

## Applicazioni da X a Y

DEF. Siano  $X$  e  $Y$  non vuoti e sia  $\varphi \subseteq X \times Y$  una relazione tra  $X$  e  $Y$ . Dico che  $\varphi$  è una applicazione da  $X$  a  $Y$  se

$\forall x \in X$  esiste 1 e 1 solo  $y$  tale che  $(x, y) \in \varphi$ .

È quanto dire che per ogni  $x \in X$ , l'insieme  $\varphi(x)$  è formato esattamente da un elemento:  $y$ .

Se gli insiemi sono finiti (e quindi è possibile definire matrici di incidenza) significa che in ogni riga di  $M_\varphi$  c'è uno e un solo 1.

Esempio:  $X = \{1, 2, 3\}$      $Y = \{a, b, c, d\}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  è la matrice di incidenza di una applicazione

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  non sono matrici di incidenza di funzioni.

Altri nomi: funzione, mappa.

### Terminologia:

$X$ : dominio

$Y$ : codominio

Se  $\varphi(x) = \{y\}$  si usa scrivere  $\varphi(x) = y$ , invece di  $(x, y) \in \varphi$  e si dice che  $y$  è immagine di  $x$  mediante  $\varphi$

Per ogni sottoinsieme  $A \subseteq X$  si dice immagine di  $A$  mediante  $\varphi$  il sottoinsieme di  $Y$ :

$$\varphi(A) = \{\varphi(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ con } \varphi(x) = y\}$$

e l'immagine  $\varphi(X)$  di  $X$  mediante  $\varphi$  si chiama immagine di  $\varphi$ .

Invece per ogni  $y \in Y$  chiamiamo preimmagine (o controimmagine) di  $y$  il sottoinsieme di  $X$  (49)

$$\varphi^T(y) = \{x \in X \mid \varphi(x) = y\}$$

ATTENZIONE: se  $\varphi$  è una applicazione da  $X$  a  $Y$ ,  $\forall x \in X$  l'insieme  $\varphi(x)$  è formato da 1 e 1 solo elemento; invece possono esistere  $y \in Y$  t.c.

- $\varphi^T(y) = \emptyset$
- $\varphi^T(y)$  è formato da più di un elemento

### ESEMPIO

Sia  $\varphi \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'applicazione così definita:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \varphi(x) = x^2$$

- $\varphi^T(-1) = \{x \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x^2 = -1\} = \emptyset$  Restringi?
- $\varphi^T(1) = \{x \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x^2 = 1\} = \{1, -1\}$

Nell'esempio si è evidenziato che una applicazione è identificata dal suo dominio, dal suo codominio e dal modo con cui  $\varphi$  mette in relazione elementi di  $X$  e di  $Y$ .

$\Rightarrow$  due applicazioni  $\varphi$  e  $\psi$  coincidono se e solo se hanno ugual dominio  $X$ , ugual codominio  $Y$  e se  $\forall x \in X : \varphi(x) = \psi(x)$ .

Perché non coincidano basta che cada una delle tre condizioni.

Esempio:  $\varphi \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definita da  $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$   
non coincide con  $\psi \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definita da  
 $\psi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ . E' cambiata la relazione

(48)

L'esempio può essere illustrato con:

$$\begin{array}{c} x \\ \varphi \downarrow \\ y \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{l} \varphi(1)=b \\ \varphi(2)=a \\ \varphi(3)=a \end{array}$$

$$\varphi^T(a) = \{2, 3\} \Rightarrow \varphi^T \text{ non è un'applicazione}$$

(49)

L'applicazione nell'esempio  $\varphi \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definita da  $\varphi(x) = x^2$

è diversa dall'applicazione  $\varphi|_{\mathbb{Z} \geq 0} \subseteq \mathbb{Z}^{>0} \times \mathbb{Z}^{>0}$

( $\varphi|_{\mathbb{Z} \geq 0}$  : restrizione di  $\varphi$  agli interi non negativi)  
definita da  $\varphi|_{\mathbb{Z} \geq 0}(x) = x^2$ .

Ad es. è ancora vero che esistono  $y \in \mathbb{Z}^{>0}$   
tali che per nessun  $x \in \mathbb{Z}^{>0}$  sia

$$\varphi|_{\mathbb{Z} \geq 0}(x) = y$$

Ad es. :  $y=3$  poiché per nessun  $x \in \mathbb{Z}^{>0}$  si ha  $x^2=3$

Ma se  $\varphi|_{\mathbb{Z} \geq 0}(y) \neq \emptyset$ , l'insieme è formato da un solo elemento (e non da due come  $\varphi^T(y)$ ).

