

RELAZIONI FINQUI:

(64)

Rel. binaria tra X e Y : R elementi di $P(X \times Y)$

Rel. trasposta di R : $R^T \in P(Y \times X)$ t.c...

Rel. totale - Rel vuota

Operazioni in $P(X \times Y)$: \cup, \cap , complementare

$R(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$

Composizione di relazioni

Rappresentazione
di Relazioni

X, Y insiemini finiti:

Alcune questioni
enumerative su
• $X \times Y$, $P(X \times Y)$ e
• relazioni particolari:
• applicaz. iniettive
• applicaz. bimivoche

elenco coppie (X, Y finiti)
diagrammi cartesiani (X, Y finiti)
 frecce di corrispondenza (X, Y finiti)
legami (leggi) di corrispondenza
(sempre)

matrici di incidenza (X, Y finiti)
(aritmetica booleana)

- rilettura su operazioni tra matrici delle operazioni tra relazioni
- rilettura su matrici di incid. di proprietà di relazioni

Relazioni Particolari

Applicazioni da X a Y

- dominio, codominio
- immagine, preimmagine
- suriettive, iniettive bimivoche
- composizione di app. ecc.
- invertibilità

Applicazioni da X a X : x^x
Trasformazioni di X : S_x

Relazioni su X

proprietà

riflessive
simmetrica
antisimmetrica
transitiva

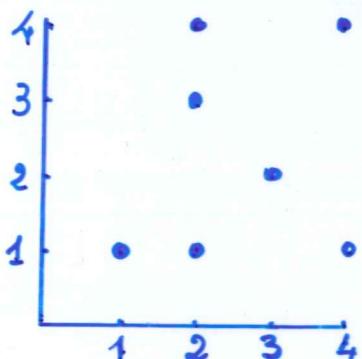
relazioni di
ordine su X

relazioni di
equivalenza su X

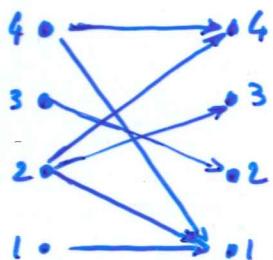
Relazioni su X

Oltre a quanto visto fin qui assuniamo che, se X è finito, le frecce di corrispondenza se $X = Y$ si possono realizzare senza duplicare l'insieme.

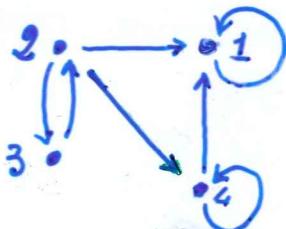
Ad es.



può essere rappresentato così:

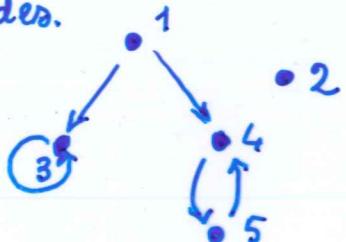


Oppure così:

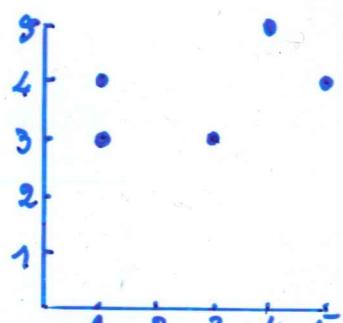


- Gli elementi sono indicati ciascuno con un punto (node)
- Le frecce sono ancora 6
- Quelle tra un elemento e se stesso sono rappresentate da cappi. Tutte indicano relazione da... a...
- In sostanza la relazione è rappresentata da un grafo ORIENTATO
- Viceversa ogni grafo orientato rappresenta una relazione

Ades.



rappresenta

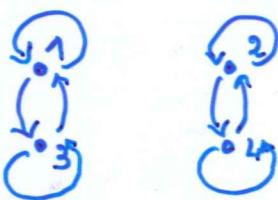


cioè $\{(1,3), (1,4), (3,3), (4,5), (5,4)\}$

- La relazione è riflessiva se e solo se ogni nodo del grafo ha un cappio
- La relazione è simmetrica se ogni freccia con un verso ne esiste una con verso opposto che congiunge gli stessi nodi
- La relazione è antisimmetrica se due nodi non sono congiunti da frecce di verso opposto
- La relazione è transitiva se seguendo le frecce non compiono nuove connessioni.

(66)

Allora posso verificare se la relazione su X definita da $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$ è una relazione di equivalenza guardando il suo grafo orientato



Oppure posso - come già fatto - usare le matrici di incidenza:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} : M_R \geq M_{I_X} \Rightarrow R \geq I_X \Rightarrow R \text{ è riflessiva}$$

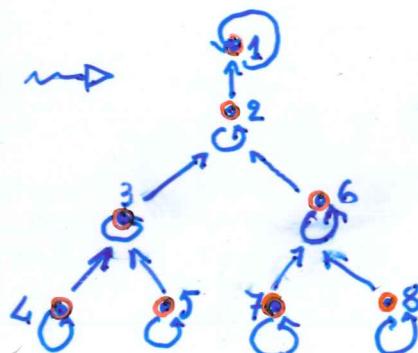
$$(M_R)^T = M_R \Rightarrow R^T = R \Rightarrow R \text{ è simmetrica}$$

$$M_R \cdot M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\cong}{=} M_R \Rightarrow R \circ R \subseteq R \Rightarrow R \text{ è transitiva.}$$

ESEMPIO 1. Stabilire se \Rightarrow è il grafo orientato di una relazione di ordine su

