 4 radici distinte ottenute per $k = -1, 0, 1, 2$: $z_0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $z_1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ e le loro opposte $z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ e $z_{-1} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Dunque l'equazione ha 5 soluzioni distinte.

i) Posto $z = x + iy$ (con x, $y \in \mathbb{R}$) l'equazione $i\,\mathrm{Re}(z) + z^2 = |z|^2 + 1$ diventa

$$ix + (x + iy)^2 = x^2 + y^2 + 1 \quad \text{cioè} \quad -(2y^2 + 1) + i(x + xy) = 0.$$

Questo succede se e solo se è verificato il sistema $\begin{cases} 2y^2 + 1 = 0 \\ x(1 + y) = 0 \end{cases}$.

Ma la prima equazione è impossibile e quindi l'equazione assegnata è impossibile.

j) Posto $z = x + iy$ (con x, $y \in \mathbb{R}$) l'equazione $z + 3i + (\mathrm{Re}(z))(i + (\mathrm{Im}(z))^2) = 0$ diventa $x + (3 + y)i + x(i + y^2) = 0$ cioè $x + xy^2 + (3 + x + y)i = 0$. Questo succede se e solo se è verificato il sistema $\begin{cases} x + xy^2 = 0 \\ 3 + x + y = 0 \end{cases}$, cioè se risulta $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 1 + y^2 = 0 \\ 3 + x + y = 0 \end{cases}$.

Il secondo sistema è impossibile e quindi l'equazione ha l'unica soluzione $z = -3i$.

Sol. Ex. 14.12 [1] Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x < 2\pi\}$ è la <u>striscia</u> di piano compresa tra l'asse y <u>incluso</u> e la retta (ad esso parallela) $x = 2\pi$, <u>esclusa</u>.

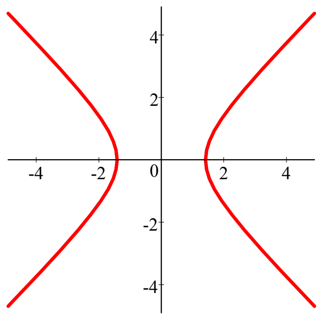
b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq -y < 2\pi\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2\pi < y \leq 0\}$ è la <u>striscia</u> di piano compresa tra l'asse x <u>incluso</u> e la retta (ad esso parallela) $y = -2\pi$, <u>esclusa</u>.

---

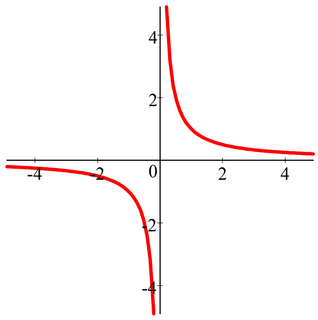
[1] In quasi tutte le soluzioni gli insiemi sono stati descritti solo a parole: si consiglia di provare però a tracciare i disegni corrispondenti.

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 2\}$ è una iperbole equilatera che ha per assi gli assi cartesiani, che taglia l'asse reale nei punti di ascissa $\pm\sqrt{2}$ e ha asintoti $y = x$ e $y = -x$.

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2xy = 2\}$ è una iperbole equilatera che ha per asintoti gli assi cartesiani, per assi le bisettrici del I-III e II-IVquadrante e taglia il primo nei punti di ascissa ± 1.



$C = \{z : \quad \operatorname{Re}(z^2) = 2\}$



$D = \{z : \; \operatorname{Im}(z^2) = 2\}$

e) $|z^3| < 2 \Leftrightarrow |z|^3 < 2 \Leftrightarrow |z| < \sqrt[3]{2}$. Quindi $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < \sqrt[3]{4}\}$ è l'interno del cerchio con centro nell'origine e raggio $\sqrt[3]{2}$ (circonferenza esclusa).

f) $F = \{z : \; |z| > \frac{1}{2}\}$ rappresenta tutti i punti del piano privato del cerchio con centro nell'origine e raggio $\frac{1}{2}$ ma non della corrispondente circonferenza.

g) Se è possibile scrivere il suo reciproco, z è $\neq 0$. Quindi $G = \{z : \; 0 < |z| \leq \frac{1}{2}\}$ rappresenta il cerchio con centro nell'origine e raggio $\frac{1}{2}$ compresa la circonferenza, ma privato del centro.

h) Trattandosi di disuguaglianze tra numeri reali positivi, $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 2$ equivale a $\begin{cases} |z-1| \leq 2\,|z+1| \\ z \neq -1 \end{cases}$.

