

Argomento 14

Numeri Complessi

È ben noto che l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali (che include tutti gli altri insiemi numerici finora incontrati in questo corso) non è sufficientemente “ampio” da permettere la risoluzione di equazioni, anche semplici, a coefficienti reali, come ad esempio $x^2 + 1 = 0$. Per risolvere questo problema costruiamo l'insieme dei numeri complessi.

Numeri complessi. Loro rappresentazione geometrica.

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ ha soluzione in un certo insieme numerico solo se esso contiene un numero il cui quadrato vale -1 . Chiamiamo questo “numero” **unità immaginaria** e lo denotiamo con i . Per definizione si ha quindi

$$i^2 = -1.$$

A partire dall'unità immaginaria si costruiscono i numeri complessi nel modo seguente.

Definizione 14.1 Si dice **numero complesso** ogni scrittura della forma $a + ib$, con a, b numeri reali e i unità immaginaria. L'insieme dei numeri complessi si denota con \mathbb{C} e si ha:

$$\mathbb{C} = \{a + ib \text{ tali che } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}.$$

Di solito, i numeri complessi si indicano con le ultime lettere dell'alfabeto: z, w, \dots

Dato il numero complesso $z = a + ib$, i numeri reali a e b si dicono rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** di z e si scrive: $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$.

Esempi 14.2

- $z = 1 - 2i$ è un numero complesso con parte reale 1 e parte immaginaria -2 .
- $z = -\sqrt{2} + 0i = -\sqrt{2}$ è un numero complesso con parte reale $-\sqrt{2}$ e parte immaginaria 0.
- $z = 0 + 4i = 4i$ è un numero complesso con parte reale 0 e parte immaginaria 4.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ si dicono **uguali** se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria:

$$z = w \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Nell'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi si definiscono inoltre le seguenti operazioni:

► **Somma di due numeri complessi** $z = a + ib$ e $w = c + id$ è il numero complesso

$$z + w = (a + c) + i(b + d);$$

► **Prodotto di due numeri complessi** $z = a + ib$ e $w = c + id$ è il numero complesso

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Esempio 14.3 Dati $z = 2 + i$ e $w = -1 + 3i$, calcoliamo $z + w$ e $z \cdot w$.

- $(2 + i) + (-1 + 3i) = 1 + 4i$
- $(2 + i) \cdot (-1 + 3i) = -2 + 3i^2 - i + 6i = -2 - 3 + 5i = -5 + 5i$

Osserviamo che le due operazioni si eseguono usando le ordinarie regole del calcolo letterale e ricordando che $i^2 = -1$.

Per la somma e il prodotto appena definiti valgono le usuali proprietà delle operazioni (commutativa, associativa, distributiva). Inoltre:

- il numero complesso $0 = 0 + i0$ è tale che $z + 0 = z$ per ogni z ;
- il numero complesso $1 = 1 + i0$ è tale che $z \cdot 1 = z$ per ogni z ;
- il numero complesso $-z = -a - ib$ è l'**opposto** di $z = a + ib$;
- se $z \neq 0$, il numero complesso

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}$$

è il **reciproco** di $z = a + ib$. (Ovviamente si ha $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ per ogni $z \neq 0$.)

Esempio 14.4 Dati $z = 2 + i$ e $w = 1 + 3i$, calcoliamo: $-w$; $\frac{1}{w}$; $\frac{z}{w}$.

- $-w = -1 - 3i$
- $\frac{1}{w} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$;
- $\frac{z}{w} = (2 + i) \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

È noto che numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta euclidea.

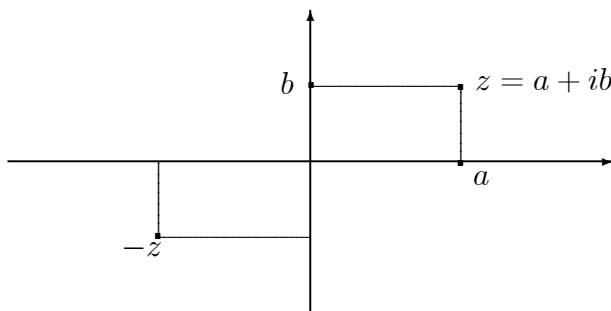
Analogamente, associando al numero della forma $z = a + ib$ il punto di coordinate (a, b) , si realizza una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano cartesiano (detto in questo contesto **piano di Argand–Gauss**).