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

e tradurla in matrice di incidenza

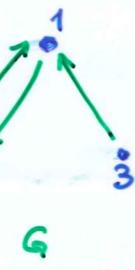
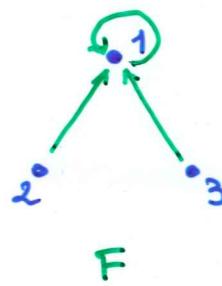
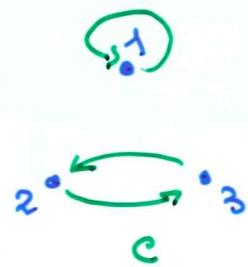
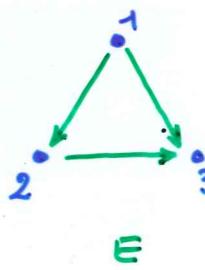
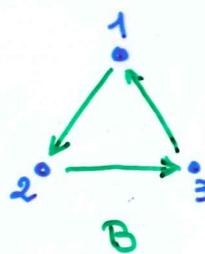
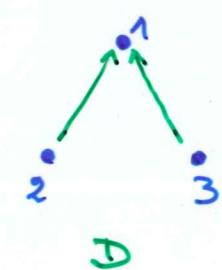
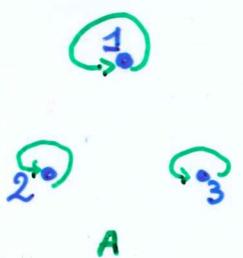


| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | 1 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 1 | 1 | - | + | - | - | - |
| 4 | - | - | 1 | 1 | - | - | - | - |
| 5 | - | - | 1 | - | 1 | - | - | - |
| 6 | - | 1 | - | - | - | 1 | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - | 1 | 1 | - |
| 8 | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 1 |

dove non
c'è scritto
nulla
in scrivere
degli zeri.

ATTENZIONE
GRAFO MOLTO
CONFUSO

ESEMPIO 2. Stabilire se rappresentano applicazioni di X in sé, e in caso affermativo se sono iniettive le relazioni su $X = \{1, 2, 3\}$ rappresentate dai seguenti grafici orientati:



$$A: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

PERMUTAZIONE di X

$$B: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

"

$$C: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

"

D: 1 non è in relazione a nessun elemento di $X \Rightarrow$
la relazione $R = \{(2,1), (3,1)\}$ rappresentata dal
grafo orientato non è una applicazione di X in sé

E: 1 è in relazione con due elementi di $X \Rightarrow$
 $S = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ non è un'app. di X in sé

F: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è un'applicazione costante (non iniettiva!)

G: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è un'applicazione non iniettiva.

Cosa deve succedere perché il grafo orientato rappresenti
una funzione? e una trasformazione?

Relazioni d'ordine su un insieme X

(68)

Ricordiamo:

DEF. $R \in \mathcal{P}(X \times X)$ è detta relazione d'ordine su X

se è

- riflessiva: " $\forall x \in X, (x, x) \in R$ ", cioè $I_X \subseteq R$
- antisimmetrica: " $\forall x, y \in X, (x, y) \in R \text{ e } (y, x) \in R \Rightarrow x = y$ "
cioè $R \cap R^T \subseteq I_X$ (*)
- transitiva: " $\forall x, y, z \in X : (x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ "
cioè $R \circ R \subseteq R$

(*) NOTA

① RIFL: $I_X \subseteq R \Rightarrow I_X = I_X^T \subseteq R^T \Rightarrow I_X \subseteq R \cap R^T$
ANTISIMM.: $R \cap R^T \subseteq I_X$

Quindi se una relazione d'ordine $R \cap R^T = I_X$

② R^T è ancora una relazione d'ordine

Di solito una relazione d'ordine R si indica con " \leq "

$$(x, y) \in R \iff x \leq y$$

e si legge "x minore o uguale a y"

La sua trasposta R^T si indica con " \geq "

$$(x, y) \in R^T \iff x \geq y$$

e si legge "x maggiorante o uguale a y"

Altre dizioni equivalenti per $x \leq y$:

x è un minorante di y

y è un maggiorante di x

y è maggiore o uguale a x

Con la scritta (X, R) o (X, \leq) si indica l'insieme X in cui è introdotta la rel. d'ordine R (\leq), che viene detto "insieme parzialmente ordinato".

Sia \mathcal{R} una relazione d'ordine su X . (69)

DEF. Due elementi $x, y \in X$ si dicono confrontabili rispetto a \mathcal{R} se vale almeno una delle due condizioni

$$(x, y) \in \mathcal{R} \quad \text{o} \quad (y, x) \in \mathcal{R}.$$

Attenzione: la confrontabilità dipende dall'ordinamento non dall'insieme. Ad es. sia $X = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$.

- nell'ordinamento naturale: $2 \leq 5$
- nell'ordinamento $\{(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x \text{ divide } y\}$: $2 \leq 5$ non sono confrontabili. / VEDI PAG 69bis

DEF. Si dice che la relazione \mathcal{R} è un ordinamento totale di X e si dice che (X, \mathcal{R}) è un insieme totalmente ordinato (o catena) se ogni coppia di elementi $x, y \in X$ è confrontabile rispetto a \mathcal{R} , cioè se

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^T = X \times X \leftarrow \text{relazione universale}$$

Esempi:

- (\mathbb{N}^*, \leq) è totalmente ordinato
- $(\mathbb{N}^*, |)$ non è totalmente ordinato
- Per ogni insieme U , l'insieme $(P(U), \subseteq)$ è parzialmente ma non totalmente ordinato.