Quindi $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-1)^2 + y^2 \leq 4\left[(x+1)^2 + y^2\right]$ e $(x,y) \neq (-1,0)\} =$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 3x^2 + 3y^2 + 10x + 3 \geq 0 \text{ e } (x,y) \neq (-1,0)\}.$$

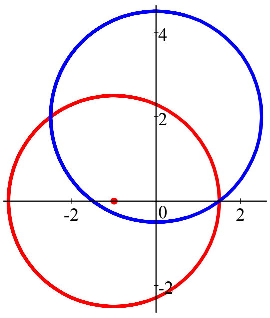
Questo è l'insieme di tutti i punti del piano privato del cerchio con centro in $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ e raggio $\frac{4}{3}$ ma non della corrispondente circonferenza (il punto $(-1,0)$ resta escluso automaticamente, essendo interno al cerchio).

Sol. Ex. 14.13

$\dfrac{z+1-i}{z+1} = 1 - \dfrac{i}{z+1}$ è reale se e solo se lo è $\dfrac{i}{z+1} = \dfrac{i \cdot \overline{(z+1)}}{(z+1)\,\overline{(z+1)}} = \dfrac{1}{|z+1|^2}\left(\overline{z} \cdot i + i\right)$ cioè se e solo se lo è $(\overline{z} \cdot i + i)$. Posto $z = x + iy$, si ha $\overline{z} \cdot i + i = (x+1)\,i + y$: questo è un numero reale se e solo se $x + 1 = 0$. Quindi il luogo dei punti che per cui è reale il numero assegnato è la retta (parallela all'asse y) di equazione $x = -1$.

Sol. Ex. 14.14

La condizione assegnata equivale al sistema di due disequazioni: $\begin{cases} |z+1| \leq \frac{5}{2} \\ |z-2i| > \frac{5}{2} \end{cases}$



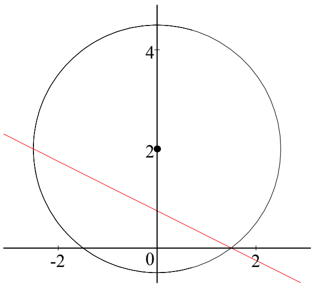
cioè, ponendo $z = x+iy$, $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leq \frac{25}{4} \\ x^2 + (y-2)^2 > \frac{25}{4} \end{cases}$.

La prima disequazione rappresenta il cerchio di centro $(-1, 0)$ e raggio $\frac{5}{2}$ (circonferenza inclusa), la seconda rappresenta il piano privato del cerchio di centro $(0, 2)$ e raggio $\frac{5}{2}$ e della corrispondente circonferenza. La regione cercata è l'intersezione tra questi due insiemi, cioè la "mezzaluna" che resta nel primo cerchio una volta tolto il secondo, bordi del primo cerchio (rosso in figura) compresi, bordi del secondo (blu in figura) esclusi.

Sol. Ex. 14.15

a) La condizione assegnata equivale al sistema di due disequazioni: $\begin{cases} |z+1| \leq |z-2i| \\ |z-2i| < \frac{5}{2} \end{cases}$

cioè, ponendo $z = x+iy$,

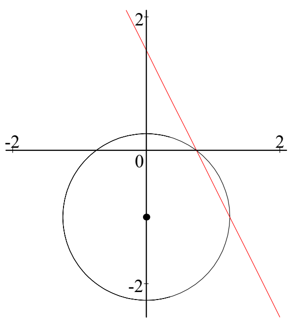


$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leq x^2 + (y-2)^2 \\ x^2 + (y-2)^2 < \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 3 \leq 0 \\ x^2 + (y-2)^2 < \frac{25}{4} \end{cases}.$$

La prima disequazione rappresenta il semipiano che giace al di sotto della retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ retta compresa; la seconda il cerchio di centro $(0, 2)$ e raggio $\frac{5}{2}$ (circonferenza esclusa). La regione cercata è l'intersezione tra questi due insiemi, cioè il più piccolo tra i due segmenti circolari (= parti del cerchio delimitate da una corda) presenti in figura (corda compresa, tranne gli estremi).

