

Ne abbiamo già accennato. Qui completiamo la terminologia. Siano

$V$ : un insieme di elementi che chiameremo vertici o odi

$E$ : una collezione di sottoinsiemi di  $V$  di ordine  $2$  o  $1$  che chiameremo lati o spigoli

La coppia ordinata  $(V, E) = G$  è detta grafo.

Un lato di ordine  $1$  sarà detto loop o coppio e potrà essere rappresentato in uno qualsiasi dei 2 modi:

$$\{v_i\} \quad \text{o} \quad \{v_i, v_i\}$$

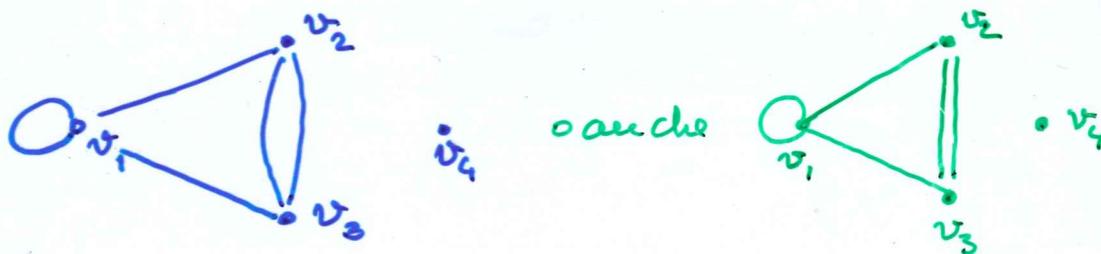
È lecito avere lati ripetuti (che potranno essere chiamati multipli o paralleli).

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA (solo se  $V$  è finito)

- ogni vertice è rappresentato da un punto
- ogni lato contenente 2 vertici (event. coincidenti) è rappresentato da un "segmento" congiungente i 2 punti.

ESEMPIO 1:  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E = \{ \{v_1, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\} \}$



$\{v_1, v_1\}$  è un loop;  $\{v_2, v_3\}$  è un lato multiplo; il lato  $\{v_1, v_2\}$  congiunge i vertici  $v_1$  e  $v_2$ .

# Terminologia:

$|V|$  : ordine del grafo ( $\geq 1$ )

$|E|$  : grandezza del grafo : può essere 0 se non ci sono lati

se  $\{v_i, v_j\} \in E$  si dice che i due vertici  $v_i$  e  $v_j$  sono adiacenti

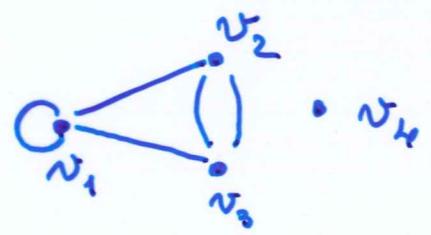
se due lati  $\{v_i, v_j\}$ ,  $\{v_j, v_k\} \in E$  hanno un vertice  $v_j$  in comune si dice che sono incidenti in  $v_j$

per ogni vertice  $v$ , si dice grado o valenza  $d(v)$  di  $v$  il numero di lati incidenti in  $v$ .

un coppia conta per 2 nel calcolo della valenza.

un vertice di grado 0 è detto isolato  
" " " 1 " " Terminale

Nell'esempio 1:



$|V| = 4$  ,  $|E| = 5$

$v_1$  e  $v_2$  sono adiacenti  
 $v_1$  e  $v_4$  NON sono adiac.  
 $\{v_1, v_2\}$  e  $\{v_2, v_3\}$  sono incidenti in  $v_2$   
ecc.

$d(v_1) = 4$  ,  $d(v_2) = d(v_3) = 3$  ,  $d(v_4) = 0$   
quindi  $v_4$  è isolato.

ESEMPIO 2

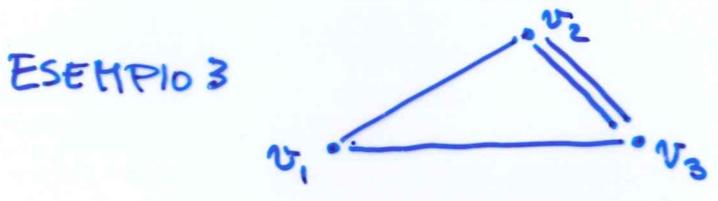


in questo grafo  $|V| = 3$ ,  $|E| = 4$   
 $d(v_1) = 5$ ,  $d(v_2) = 2$ ,  $d(v_3) = 1$

quindi  $v_3$  è un vertice terminale. I due vertici  $v_1$  e  $v_3$  NON sono adiacenti.