Infatti $\forall A, B, C \in P(U)$ e $\forall a \in U$ si ha

- RIFL.: $A \subseteq A$

- ANTISIMM.: $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

- TRANSIT.: $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

ma i sottainsiemi $\{\alpha\}$ e $\{\alpha\}^c$ di U non sono confrontabili. / VEDI 69ter

Mostro che $\{(x,y) \in \mathbb{R} \iff x|y\}$

è una rel. d'ordine in \mathbb{N}^*

1) RIFL: $a|a \quad \forall a \in \mathbb{N}^*$

2) ANTISIMM. $a|b \iff b = ha$ con $h \in \mathbb{N}^*$
 $b|a \iff a = kb$ con $k \in \mathbb{N}^*$

quindi se $a|b$ e $b|a$

$$b = ha = h(kb)$$

$$\Rightarrow 1 = hk \Rightarrow h = k = 1 \text{ poiché } h, k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow a = b$$

3) TRANSITIVA $a|b \iff b = ha$ con $h \in \mathbb{N}^*$

$b|c \iff c = kb$ con $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow c = kb = k(ha) = \underbrace{(kh)}_{\in \mathbb{N}^*} a$$

$$\Rightarrow a|c$$

L'ordine non è totale poiché ad es. 2 e 5 non sono confrontabili

$$2+5 \quad e \quad 5+2$$

Diversamente detto: $(2,5) \notin R$ e $(2,5) \notin R^T$

$$\Rightarrow (2,5) \notin R \cup R^T \Rightarrow R \cup R^T \not\subseteq X \times X$$

(69ter)

Sull'insieme ordinato $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$

Che cosa significa $A \subseteq B$?

$\forall x \in A$ si ha $x \in B$

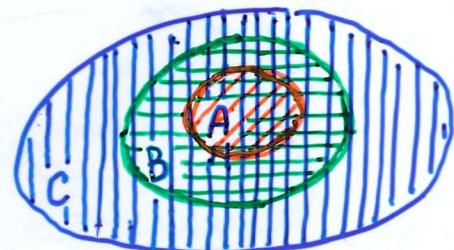
$\Rightarrow A \subseteq A$ è ovvio.

2. $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

poiché se ci fosse un $b \in B$ ma $b \notin A$ non sarebbe vero $B \subseteq A$ e se ci fosse un $a \in A$ ma $a \notin B$ non sarebbe vero $A \subseteq B$.
Cioè tutti gli elementi di A devono esserlo anche di B e viceversa.

3. $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$

se $x \in A$ allora $x \in B$ e quindi $x \in C$
cioè $A \subseteq C$



Quindi \subseteq è una rel. d'ordine.

Non totale se X ha più di un elemento:



$\{a\}$ e $\{a\}^c = U - \{a\}$ sono tali che

$\{a\} \not\subseteq \{a\}^c$ e $\{a\}^c \not\subseteq \{a\}$

(70)

Sia (X, \leq) un insieme (almeno parzialmente) ^{propriamente} ordinato. Se Y è un insieme che contiene X la relazione \leq , anche se estendibile in modo "naturale" a Y non è necessariamente una relazione d'ordine.

ESEMPIO. $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$ e $(\mathbb{N}^*, |)$ è un insieme parzialmente ordinato. Ma $(\mathbb{Z}^*, |)$ non è nemmeno parzialmente ordinato poiché se $x, y \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sono tali che

$$x|y \text{ e } y|x$$

non si può dedurre che $x=y$, ma solo che $x=y$ o $x=-y$.

Invece l'ordinamento naturale in \mathbb{N} , che può essere descritto da

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x+n=y$$

si può estendere a \mathbb{Z} e (\mathbb{Z}, \leq) continua ad essere un insieme (totalmente) ordinato:

$$x \leq x \text{ poiché } \exists 0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x+0=x$$

$$x \leq y \text{ e } y \leq z \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$$

$$x+m=y \text{ e } y+n=z \text{ cioè}$$

$$x+m+n=z \Rightarrow m+n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=n=0 \Rightarrow x=y.$$

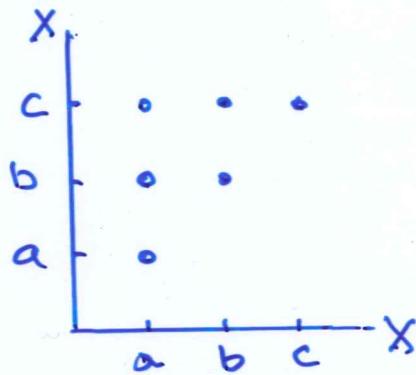
$$x \leq y \text{ e } y \leq z \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$$

$$x+m=y, y+n=z \Rightarrow$$

$$x+m+n=z \Rightarrow x \leq z. \blacksquare$$

In modo "imnaturale" per estendere una rel. d'ordine a $Y \supseteq X$ è di aggiungere alla rel. \leq solo le coppie (y, y) al vissimo di $y \in Y \setminus X$.

