

Percorsi, cammini e cicli su un grafo

(111)

Siano u e v due vertici di un grafo (V, E)

DEFINIZIONI.

- Si dice percorso da u a v una sequenza di lati e_1, e_2, \dots, e_h del grafo (non necessariamente distinti), ognuno adiacente al successivo tale che sia

$$\{u, v_1\} = e_1, \{v_1, v_2\} = e_2, \dots, \{v_{h-2}, v_{h-1}\} = e_{h-1}, \{v_{h-1}, v\} = e_h$$

Il numero h dei lati che compongono il percorso è detto lunghezza del percorso.

u : vertice iniziale

v : vertice finale

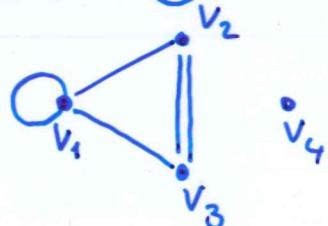
Se $u \neq v$: percorso aperto

Se $u = v$: percorso chiuso

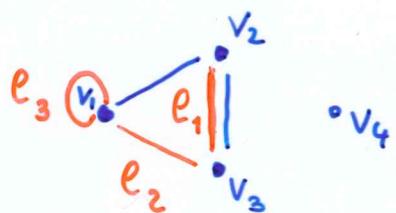
Ogni percorso di lunghezza h determina una sequenza di $h+1$ vertici (estremi compresi) non necessariamente distinti.

ESEMPIO ①

Facciamo un percorso di lunghezza 3 da:



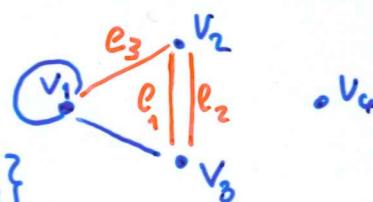
con punto iniziale $u = v_2$ e
punto finale $v = v_1$
(percorso aperto)



$$e_1 = \{v_2, v_3\}, e_2 = \{v_3, v_2\}, e_3 = \{v_3, v_1\}$$

ma va bene anche

$$e_1 = \{v_2, v_3\}, e_2 = \{v_3, v_1\}, e_3 = \{v_2, v_1\}$$

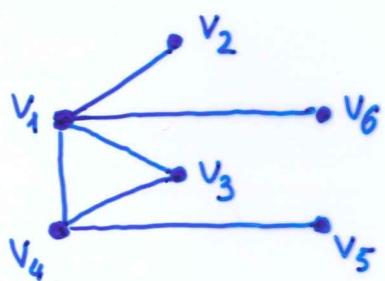


Il percorso può essere descritto elencando i vertici
solo qualora non ci sia ambiguità (lati multipli);
altrimenti si etichetta il lato e si inserisce l'etichetta
nella descrizione.

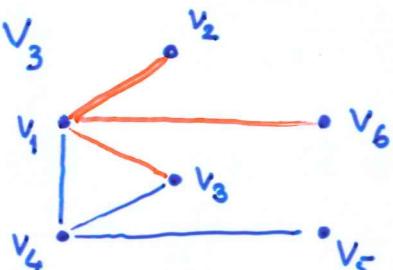
(112)

ESEMPI

②

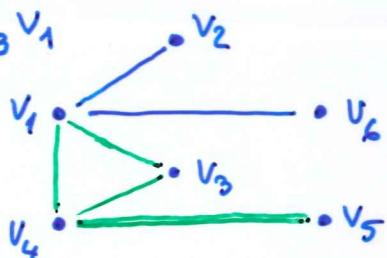


A) $v_6 v_1 v_2 v_1 v_3$



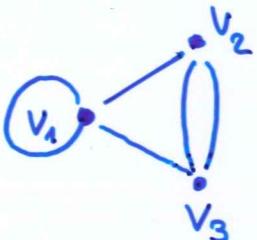
aperto lungo 4

B) $v_1 v_4 v_5 v_4 v_3 v_1$



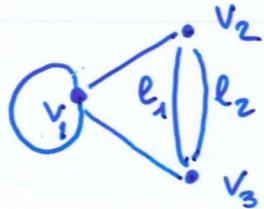
chiuso lungo 5

③

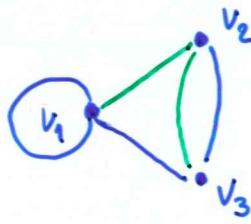


$v_1 v_2 v_3$ è ambiguo: quale dei 2 lati $\{v_2, v_3\}$ devo seguire?