Se  $d(v)$  è un numero pari si dice che  $v$  è un vertice pari

Se  $d(v)$  è un numero di spai si dice che  $v$  è un vertice di spai



$d(v_1) = 2 \Rightarrow v_1$  è pari  
 $d(v_2) = 3 \Rightarrow v_2$  è di sp.

Si dice che  $(V, E)$  è un grafo regolare di grado  $k$  se ogni suo vertice ha grado  $k$ .

Nessuno dei grafi fin qui diseguiti è regolare.

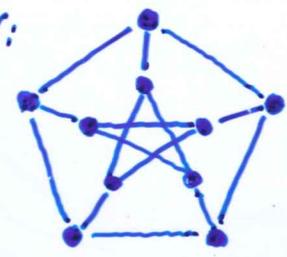
ESEMPIO 4.

$(\circ)$  è regolare di grado  $k=2$  (e ordine 2)

è regolare di grado 2 (e ordine 4)

sono entrambi regolari di grado 3 (e ordine 4)

il grafo di PETERSEN:  
è regolare di grado 3  
(e ordine 10)



un grafo con  $E = \emptyset$  è regolare di ordine zero;  
se  $|V|=n$  si dice che è il grafo nullo su  $n$  vertici  
e si denota con  $N_n$ .

ESEMPIO 5

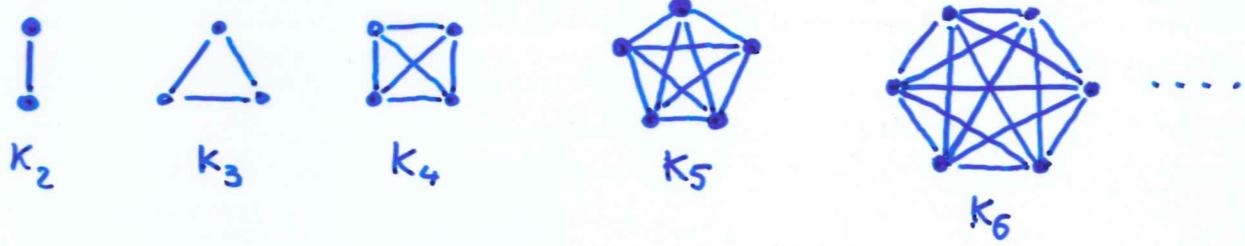


un grafo senza loop e senza lati multipli è detto grafo semplice.

Non sono semplici i grafi degli esempi 1, 2, 3, e

nell'es. 4. Gli altri sono semplici.

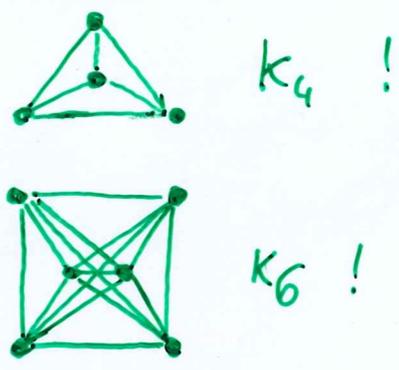
Un grafo semplice di ordine  $n$  tale che ogni coppia di vertici di  $V$  risulti adiacente si dice grafo completo di ordine  $n$ ,  $K_n$



... è come disegnare un poligono di  $n$  vertici con tutte le sue diagonali

Oss.

1) per ogni  $n \geq 2$  esiste 1 e "1 sol" grafo completo  $K_n$ . La rappresentazione può non essere unica:



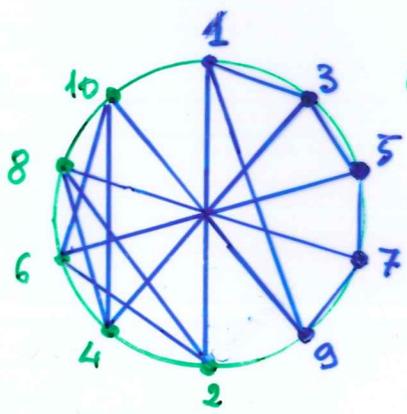
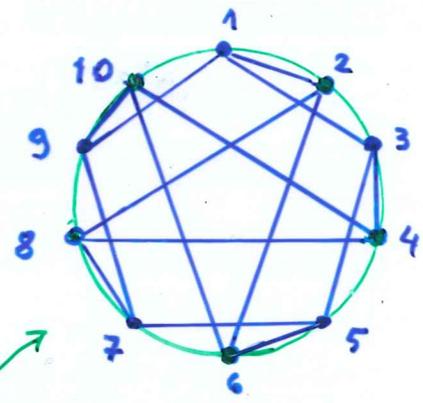
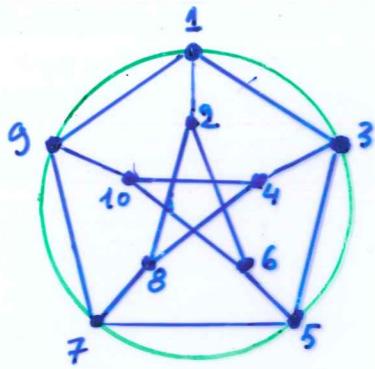
ma in ogni caso il numero di lati è  $|E| = \binom{n}{2}$  e per ogni vertice  $v \in K_n$  si ha  $d(v) = n-1$ .