Ades. sia $X = \{a, b, c\}$ e $y = X \cup \{d\}$
e sia R la relazione su X definita
dal diagramma cartesiano

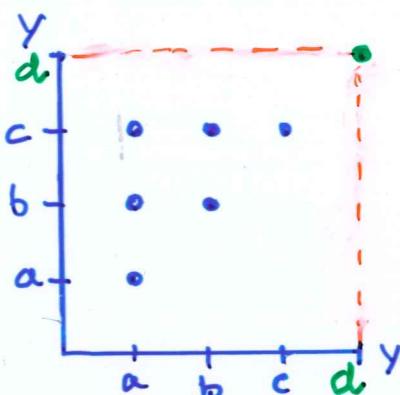


cui corrisponde
il grafo orientato



(è un ordinamento totale!)

Penso "estendere l'ordinamento all'ins. Y " così



cui corrisponde il
grafo orientato:



Affiamo ancora una rel. d'ordine poiché la
prop. riflessiva vale, l'autisimma pure
ogni nodo ha un loop

le frecce sono
monodirezionali

e la transitiva pure

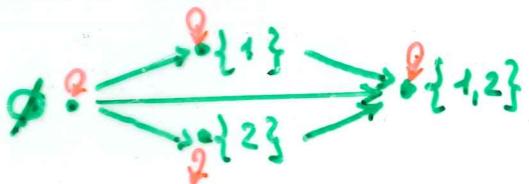
non ho aggiunto frecce da elementi di X a d
e quindi non devo preoccuparmi di
avere frecce che passino da un altro elemento
a d per composizione.

L'ordine ottenuto però non è totale poiché d
non è confrontabile che con se stesso.

Sia (X, \leq) un insieme (almeno parzialmente) ordinato. Ogni suo sottinsieme $S \subseteq X$ non vuoto è ordinato (almeno parzialmente) rispetto alla stessa relazione: si parlerà di relazione indotta su S. (7.1)

OSS: se il sottinsieme è scelto bene, l'ordinamento indotto su S può avere proprietà migliori.

Ades. L'insieme $(P(\{1,2\}), \leq)$ è solo parzialmente ordinato:



ma $S = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ è totalmente ordinato!

Siano dunque S un s.i. non vuoto (ma eventualmente $= X$) di X e a un elemento di X .

Introduciamo una terminologia che non descrive oggetti NECESSARIAMENTE esistenti in ogni insieme ordinato.

DEFINIZIONI:

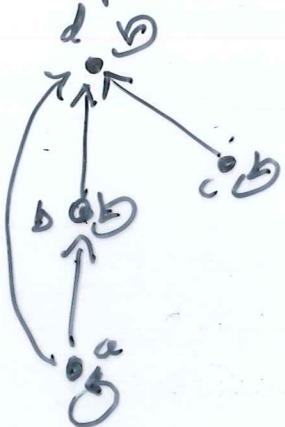
- un elemento $u \in X$ è detto estremo superiore di S, $\text{Sup } S$, se valgono entrambe le condizioni:
 1. $\forall x \in S$ si ha $x \leq u$ (u è maggiorante di ogni $x \in S$)
 2. $\forall t \in X$ tale che $x \leq t \quad \forall x \in S$ si ha $u \leq t$
(u è il più piccolo di tali maggioranti).
- in particolare $\text{Sup } X$ è detto massimo di X e denotato con 1.
- l'elemento $a \in X$ è detto elemento massimale di X se $a \neq \text{Sup } X$ e $\forall x \in X$ $a \leq x$, implica che $x = a$ oppure $x = \text{Sup } X$.

Nell'esempio $(P(\{1,2\}), \leq)$: $\text{Sup } X = \{1,2\}$; VEDI 73BIS

elementi massimali di $X = P(\{1,2\})$: $\{\{1\}, \{2\}\}$.

$$X = \{a, b, c, d\}$$

\mathcal{R} : quelle rappresentate dal grafo



$$\text{Sup} \{a, b, c, d\} = d = \text{MAX}$$

Massimali: b, c ?

Verificare
che è una
relazione
d'ordine (*)

$$\textcircled{1} \quad \exists \text{ Sup } X = d \quad \text{Si}$$

$$\textcircled{2} \quad b = d? \text{no} \rightarrow \textcircled{4}$$

$$c = d? \text{no} \rightarrow \textcircled{4}$$

Esempio sull'esempio
delle procedure a

pag 43 bis per
stabilire se certi
elem. di un insieme
sono massimali
rispetto a una
rel. d'ordine parziale
(R).

$$\textcircled{4} \quad \begin{array}{l} \text{per } b \\ \exists x \neq b, x \neq d \text{ t.c.} \\ b \leq x \leq d \end{array} \quad \text{No}$$

$\Rightarrow b$ massimale

$$\textcircled{4} \quad \begin{array}{l} \text{per } c \\ \exists x \neq c, x \neq d \text{ t.c.} \\ c \leq x \leq d \end{array} \quad \text{No}$$

$\Rightarrow c$ massimale

a è massimale?

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{4} \quad a < b < d \\ \neq \neq$$

$\Rightarrow a$ non è massimale

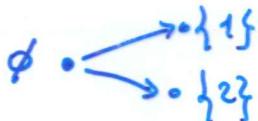
Si può verificare sul grafo o sulla matrice di vicinanza:

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 0 | 1 |
| b | 0 | 1 | 0 | 1 |
| c | 0 | 0 | 1 | 1 |
| d | 0 | 0 | 0 | 1 |

$$RR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R \leq R$$

ex.
totale
transitiva.

Se invece considero $Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ con l'ordinamento di inclusione vedo che (72)



NOTA. Si vede in questo es. che l'ord. indotta su un s. i. può anche avere proprietà "PEGGIORI"

non esiste $\text{Sup } Y$, cioè non esiste il massimo, ma esistono due elementi massimali.