In tale corrispondenza: $a = \operatorname{Re}(z)$ è l'ascissa di (a, b) e $b = \operatorname{Im}(z)$ è l'ordinata di (a, b) .

I numeri della forma $a + 0i$, (che sono di fatto numeri reali) corrispondono ai punti dell'asse delle ascisse che verrà perciò detto **asse reale**, evidenziando che si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I numeri della forma $0 + ib = ib$, (detti **immaginari puri**) corrispondono ai punti dell'asse delle ordinate che verrà perciò detto **asse immaginario**.

L'opposto di z , ossia il numero $-z = -a - ib$ corrisponde al punto $(-a, -b)$ simmetrico di (a, b) rispetto all'origine.



Definizione 14.5 Dato il numero $z = a + ib$ si chiama

► **Coniugato** di z il numero complesso

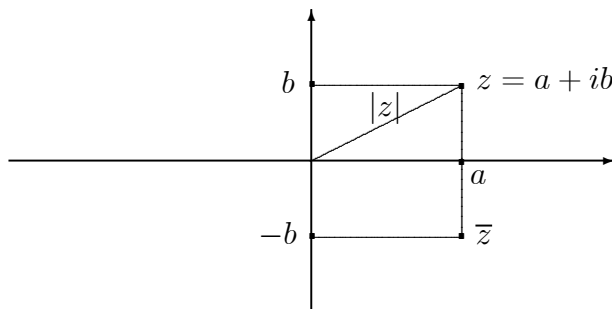
$$\bar{z} = a - ib.$$

Esso corrisponde al punto $(a, -b)$ simmetrico di (a, b) rispetto all'asse reale.

► **Modulo** di z il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

che rappresenta la distanza del punto (a, b) dall'origine ed è quindi un numero reale maggiore o uguale a zero.



Osserviamo che ⁽¹⁾

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

e inoltre

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z); \quad z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i \operatorname{Im}(z).$$

Esempio 14.6 Dati $z = 2 - i$ e $w = 2 + 3i$, calcoliamo $\frac{\bar{z}}{w}$. Si ha:

$$\frac{\bar{z}}{w} = \frac{2 + i}{2 + 3i} = \frac{(2 + i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{7}{13} - \frac{4}{13}i.$$

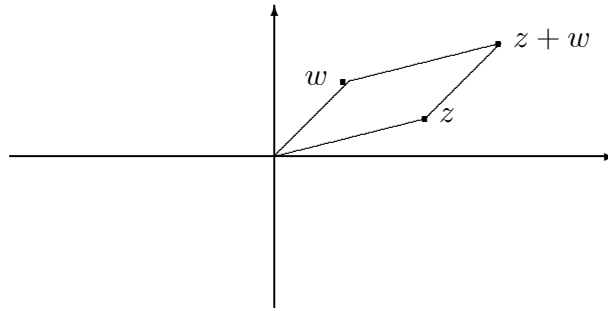
È facile vedere che la somma di due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$, cioè il numero $(a + c) + i(b + d)$ corrisponde al punto che si ottiene con la “regola del parallelogramma” dai punti di coordinate (a, b) e (c, d) .

¹⁾La relazione che esprime il reciproco di un numero complesso non nullo si può anche esprimere mediante la formula:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Inoltre, per calcolare il rapporto di due numeri complessi può essere utile tenere presente che

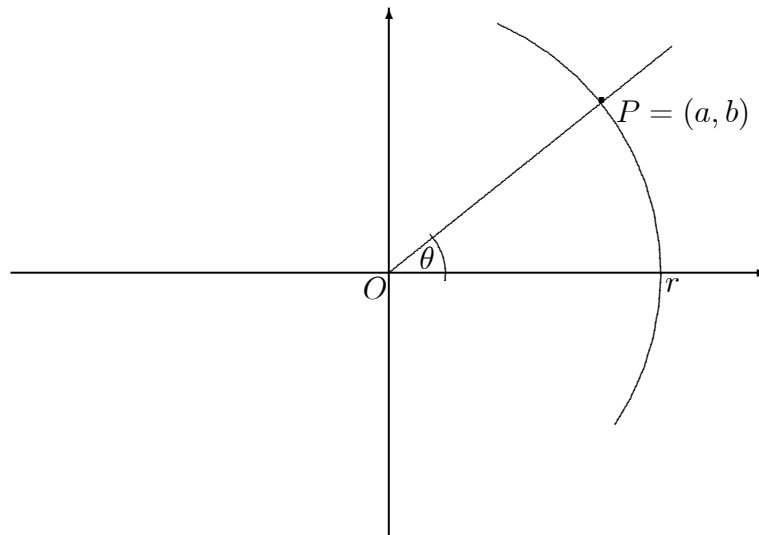
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}.$$



Non è altrettanto facile dare l'interpretazione geometrica del prodotto. Anche a questo scopo può essere utile introdurre la forma trigonometrica dei numeri complessi.