Sia  $\varphi \subseteq X \times Y$  una applicazione: riasumeremo (50) questa situazione scrivendo

$$\varphi: X \rightarrow Y$$

DEF. Diciamo che

- $\varphi$  è SURIETTIVA se  $\varphi(X) = Y$ , cioè se
  - $\forall y \in Y \exists x \in X$  tale che  $\varphi(x) = y$  o anche,  $\forall y \in Y, \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$ .
- $\varphi$  è INIETTIVA se  $\forall x_1, x_2 \in X, \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ 
  - cioè se  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$
  - cioè se  $\forall y \in Y$  l'insieme  $\varphi^{-1}(y)$  non ha più di 1 elemento (ma può essere  $\emptyset$ )
- $\varphi$  è BIUNIVOCA se è suriettiva e iniettiva cioè  $\forall y \in Y, \varphi^{-1}(y)$  ha esattamente 1 elem.  
 $\Rightarrow \varphi^{-1}$  è una applicazione da  $Y$  a  $X$ .
- $\varphi$  è COSTANTE se  $\exists y \in Y$  t.c.  $\varphi(X) = \{y\}$ .

Se servirà rappresentare l'insieme delle applicazioni da  $X$  a  $Y$  potremo usare la notazione  $Y^X$

Attenzione: iniettività e suriettività di una applicazione dipendono dalla scelta del dominio e del codominio.

Ad es.  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definita da  $\varphi(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$  non è suriettiva né iniettiva. Ma  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ove  $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$ , definita da  $\varphi(x) = x^2$  è iniettiva; non è suriettiva poiché  $\varphi^{-1}(3) = \emptyset$ .

La stessa applicazione con dominio e codominio  $(0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$  è bimivoca.

## Esercizi.

1) Siano  $X = \{a, b, c\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ .

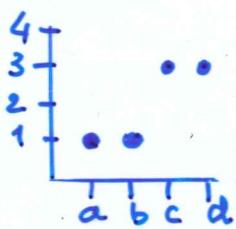
Dire se le seguenti relazioni sono applicazioni da  $X$  a  $Y$  motivando.

- $R_1 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$
- $S = \{(a, 1), (b, 1), (c, 3)\}$

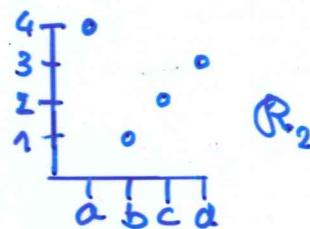
[Usare le "frecce di corrispondenza" o le matrici di inc.]

2) Siano  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

Dire se le seguenti relazioni sono applicazioni da  $X$  a  $Y$  e, se sì, se sono iniettive e/o suriettive



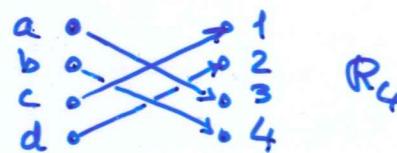
$$R_{11} \begin{array}{l} \text{non} \\ \text{SU} \\ \text{non} \\ \text{IN} \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{SU} \\ \text{IN} \end{array}$$



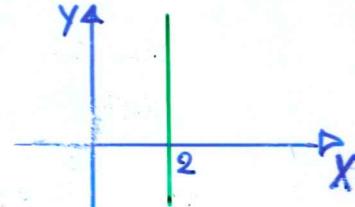
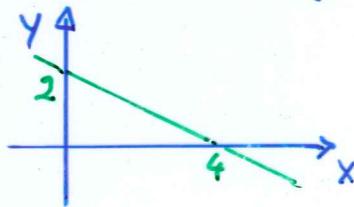
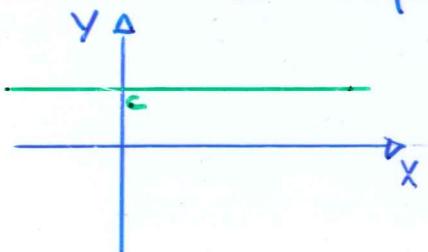
$$R_3 \begin{array}{l} \text{non SU} \\ \text{non IN} \end{array}$$