PROPRIETÀ.

1. $\text{Sup } S$ (e in part. $\text{Sup } X$) può non esistere ma
2. se $u_1 = \text{Sup } S$ e $u_2 = \text{Sup } S$ allora $u_1 = u_2$
(per la parte (2) delle def è l'antisimmetria)
cioè se esiste è unico. VEDI 72 bis
3. $\text{Sup } \{a\} = a$
4. $\text{Sup } \{a, b\} = \text{Sup } \{b, a\}$
5. $\text{Sup } \{a, \text{Sup } \{b, c\}\} = \text{Sup } \{a, b, c\}$
6. $\text{Sup } \{a, b\} = b \Leftrightarrow a \leq b$
7. $\forall x \in X, x \leq \text{Sup } X$

Dualmente:

DEFINIZIONI

- un elem. $v \in X$ è detto estremo inferiore di $S \subseteq X$, $\text{Inf } S$, se valgono entrambe le condizioni:
 1. $\forall x \in S$ si ha $v \leq x$ (v è minorante di ogni $x \in S$)
 2. $\forall t \in X$ tale che $t \leq x \forall x \in S$ si ha $t \leq v$.
(v è il più grande di tali minoranti) Vedi es. 72Ter
- $\text{Inf } X$ è detto minimo di X e denotato con 0 (ZERO)
- l'elemento $a \in X$ è detto elemento minima di X
se $a \neq \text{Inf } X$ e $\forall x \in X$ $x \leq a$ implica $x = a$ o $x = \text{Inf } X$.

Valgono le proprietà duali delle precedenti (Sostituire \leq con \geq e Sup con Inf).

2. Spieghiamo l'unicità di $\text{Sup } S$ (se esiste)

72
bis

Sia $u_1 = \text{Sup } S$ e $u_2 = \text{Sup } S$

poiché $u_1 = \text{Sup } S$ e u_2 è un maggiorante di ogni elem. di S

$$u_1 \leq u_2$$

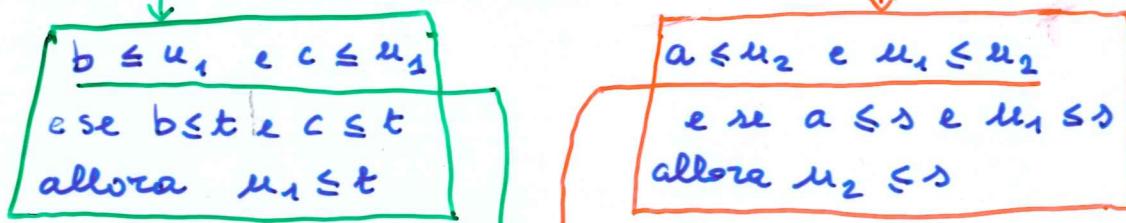
Ribaltando il ruolo di u_1 e u_2 :

$$u_2 \leq u_1$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2$$

5. Spieghiamo perché $\text{Sup}\{a, \text{Sup}\{b, c\}\} = \text{Sup}\{a, b, c\}$

Siano $u_1 = \text{Sup}\{b, c\}$, $u_2 = \text{Sup}\{a, u_1\}$ e



usando la prop. transitiva

- $b \leq u_1 \leq u_2, c \leq u_1 \leq u_2, a \leq u_2$
- se $b \leq s \leq c \leq s \leq a \leq s$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ u_1 \leq s \\ \xrightarrow{\quad} \\ u_2 \leq s \end{array}$$

$$\Rightarrow u_2 = \text{Sup}\{a, b, c\}$$

Attenzione: anche se manca $\text{Sup } X$ possono esistere elementi massimali in X : vedi l'es.
in cui $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ e $\text{R} \subseteq \{1\} \times \{2\}$ sono massimali

Per spiegare il concetto di estremo inferiore di S
 (in particolare: non c'è un minorante di S più grande di $\text{inf } S$)

$(X, \leq) = (\mathbb{R}, \leq)$ Prendo i due sottoinsiemi:

$$A = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \quad B = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$$

$$\text{inf } A = 0$$

$$\text{inf } B = 0 = \min B$$

Come lo capisco?

- Per def. di A e di B :

$$0 \leq x \quad \forall x \in A \quad (\text{risp. } \forall x \in B)$$

quindi 0 è un minorante di A (risp. di B).

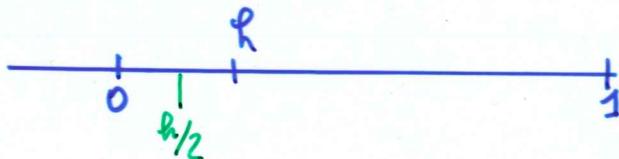
- Sia h un altro minorante di A (risp. di B):

✳ $h \leq x \quad \forall x \in A \quad (\text{risp. } h \leq x \quad \forall x \in B)$

- se è

$$h \leq 0 \quad \text{siamo a posto.}$$

- se fosse $h > 0$ (presunto $\text{inf } A$), ci sarebbe almeno un elemento $x \in A$ nell'intervallo $(0, h)$, ad es. $\frac{h}{2}$



cioè un $x \in A$ e $x \neq h \Rightarrow h$ non sarebbe un minorante di tutti gli elementi x di A , cioè non soddisfarebbe ✳

Quindi ogni minorante di A o è 0 o è < 0 .
 (la stessa cosa vale per B).

Nozione di insieme BEN ORDINATO

Sia (X, \leq) un insieme TOTALMENTE ORDINATO.