2) un grafo semplice di ordine  $n$  può essere pensato ottenuto da  $K_n$  rimuovendo un po' di lati. Quindi se  $E$  è l'insieme dei suoi lati:

$$|V| = n \Rightarrow |E| \leq \binom{n}{2}$$

Ad esempio un grafo semplice di ordine 6 ha un numero di lati  $\leq \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$

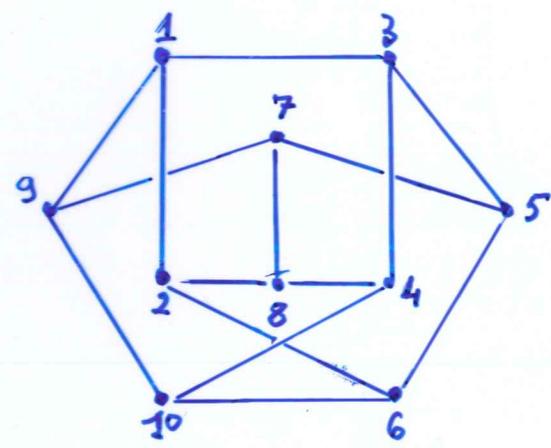
Si ha così una limitazione sul numero di lati di un grafo semplice



PETERSEN ritratto come sottografo di  $K_{10}$

in 2 modi diversi....

Ovviamente il disegno dipende da come si etichettano i 10 punti, presi su una circonferenza solo per visualizzare meglio il decagono... ma potrei anche fare il disegno così:



3. Ogni grafo regolare di grado  $k$  e ordine  $n$  ha  $\frac{1}{2} k \cdot n$  lati.

*Infatti...*

Ad es. il grafo di Petersen ha  $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$  lati (contarli!!)

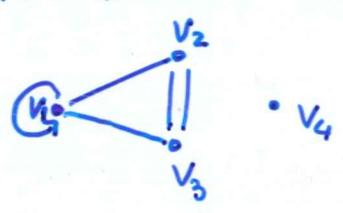
Più in generale

TEOREMA (delle strette di mano). Sia  $(V, E)$  un grafo e sia  $d(v)$  il grado del vertice  $v \in V$ . Si ha

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$$

Dim. Ogni lato ha 2 vertici e quindi viene conteggiato nel calcolo del grado di ciascuno dei 2. Quindi la somma dei gradi di tutti i vertici è 2 volte il numero di lati. ■

ESEMPIO 1



- $d(v_1) = 4$  (2 per il loop e 1 per  $\{v_1, v_2\}$  e per  $\{v_1, v_3\}$ )
- $d(v_2) = 3$   $\{v_1, v_2\}$ ,  $\{v_2, v_3\}$ ,  $\{v_2, v_3\}$
- $d(v_3) = 3$   $\{v_1, v_3\}$ ,  $\{v_2, v_3\}$ ,  $\{v_2, v_3\}$
- $d(v_4) = 0$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 10 = 2 |E|$$

si vede come ogni lato, compreso il loop, sia contato 2 volte

COROLLARIO. Ogni grafo ha un numero pari di vertici dispari.

Dim. Facciamo una partizione di  $V$  in vertici pari  $V_p$  e vertici dispari:  $V = V_p \cup V_d$  e  $V_p \cap V_d = \emptyset$ .

Allora

$$\underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{pari per il teorema}} = \underbrace{\sum_{v \in V_p} d(v)}_{\text{pari in quanto somma di pari}} + \sum_{v \in V_d} d(v) \Rightarrow \sum_{v \in V_d} d(v) \text{ è pari}$$

Ma se  $v \in V_d$  il suo grado è dispari: perché la loro somma sia pari devono essere in numero pari. ■

Conseguenze pratiche: ades. possiamo decidere se esiste un grafo regolare di grado  $r$  e ordine  $n$  assegnati.