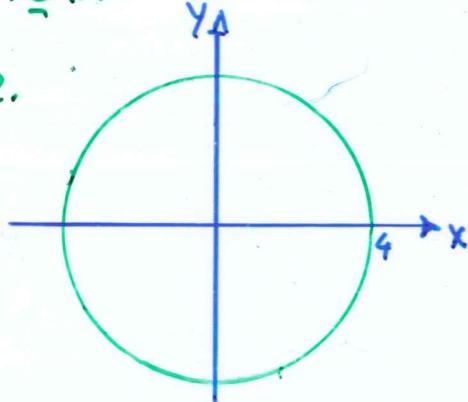


$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{non} \\ \text{app.} \end{array}$$

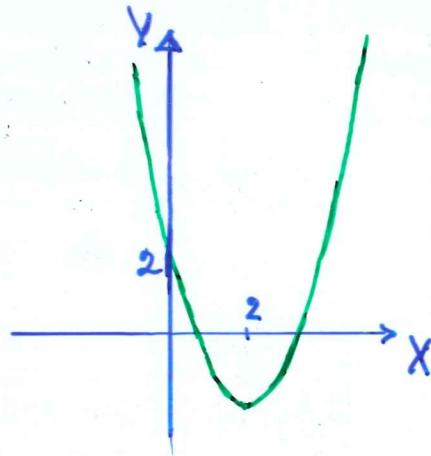
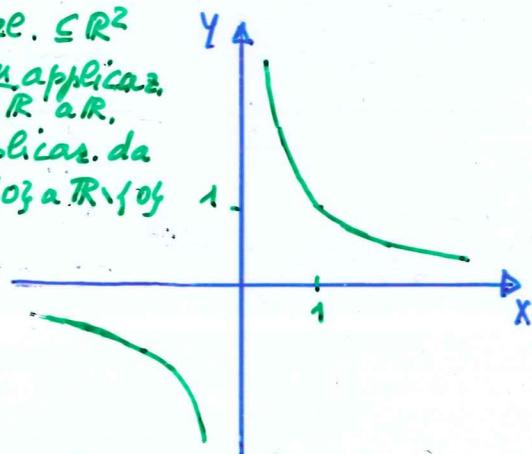
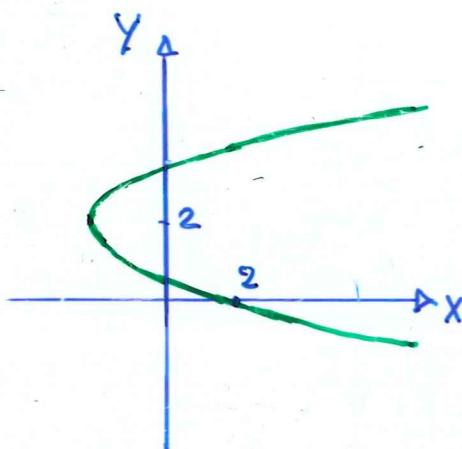
$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{appl.} \\ \text{NON SU} \\ \text{NON IN} \end{array}$$

3. Siano  $X = Y = \mathbb{R}$ . Quali dei seguenti diagrammi rappresentano applicazioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ ? Quali iniettive? quali suriettive?



rel.  $\subseteq \mathbb{R}^2$ NON  
App.

applicazione

rel.  $\subseteq \mathbb{R}^2$ non applicaz.  
de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ ,  
Applicaz. da  
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  a  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ rel.  $\subseteq \mathbb{R}^2$   
NON appl.

Qualcuno di questi diagrammi non rappresenta una relazione tra  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}$ ?

4. Come bisogna alterare dominio e/o codominio delle applicazioni  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\varphi(x) = 2^x$  per avere una applicazione biunivoca?  $\varphi \subseteq \mathbb{R} \times (0, +\infty)$
5. Se  $X$  e  $Y$  sono finiti e hanno lo stesso numero di elementi, una applicazione  $\varphi : X \rightarrow Y$  può essere iniettiva ma non suriettiva? VEDI pagine successive
6. Negli esempi dell'esercizio 2 dire chi sono
  - $R_i(a)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ),  $\vartheta(a)$ ,  $\tau(a)$
  - $R_i^T(1)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ),  $\vartheta^T(1)$ ,  $\tau^T(1)$ .
7. La relazione identica  $I_X$  su un insieme  $X$  è una applicazione da  $X$  a  $X$ ? SI (vedi matrice di incidenza)  
 $I_X(x) = x \forall x \in X$  è detta IDENTITÀ