b) La condizione assegnata equivale al sistema di due disequazioni: $\begin{cases} |z-2| \leq |z+i| \\ |z+i| < \frac{5}{4} \end{cases}$

cioè, ponendo $z = x+iy$,



$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \leq x^2 + (y+1)^2 \\ x^2 + (y+1)^2 < \frac{25}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 3 \geq 0 \\ x^2 + (y+1)^2 < \frac{25}{16} \end{cases}.$$

La prima disequazione rappresenta il semipiano che giace al di sopra della retta di equazione $y = -2x + \frac{3}{2}$ retta compresa; la seconda il cerchio di centro $(0, -1)$ e raggio $\frac{5}{4}$ (circonferenza esclusa). La regione cercata è l'intersezione tra questi due insiemi, cioè il più piccolo tra i due segmenti circolari presenti in figura (corda compresa, tranne gli estremi).

Sol. Ex. 14.16

a) $A = \left\{ z : \quad 1 < |z| < 2; \quad \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{3} \right\}$: la prima disuguaglianza dice che si devono prendere punti interni (senza contorni) della corona circolare con centro nell'origine e raggi 1 e 2; la seconda dice che i punti di A devono anche appartenere all'angolo convesso formato dalle due semirette aventi origine nell'origine del piano di Argand-Gauss che formano con l'asse reale angoli (orientati positivamente) di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$: in totale quindi si tratta del settore di corona circolare indicato nella figura (a), privato dei contorni.

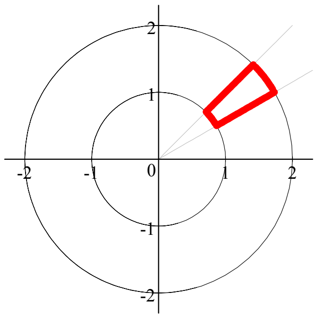


figura (a)

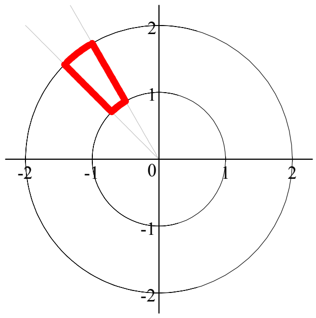


figura (b)

b) Tenuto conto che il prodotto iz ha modulo $|iz| = |z|$ e argomento $\arg iz = \frac{\pi}{2} + \arg z$, si vede che i punti della regione $B = \{iz : \quad z \in A\}$ sono quelli ottenuti ruotando attorno all'origine di $\frac{\pi}{2}$ in verso antiorario il settore descritto nel punto precedente (vedi figura (b)).

c) Tenuto conto che $\arg(\overline{z}) = -\arg z$ per ogni z che non sia un un numero reale ≤ 0 e se $\arg(z) = \pi$ la seconda disuguaglianza è sicuramente valida, le due condizioni $\begin{cases} |z-1| < \left|\frac{z}{2}\right| \\ 3\arg(z) > \frac{\pi}{2} + \arg(\overline{z}) \end{cases}$ possono essere riscritte come $\begin{cases} 2|z-1| < |z| \\ 4\arg(z) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ cioè, posto $z = x+iy$, $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 8x + 4 < 0 \\ \frac{\pi}{8} < \arg(z) \leq \pi \end{cases}$.

La prima disequazione rappresenta i punti interni al cerchio di centro $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ e raggio $\frac{2}{3}$, la seconda rappresenta l'angolo compreso tra la semiretta con origine nell'origine del piano di Argand-Gauss inclinata di $\frac{\pi}{8}$ rispetto all'asse x (esclusa) il semiasse reale negativo (compreso). Dunque C è il segmento circolare più piccolo tra i due presenti in figura privato dei bordi.