ESEMPI. Stabilire se esistono

- un grafo regolare di grado 3 e ordine 3  
 $\sum d(v) = 3+3+3$  non è pari: non esiste!

- un grafo regolare di grado 4 e ordine 3  
 $\Rightarrow |E| = 6$



- un grafo regolare di grado 3 e ordine 1  
 no:  $3 \cdot 1$  è dispari

- un grafo regolare di grado 4 e ordine 1



- un grafo regolare di grado  $n-1$  e ordine  $n$   
 sì perché  $n(n-1)$  è pari:  $K_n$

In generale esiste un grafo regolare di grado  $d$  e ordine  $n$  se almeno uno dei due numeri è pari.

Prima di chiudere il paragrafo, ricordiamo che abbiamo già usato (senza definirli) i grafi orientati (Vedi relazioni su X). Ne diamo la def.:

un grafo orientato è una coppia ordinata  $(V, E)$  ove  $V$  è un insieme (non vuoto) di vertici ed  $E$  è una collezione di coppie ordinate di elementi di  $V$ , dette archi. Cioè qui:  $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$ , per ogni scelta di  $v_i, v_j \in V$ .

# Matrici di adiacenza di un grafo

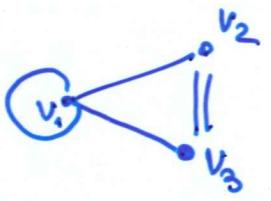
Siano  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  un insieme di vertici e  $E$  un insieme di lati aventi vertici in  $V$ .

Il grafo  $(V, E)$  può essere rappresentato anche con una matrice di adiacenza, cioè una matrice  $A$  quadrata di ordine  $n$  tale che

$a_{ij}$  è il numero (intero  $\geq 0$ ) dei lati che congiungono  $v_i$  e  $v_j$ .

Oss.1 La matrice  $A$  cambia se l'ordine dei vertici viene permutato.

Oss.2 La matrice  $A$  di adiacenza di un grafo è simmetrica

Esempio 1. Il grafo  ha matrice di adiacenza:

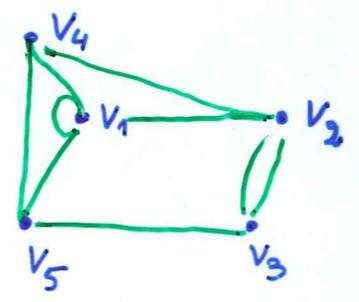
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Viceversa ogni matrice  $A$  simmetrica a elementi interi  $\geq 0$  può essere vista come matrice di adiacenza di un grafo.

Esempio 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ grafo:



la matrice di adiacenza di un grafo evidenzia:

(110)

- 1) numero di vertici = ordine della matrice
- 2) vertici isolati producono una riga e una colonna di zeri
- 3) Cippi presenza di numeri  $\neq 0$  sulla diagonale
- 4) il grado di ogni vertice  $v_i$  somma degli elementi della riga (o colonna)  $i$ , contando 2 volte  $a_{ii}$
- 5) regolarità del grafo le somme di cui al punto 4) sono tutte uguali al variare di  $i$
- 6) numero dei lati  $\frac{1}{2}$  della somma al variare di  $i$  delle somme al punto 4)
- 7) semplicità del grafo  $\forall i, a_{ii} = 0$  e  $\forall i \neq j: a_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

### ESEMPIO 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pensando i  $v_i$  ordinati come nella matrice:

$$|V| = 6$$

non è semplice: compare un 2

cappi: 1 in  $v_1: \{v_1, v_1\}$ , 2 in  $v_2: \{v_2, v_2\}$   
 $\{v_2, v_2\}$

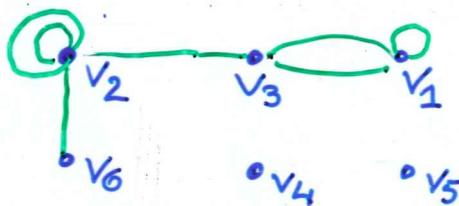
vertici isolati:  $v_4, v_5$

$$d(v_1) = 4 \quad d(v_2) = 6 \quad d(v_3) = 3 \quad d(v_6) = 1$$

$\Rightarrow$  grafo non regolare

$$|E| = \frac{1}{2} (4 + 6 + 3 + 1) = 7$$

rappresentazione usuale:



### ESEMPIO 4

Trovare la matrice di adiacenza di  $K_4$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$