Dico che esso è ben ordinato se ogni suo sottointerse S è dotato di MINIMO, cioè

$$\exists \text{ yuf } S \text{ e } \text{yuf } S \in S.$$

Esempio. $(X, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$ è ben ordinato.

Ovvio che \mathbb{N} ha minimo: 0.

Ma ciò succede anche per ogni suo sottointerse, anche infinito. Ad es. se

$$A = \{2n+3, n \in \mathbb{N}\}, \text{yuf } A = 3 \in A.$$

Invece:

(\mathbb{Z}, \leq) non è ben ordinato perché ad es.

$2\mathbb{Z} = \{2x, x \in \mathbb{Z}\}$ non ha yuf e quindi non può avere minimo

Esempio. Sia $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $x \leq y \Leftrightarrow x|y$. (73)

Poiché $\forall y \in X$ si ha $1|y$

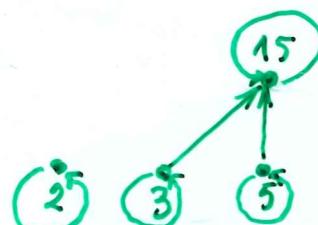
$\inf X = 1$ ma non c'è $\sup X$.

Se considero $S = \{2, 3, 5, 15\}$ ho

$$\inf S = 1 = \text{M.C.D.}(2, 3, 5, 15)$$

$$\sup S = 30 = \text{m.c.m.}(2, 3, 5, 15)$$

}*



S con l'ordinamento indotto non ha massimo né minimo.

Elementi massimali in X : nessuno. In S : 2, 15

Elementi minimali in X : tutti i numeri primi.
in S : 2, 3, 5.

* OSSERVARE che $\forall a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\inf(a, b) = \text{M.C.D.}(a, b)$ e $\sup(a, b) = \text{m.c.m.}(a, b)$.

VEDI p. 73 bi's

Esempio. Sia $X = \mathcal{P}(U)$ ove U è un qualsiasi insieme (finito o no), ordinato con \subseteq

Se $A, B \in \mathcal{P}(U)$ si ha

$$\inf(A, B) = A \cap B \quad \sup(A, B) = A \cup B$$

$$0 = \inf(X) = \emptyset$$

$$1 = \sup X = U$$

gli elementi minimali di X sono tutti i singolari $\{a\}$, $a \in U$

gli elementi massimali di X sono i loro complementari $\{a\}^c$, $a \in U$.

$$\{a\}^c, a \in U.$$

Esempio. Sia $X = \mathbb{N}$ ordinato con \leq

$\forall a, b$ con $a \leq b$: $\inf(a, b) = a$, $\sup(a, b) = b$;

$\inf X = 0$; $\sup X$: non esiste.

Elem. minimali di X : 1; elem. massimali di X : non esistono.

Le domande cui rispondere per decidere se

(73
bis)

$a \in X$ è massimale sono

1) Esiste $\text{Sup } X$? Se la risposta è SÌ passo a 2

Se la risposta è NO passo a 3

2) $a = \text{Sup } X$? Se la risposta è SÌ a non è massimale

Se la risposta è NO passo a 4

3) esiste $x \in X$ t.c. $a \leq x$?

Se la risposta è SÌ a non è massimale

Se la risposta è NO a è massimale

4) esiste $x \in X$ t.c. $a \leq x \leq \text{Sup } X$

Se la risposta è SÌ a non è massimale

Se la risposta è NO a è massimale

Dualmente per i minimi.

Quindi se in $(\mathbb{N}^*, |)$ voglio stabilire se 3 è minima

1) osservo che $\text{luf } \mathbb{N}^* = 1$ poiché $1|x \forall x \in \mathbb{N}^*$

2) osservo che $3 \neq 1 = \text{luf } \mathbb{N}^*$

3) ovvero che non c'è alcun numero $n \in \mathbb{N}^*$ $n \neq 1, n \neq 3$ tale che $n|3$:

quindi 3 è minima.

Se invece voglio stabilire se esistono elementi massimali conviene chiedersi se esistono elementi al di sopra dei quali non ci siano altri elem. di X , tranne (eventualmente) $\text{Sup } X$.

In $(\mathbb{N}^*, |)$ non ho massimali poiché ogni $n \in \mathbb{N}^*$ è divisore di qualche altro numero, ad es. di $2n$.

Prima di dare altri esempi diamo una utile (74)
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA di una relazione d'ordine su
un insieme finito X . (DIAGRAMMA di HASSE)

Si tratta di semplificare la rappresentazione
fornita col grafo orientato.

- ogni elemento $x_1, \dots, x_n \in X$ si rappresenta con
un modo (overtice)

Se so che la relazione in esame è una rel. d'ordine
so che è riflessiva: quindi è inutile mettere i cerchi
a ogni modo.

Invece di mettere le frecce orientate dal più piccolo
al più grande

- se $x_i < x_j$ il modo corrispondente a x_i deve
stare più in basso rispetto a quello corrispon-
dente a x_j .

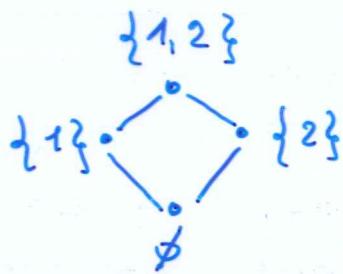
So anche che volevo la proprietà transitiva:
quindi decido di mettere solo gli spigoli indisponibili (senza più frecce poiché l'orientamento
è già stato scelto in 2. dal basso in alto)

- ^{con uno spigolo}
congiungo i nodi corrispondenti a x_i e x_j
se e solo se $x_i < x_j$ e non esiste un
 $x_k (\neq x_i, x_j)$ tale che $x_i < x_k < x_j$.