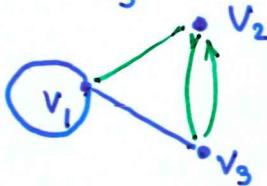
Etichetto i lati:



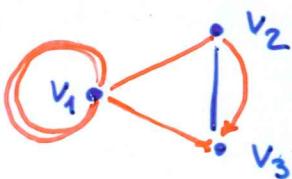
$v_1 v_2 l_1 v_3$



$v_2 l_1 v_3 l_2 v_2 v_1$



$v_3 v_1 v_1 v_1 v_2 l_2 v_3$



DEFINIZIONI

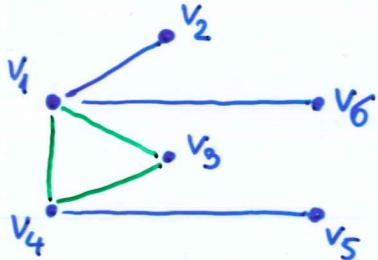
2) un percorso da u a v privo di lati ripetuti è detto cammino da u a v (i vertici possono comparire più di una volta).

Sono cammini quelli dell'ES.1 e i primi 2 dell'ES.3, non lo sono quelli dell'es 2 e l'ultimo dell'ES.3.

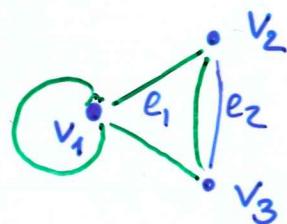
Un cammino in cui anche i vertici (tranne eventualmente quello iniziale e quello finale) sono distinti è detto cammino semplice o catena.

Un cammino senza lati da v a v è denotato con v (per distinguerlo dal cappio vv) e detto cammino nullo.

Un cammino chiuso contenente almeno un lato è detto ciclo o cicloch (il cammino nullo non è un ciclo).



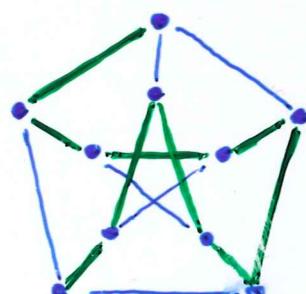
$v_1 v_4 v_3 v_1$ ciclo semplice



$v_1 v_2 v_3 v_1$ ciclo non semplice

ESERCIZIO. Nel grafo di Petersen trovare un cammino semplice che passi da ogni vertice.

Esiste un ciclo che passi per ogni vertice?



ESERCIZIO. Sia (V, E) un grafo e sia $|V|=n$.

Determinare qual è la massima lunghezza possibile per un cammino semplice su V .

Un cammino di lunghezza h è composto da h lati distinti.

Se il cammino è semplice non ci sono vertici ripetuti (tranne eventualmente il primo e l'ultimo: cammino semplice chiuso).

Quindi i vertici coinvolti sono

$$\begin{array}{ll} h+1 & \text{se il cammino semplice è aperto} \\ h & " " " " \text{ chiuso} \end{array}$$

Se $|V|=n$ non ci sono più di n vertici distinti e quindi

$$\begin{array}{ll} h+1 \leq n & \text{per i cammini semp. aperti} \\ h \leq n & " " " " \text{ chiusi} \end{array}$$

Ne consegue che se $|V|=n$ un cammino con più di $n-1$ (nel caso aperto o n nel caso chiuso) vertici è non semplice.

E' possibile contare quanti sono i percorsi di lunghezza fissata.