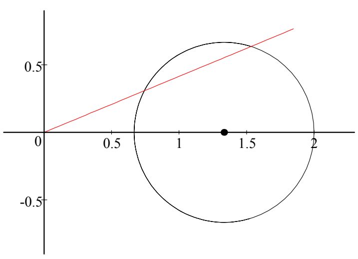


figura (c)

Soluzione degli esercizi teorici

Sol. Ex. 14.17. Dire che w è una radice n-esima del numero complesso z equivale a dire che $w^n = z$. Deve allora essere vero che $\overline{w^n} = \overline{z}$ e poiché $\overline{w^n} = (\overline{w})^n$ si ha $(\overline{w})^n = \overline{z}$ cioè $\overline{w}$ è una radice n-esima di $\overline{z}$. Il viceversa si prova allo stesso modo.

Sol. Ex. 14.18

Sostituendo $z = x + iy$, $\alpha = \operatorname{Re}\alpha + i \operatorname{Im}\alpha$ e $\beta = \operatorname{Re}\beta + i \operatorname{Im}\beta$ nell'uguaglianza $|z - \alpha| = |z - \beta|$ si trova: $(x - \operatorname{Re}\alpha)^2 + (y - \operatorname{Im}\alpha)^2 = (x - \operatorname{Re}\beta)^2 + (y - \operatorname{Im}\beta)^2$ cioè
$2(\operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\beta)\,x + 2(\operatorname{Im}\alpha - \operatorname{Im}\beta)\,y = (\operatorname{Re}\alpha)^2 + (\operatorname{Im}\alpha)^2 - (\operatorname{Re}\beta)^2 - (\operatorname{Im}\beta)^2$.
Se $\alpha \neq \beta$ almeno uno dei due coefficienti $(\operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\beta)$ e $(\operatorname{Im}\alpha - \operatorname{Im}\beta)$ è non nullo e quindi l'equazione rappresenta una retta.
Se $\alpha = \beta$ si ha un'identità, che quindi rappresenta l'intero piano di Argand-Gauss.

Sol. Ex. 14.19 Notiamo che $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ e quindi i due numeri z^{-1} e $\overline{z}$ hanno ugual argomento (eventualmente se $|z| \neq 1$ hanno modulo diverso). Quindi le relazioni da verificare equivalgono alle $\arg(z\,\overline{z}) = \arg(z)\arg(\overline{z})$, $\quad \arg(z\,\overline{z}) \equiv \arg(z) + \arg(\overline{z}) \bmod 2\pi$, $\quad \arg(z\,\overline{z}) \equiv \arg(z)\arg(\overline{z}) \bmod 2\pi$.
È immediato verificare che la prima e l'ultima sono false poiché $z\,\overline{z}$ è un numero reale positivo e quindi il suo argomento principale è 0, mentre il prodotto dei due argomenti principali non lo è, neppure a meno di multipli di 2π se z non è un numero reale positivo.
La seconda relazione è verificata da ogni numero complesso non nullo: infatti nel piano di Argand-Gauss z e $\overline{z}$ sono rappresentati da punti simmetrici rispetto all'asse reale col quale formano quindi angoli orientati opposti: si ha addirittura $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ e quindi $\arg(z) + \arg(\overline{z}) = 0 = \arg(z\,\overline{z})$ se z non è un numero reale negativo. Se invece z è un numero reale negativo si ha $\arg(z) = \pi$ e anche $\arg(\overline{z}) = \pi$ (ricordiamo che l'argomento principale varia in$(-\pi, \pi]$): quindi $\arg(z) + \arg(\overline{z}) = 2\pi = \arg(z\,\overline{z}) + 2\pi$ cioè vale la congruenza ma non l'uguaglianza.

Sol. Ex. 14.20

$z + \overline{z} + |z|^2 = 2\operatorname{Re} z + |z|^2 \leq 0$ è una disequazione tra numeri reali, risolubile (tra le sue soluzioni c'è certamente $z = 0$; in realtà le sue soluzioni nel piano di Argand-Gauss sono rappresentate da un cerchio).
$z - \overline{z} + |z|^2 = 2i \operatorname{Im} z + |z|^2 \geq 0$ non ha significato, poiché se z non è reale $2i \operatorname{Im} z + |z|^2$ è un numero complesso: e nei numeri complessi non c'è la relazione di $\geq$.
$|2z| < |z - \overline{z}| = |2i \operatorname{Im} z| = 2\,|\operatorname{Im} z|$ è una disequazione tra numeri reali, impossibile, poiché $|\operatorname{Im} z|$ rappresenta la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo di cui $|z|$ rappresenta la lunghezza dell'ipotenusa.