Forma trigonometrica dei numeri complessi

Osserviamo che ogni punto $P = (a, b)$, diverso dall'origine, nel piano di Argand–Gauss può essere individuato anche assegnando la sua distanza r dall'origine O e l'angolo θ compreso tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta OP .



Per definizione di coseno e seno (vedi MiniMat Lezione7) si ha:

$$a = r \cos \theta; \quad b = r \sin \theta. \quad (1)$$

Si ottiene quindi: $z = a + ib = (r \cos \theta) + i (r \sin \theta)$.

Definizione 14.7

$$r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

si chiama **forma trigonometrica** del numero complesso $z = a + ib$.

Per distinguere le due rappresentazioni, la scrittura $a + ib$ si chiama **forma algebrica** del numero complesso z .

Osserviamo che il numero reale positivo r è il **modulo** di z .

Inoltre, poiché le funzioni \sin e \cos sono periodiche di periodo 2π , nelle formule (1) nulla cambia se a θ si sostituisce $\theta + 2k\pi$: uno qualunque di questi numeri si dice **argomento** di z . Quindi l'argomento è definito a meno di multipli interi di 2π ⁽²⁾.

Assegnare un numero complesso in forma trigonometrica significa evidenziarne il modulo e un argomento.

Dunque, *due numeri complessi (espressi in forma trigonometrica) sono uguali* se e solo se hanno moduli uguali e argomenti uguali, a meno di un multiplo intero qualsiasi di 2π .

Notiamo che *numeri complessi con ugual modulo* stanno sulla stessa circonferenza con centro nell'origine O del piano di Argand-Gauss, mentre *numeri complessi con argomento uguale* (a meno di multipli interi di 2π) stanno sulla stessa semiretta avente origine in O .

Dato un numero complesso in forma trigonometrica (ossia noti r e θ), la sua forma algebrica si ricava mediante le formule (1); viceversa dato un numero complesso in forma algebrica si ricavano r e θ osservando che:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Per convenzione, al numero complesso zero si attribuisce modulo zero e argomento qualsiasi.

Esempio 14.8 Determiniamo il modulo ed un argomento dei seguenti numeri complessi: -2 ; $5i$; $1 + i$; $-\sqrt{3} + i$.

- -2 è un numero reale negativo e quindi ha argomento π ; inoltre il suo modulo è 2.
- $5i$ è un numero immaginario puro (sul semiasse positivo) e quindi ha argomento $\frac{\pi}{2}$; inoltre il suo modulo è 5.
- $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$; inoltre $\cos \theta = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi un argomento di $1 + i$ è $\frac{\pi}{4}$.
- $|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3 + 1} = 2$; inoltre $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin \theta = \frac{1}{2}$: quindi un argomento di $-\sqrt{3} + i$ è $\frac{5\pi}{6}$.

La forma trigonometrica permette di calcolare più agevolmente il prodotto di numeri complessi e di capire il significato geometrico del prodotto.

Dati $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ si ha

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r\rho[(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)]$$

e quindi

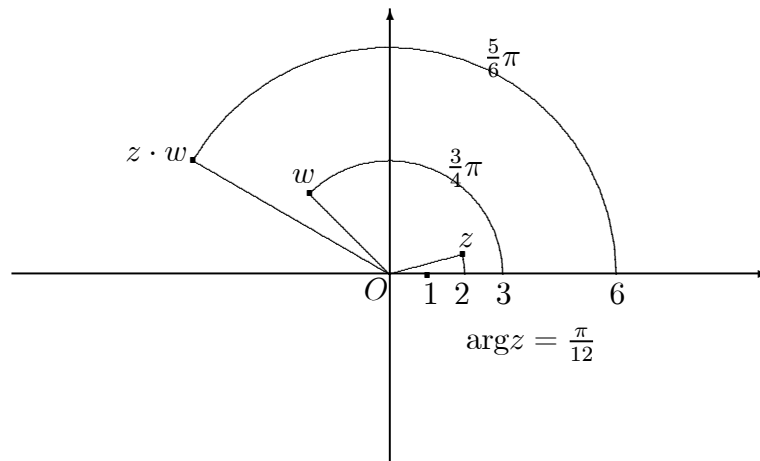
$$\boxed{z \cdot w = r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)]}$$

Il risultato mostra che il modulo del prodotto è dato dal prodotto dei moduli: $r\rho$, e un argomento del prodotto è la somma degli argomenti: $(\theta + \varphi)$.