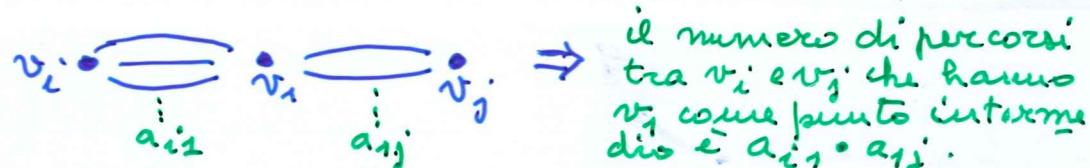
TEOR. Sia A la matrice di adiacenza di un grafo. L'elemento di posto (i,j) di A^h dà il numero di percorsi da v_i a v_j di lunghezza h .

Dim. Per $h=2$: $B = A^2$

$$b_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in}a_{nj}$$

a_{ii} = numero di lati da v_i a v_i

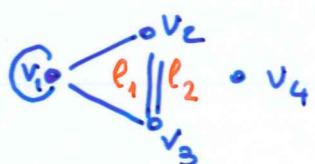
a_{ij} = " " " " v_i a v_j



Lo stesso si ripete per ogni vertice intermedio, v_2, \dots, v_n . Il numero totale di percorsi da v_i a v_j con un solo punto intermedio sono b_{ij} .

Per $h > 2$ si può procedere per induzione (provaci!)

ESEMPIO



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

3 cammini
di lungh. 2
da v_1 a v_3

- $v_1 v_1 v_3$ (non semplice)
- $v_1 v_2 l_1 v_3$ (semplice)
- $v_1 v_2 l_2 v_3$ (")

3 percorsi
non cammini
di lungh. 2
da v_1 a v_1

$v_1 v_1 v_1$
 $v_1 v_2 v_1$
 $v_1 v_3 v_1$

5 percorsi
di lungh. 2
da v_2 a v_2

3 non cammini:
 $v_2 v_1 v_2, v_2 l_1 v_3 l_1 v_2,$
 $v_2 l_2 v_3 l_1 v_2$
2 cicli semplici:
 $v_2 l_1 v_3 l_2 v_2, v_2 l_2 v_3 l_1 v_2$

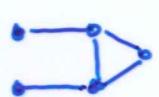
Grafi connessi

(116)

DEF. Un grafo (V, E) è detto connesso se $\forall u, v \in V$ esiste un caminio che parte da u e arriva a v .

ESEMPI

non connessi : A)  B)  C) ..

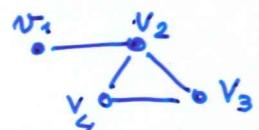
connessi : A)  B) . (c'è il cammino vuoto!)

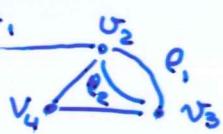
la richiesta "caminio" si può indebolire o rafforzare
 |
 PERCORSO CAMMINO SEMPLICE

In fatti

- se esiste un cammino da u a v
 - ① esiste un percorso da u a v (ovvio!)
 - ② esiste un cammino semplice da u a v

② supponiamo che il cammino trovato non sia semplice; ad es. $v_1 v_2 v_3 v_4 v_2$
 è un cammino da v_1 a v_2 non semplice perché v_2 compare 2 volte; se sopprimo il cammino chiuso $v_2 v_3 v_4 v_2$ ho un cammino semplice: $v_1 v_2$.

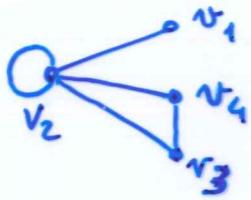


Se avessi il cammino $v_1 v_2 v_3 v_4 v_2 v_3$ il grafo avrebbe la forma  e basta sopprimere $v_3 v_4 v_2 l_2 v_3$

per trovare il cammino semplice da v_1 a v_3 .

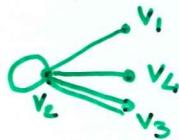
- viceversa ② se esiste un cammino semplice da u a v "un cammino da u a v (ovvio!)"
- ① se esiste un percorso da u a v esiste un cammino da u a v : si tratta di togliere cappi e lati di "andata e ritorno".

Ad es. nel grafo



voglio trovare un cammino da v_1 a v_4
a partire dal percorso

$v_1 v_2 v_2 v_3 v_2 v_4$



tolgo il ceppo $v_2 v_2$:

$v_1 v_2 v_3 v_2 v_4$

tolgo l'andata e ritorno $v_2 v_3 v_2$ e ho finalmente un
cammino semplice

$v_1 v_2 v_4$.