NOTARE che si considerano " $<$ " stretti non " \leq "
Il motivo è che, avendo escluso i loop, confronto
sempre elementi diversi.

Esempi.

1) Il diagramma di Hasse di $(\mathcal{P}(\{1,2\}), \subseteq)$ è



$\text{Sup}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$ corrisponde al modo più in alto, che è congiunto con tutti gli altri (anche con \emptyset , per transitività). Similmente per $\text{Inf}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$

2) Il diagramma di Hasse di $(\{1,2,3\}, \leq)$ è



si capisce perché un insieme totalmente ordinato si dice catena.

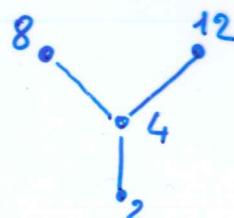
3) Il diagramma di Hasse di (X, I_X) ove $X = \{1,2,3\}$

è



4) Il diagramma di Hasse di $(\{2,4,8,12\}, |)$ è

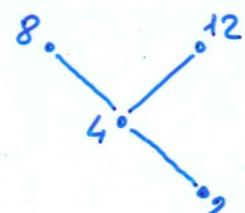
$$\text{Sup}(\{2,4,8,12\}) = 24$$



ma non



o anche

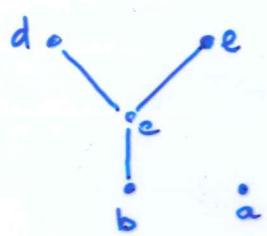


2 minimo
4 mininale
8, 12 massimali

5) Viceversa si può ricostruire insieme e relazione d'ordine a partire del diagramma di Hasse.

(*) non nel senso di a quale insieme appartengono gli elementi, ma "per cui elementi ha".

Ad es.



$$\Rightarrow X = \{a, b, c, d, e\}$$

(76)

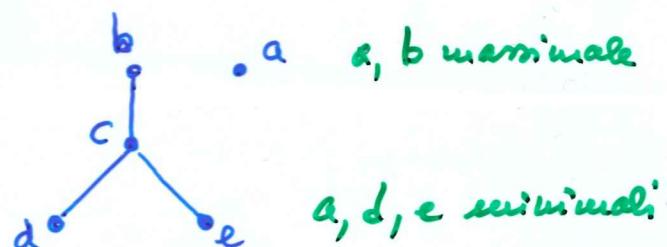
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| e | . | . | . | . |
| d | . | . | . | . |
| c | . | . | . | . |
| b | . | . | . | . |
| a | . | . | . | . |

R

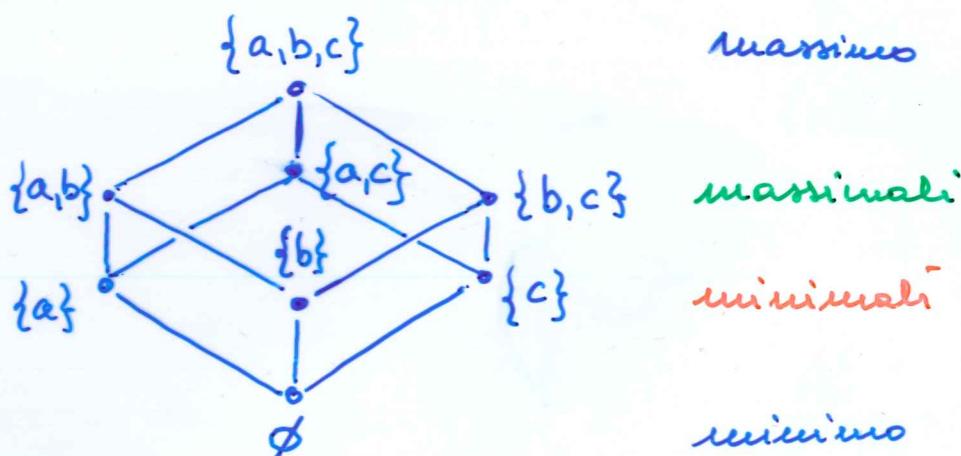
- b. Il diagramma di Hasse di X ordinato con la relazione R^T trasposta della relazione d'ordine R è il "capovolto" di quello di (X, R)
Ad es. con riferimento all'es. precedente

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| e | . | . | . | . |
| d | . | . | . | . |
| c | . | . | . | . |
| b | . | . | . | . |
| a | . | . | . | . |

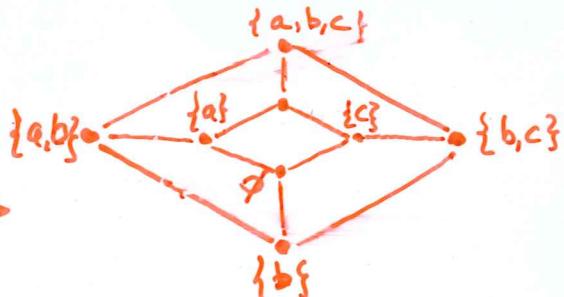
R^T



- c. Il diagramma di Hasse di $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$ è



Il diagramma è per forza intrecciato poiché devo tener conto dell'ordine. Un grafo con gli stessi nodi e spigoli potrebbe essere semplificato: ma questo non è un diagramma di Hasse!