Esempio 14.9 Il prodotto di $z = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right]$ e $w = 3 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]$ vale

$$z \cdot w = 6 \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{4} \right) \right] = 6 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right] = -3\sqrt{3} + 3i.$$

²⁾ Tra questi, si usa indicare l'argomento appartenente all'intervallo $(-\pi, \pi]$ con il nome di argomento principale.



Osservazione 14.10 Per comprendere il significato geometrico del prodotto cominciamo da due semplici esempi.

- Il prodotto di z con un numero w di modulo uno ha lo stesso modulo di z . Quindi *la moltiplicazione per un numero w di modulo uno equivale ad una rotazione di angolo pari all'argomento di w* . Ad esempio, il numero iz è il ruotato (in senso antiorario) di z di $\pi/2$.
- Il prodotto di z con un numero w reale positivo (e quindi di argomento zero) ha lo stesso argomento di z . Quindi *la moltiplicazione per un numero w di argomento zero equivale ad una omotetia* (dilatazione o contrazione) *con fattore uguale a w* . Ad esempio il numero $3z$ si trova sulla stessa semiretta uscente dall'origine di z ad una distanza dall'origine pari a 3 volte quella di z .
- In generale, moltiplicare il numero z per il numero w equivale a ruotare z di un angolo pari all'argomento di w e contemporaneamente dilatare o contrarre z di un fattore uguale al modulo di w . Quindi la moltiplicazione equivale ad una roto-omotetia.

Con ragionamenti analoghi si dimostra che il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli, e come argomento la differenza degli argomenti. Ossia se $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$, allora si ha

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} [\cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi)].$$

Potenze e radici n -esime di un numero complesso.

Applicando ripetutamente la regola del prodotto si ottiene la:

Regola di De Moivre La potenza n -esima del numero complesso $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ha modulo uguale alla potenza n -esima del modulo di z e argomento pari all'argomento di z moltiplicato per n . Dunque

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Esempio 14.11 Calcoliamo in forma algebrica $(-1 + i)^{13}$.

Poiché $-1 + i = \sqrt{2} [\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4})]$ si ha: $(-1 + i)^{13} = (\sqrt{2})^{13} [\cos(\frac{39\pi}{4}) + i \sin(\frac{39\pi}{4})]$. Tenendo conto che $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$, possiamo scrivere

$$(-1 + i)^{13} = 64\sqrt{2} [\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})] = 64 - 64i.$$

Le considerazioni precedenti ci permettono di affrontare il problema di trovare le radici n -esime di un numero complesso z cioè di trovare eventuali numeri w tali che $w^n = z$.

Teorema 14.12 (Radici n -esime di un numero complesso) Ogni numero complesso non nullo $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ha esattamente n radici n -esime complesse: w_0, w_1, \dots, w_{n-1} . Se $w_k = \rho_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ si ha

$$\boxed{\begin{array}{ll} \rho_k = \sqrt[n]{r} & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{array}}$$

Dunque nel piano di Argand-Gauss le radici n -esime di un numero complesso z si trovano ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza centrata nell'origine e di raggio uguale alla radice n -esima (aritmetica) del modulo di z .

Dimostrazione. Se $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ è una radice n -esima di z deve essere:

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

In questa equazione r e φ sono noti, mentre ρ e θ sono le incognite. Per risolvere l'equazione applichiamo il seguente principio: due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno moduli uguali e argomenti uguali a meno di un multiplo intero qualsiasi k di 2π . Dunque:

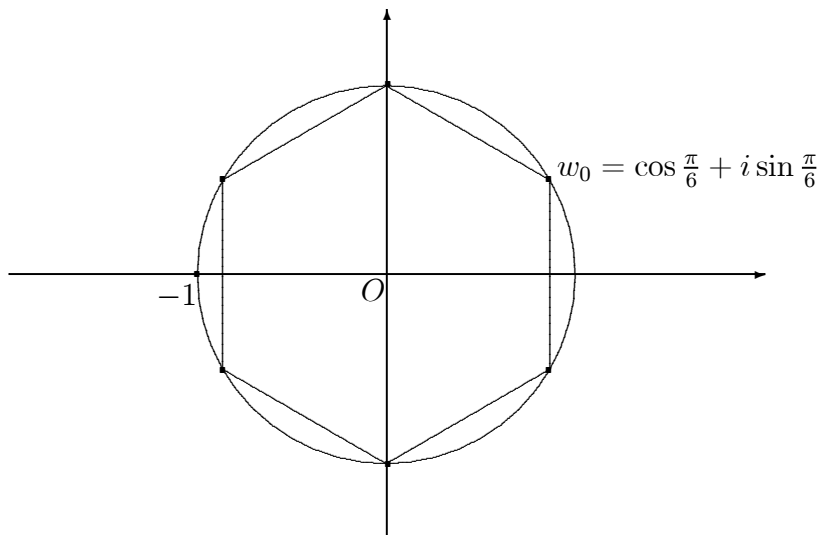
$$\begin{array}{ll} \rho^n = r & \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r} \quad (\text{radice aritmetica di un numero reale positivo!}) \\ \text{e} & \\ n\theta = \varphi + 2\pi & \Rightarrow \quad \theta = \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

È quindi univocamente determinato il modulo ρ , mentre l'argomento può avere diversi valori (che danno luogo a diverse radici) che si ottengono come segue. Un primo valore è dato da $\frac{\varphi}{n}$. Gli altri valori si ottengono aggiungendo ad esso multipli successivi di $\frac{2\pi}{n}$. È chiaro che dopo n passi si ottiene $\frac{\varphi}{n} + 2\pi$ e quindi si torna alla prima radice.

Esempio 14.13 Calcoliamo le radici seste di -1 . Tale numero ha argomento π e modulo ovviamente uguale a 1:

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = 1(-1 + i0).$$

Le radici seste hanno tutte modulo uguale a 1 perché la radice sesta aritmetica di 1 è 1. L'argomento della prima radice è $\frac{\pi}{6}$; gli argomenti delle successive radici si otterranno aggiungendo via via $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ all'argomento della prima.



Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
 w_1 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\
 w_2 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
 w_3 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\
 w_4 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i \\
 w_5 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} \right) = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i
 \end{aligned}$$

Osserviamo che nessuna delle sei radici sta sull'asse reale, come c'era da aspettarsi dal momento che sono le radici di indice pari (6) di un numero negativo (-1). Notiamo inoltre che, avendo già rappresentato le sei radici nel piano di Argand-Gauss, dopo aver trovato la prima radice si sarebbe potuta trovare la forma algebrica delle altre con semplici considerazioni geometriche.

Esempio 14.14 È facile convincersi che le radici seste (complesse) di 1 si trovano nei vertici di un esagono regolare ottenuto ruotando il precedente di $-\frac{\pi}{6}$ in modo che la prima radice w_0 si trovi sull'asse reale nel punto 1 (e la quarta nel punto -1).

Abbiamo appena risolto le equazioni $w^6 \pm 1 = 0$, trovando in entrambi i casi sei soluzioni. Questo è un caso particolare dell'equazione $w^n - z = 0$ che, se $z \neq 0$, ha esattamente n soluzioni distinte nel campo complesso. Più in generale vale il

Teorema fondamentale dell'algebra Ogni polinomio (a coefficienti complessi) di grado n ha nel campo complesso, esattamente n radici (pur di contarle con la loro molteplicità).

Da questo teorema si deduce che:

- Ogni polinomio *a coefficienti complessi* di grado n si può scrivere come prodotto di n polinomi *a coefficienti complessi* di primo grado.
- Ogni polinomio *a coefficienti reali di grado dispari* ha almeno una radice *reale*.
- Le eventuali radici complesse di un polinomio *a coefficienti reali* sono a due a due complesse coniugate e quindi un polinomio *a coefficienti reali* si può scrivere come prodotto di un opportuno numero di polinomi *a coefficienti reali* di grado non superiore a 2.

In generale non è però facile trovare le n radici complesse di un polinomio di grado n . Si troveranno alcuni semplici esempi negli esercizi 14.10 e 14.11.

Nota Anche i numeri complessi hanno un “lato oscuro”: non è possibile definire in \mathbb{C} un ordinamento che sia compatibile con le operazioni di somma e prodotto, cioè non è possibile suddividere i numeri complessi non nulli in positivi e negativi in modo tale che il prodotto di due positivi comunque scelti sia positivo, come succede invece nei numeri reali.