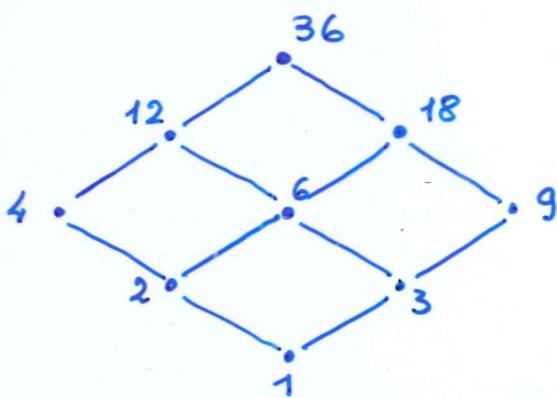


ESERCIZIO

(77)

1. Stabilire se l'insieme di numeri naturali

$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ ordinato rispetto alla rel. di "essere divisore di" ha MAX, ha MIN; quali sono gli elementi massimali e quelli gli elementi minimali



$$\inf X = 1$$

$$\sup X = 36$$

massimali 12, 18

minimali 2, 3

$$\inf(12, 18) = 6$$

$$\inf(12, 9) = 3$$

$$\sup(2, 9) = 18$$

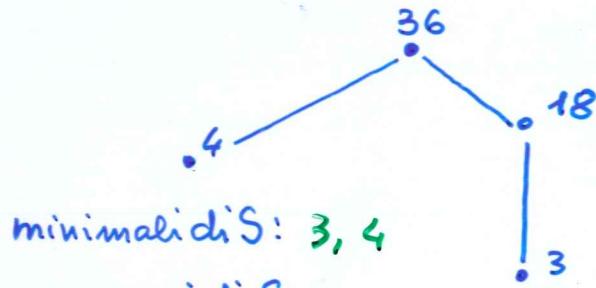
2. Considerare il sottinsieme $S = \{3, 4, 18, 36\}$ di X dell'esercizio 1 con l'ordinamento indotto e trovare, se esistono:

$$\sup S = 36$$

$\inf S$ non esiste

$$\sup(4, 3) = 36$$

$$\inf(4, 3) \text{ non c'è}$$



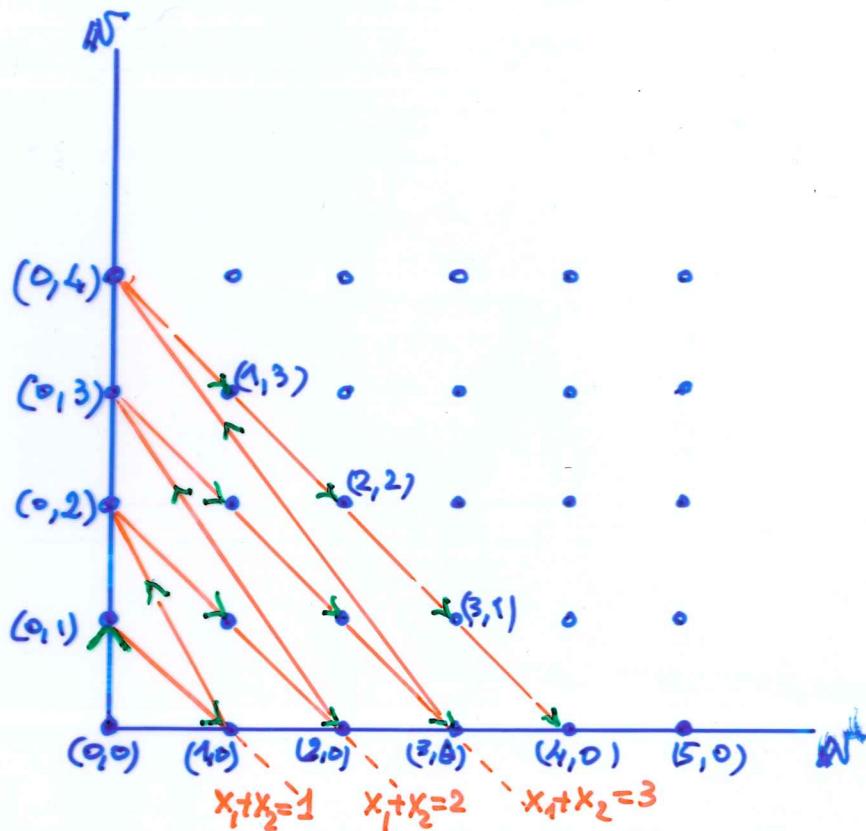
minimali di S : 3, 4

massimali di S : 4, 18

3. Sia $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Stabilire se è una relazione d'ordine (totale) la seguente

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \iff x_1 + x_2 < y_1 + y_2 \text{ oppure } x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \text{ e } x_1 \leq y_1.$$

Se sì, X ha minimo? Qual è l'elemento minimo?



Mostro che è una relazione d'ordine totale
organizzando i punti di N^2 come una
"catena": parto dal più piccolo secondo la
definizione $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \iff x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2 \iff$

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \iff \\ x_1 < x_2$$

I punti su ogni retta del tipo

$$x_1 + x_2 = n$$

sono minori di quelli su una retta del tipo

$$x_1 + x_2 = n+1$$

E su ciascuna di queste rette, quello di ascissa m
è minore di quello di ascissa $m+1$. E quindi

$$(0,0) < (0,1) < (1,0) < (0,2) < (1,1) < (2,0) < \dots$$