Quindi nella def. di grafo cammino è equivalente
chiedere che da u a v (comunque scelti in V) ci sia un
percorso, un cammino o un cammino semplice.

TEOR. Sia (V, E) un grafo. La relazione R su V
definita da

$(u, v) \in R \iff$ esiste un cammino sul grafo che
parte da u e arriva a v

è una relazione di equivalenza.

Dim. R è riflessiva (da u a u si arriva con il
cammino vuoto)

R è simmetrica (i lati del cammino da u a v
si possono percorrere in verso
opposto)

R è transitiva (accostando i due cammini da
 u a v e da v a w si ha in
generale solo un percorso da
 u a w : ma per quanto osservato
prima si possono eliminare
un numero opportuno di lati
in modo da avere un cammino).

La relazione R determina una partizione dei vertici del grafo. Gli elementi dell'insieme quoziente $\frac{V}{R}$ (cioè le classi di equivalenza) sono dette componenti connesse di V . (M8)

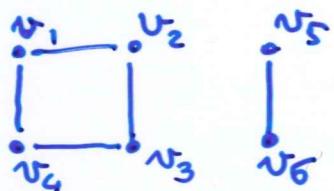
I vertici che stanno in una stessa classe di equivalenza, insieme con i lati che li costringono in V , costituiscono un grafo connesso.

Ognuno di questi grafi connetti viene chiamato —per estensione, perché questo sarebbe il nome dell'insieme di vertici e non del grafo— componente连通的 di V .

Un grafo è connesso $\Leftrightarrow R$ è la relazione universale
 \Leftrightarrow ha 1 solo componente connessa

ESEMPI

1) K_n è connesso $\forall n$

2) Se il grafo è  le componenti connesse sono $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\{v_5, v_6\}$

3)  ha due componenti connesse che sono cicli semplici di lunghezza 3 (avrei potuto disegnare 2 triangoli per nulla sovrapposti)

4)  ha 3 componenti connesse

Come leggere se un grafo è connesso

(119)

conoscendone la matrice di adiacenza?

TEOR. Sia A la matrice di adiacenza di un grafo (V, E) con $|V|=n$. Allora

(V, E) è connesso \Leftrightarrow ogni elemento della matrice

$$C = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$$

è diverso da zero.

(NOTA: la matrice I ha il solo scopo di rendere più facile l'enunciato)

Dimo. \Leftarrow

Sia $c_{ij} \neq 0 \quad \forall i \neq j$. Allora almeno uno degli elementi in posizione (i, j) delle n matrici I, A, \dots, A^{n-1} è $\neq 0$. Se è l'elemento di $A^{m_{ij}}$ ($0 \leq m_{ij} \leq n-1$), per il TEOR. a pag 115, esiste un percorso di lunghezza m_{ij} da v_i a v_j . Se ciò succede per ogni coppia i, j il grafo è connesso per def.

\Rightarrow Esista una coppia (i, j) tale che $c_{ij} = 0$

intuizione
CONTRONOMINALE Non può essere $i=j$ poiché gli elementi sulla diagonale di C sono somma di 1 (elem. di I) e degli elem. (tutti ≥ 0) delle matrici A, \dots, A^{n-1} .

Se $i \neq j$ significa che da v_i a v_j non c'è un percorso di lunghezza 1, né 2, ..., né $n-1$

(siamo in \mathbb{N} e quindi $b_{1,ij} + b_{2,ij} + \dots + b_{n-1,ij} = 0 \Rightarrow$ tutti gli addendi sono nulli) sempre per il Teor. pag 115.

Non può neanche esistere un percorso da v_i a v_j di lunghezza $m \geq n$: infatti in questo caso un vertice sarebbe ripetuto e, togliendo il percorso che risponde corrispondente, esisterebbe un percorso di lungh. $\leq n-1 \Rightarrow$ \Rightarrow grafo non connesso

ESEMPI

(120)

① $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice di un grafo connesso.

Infatti $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

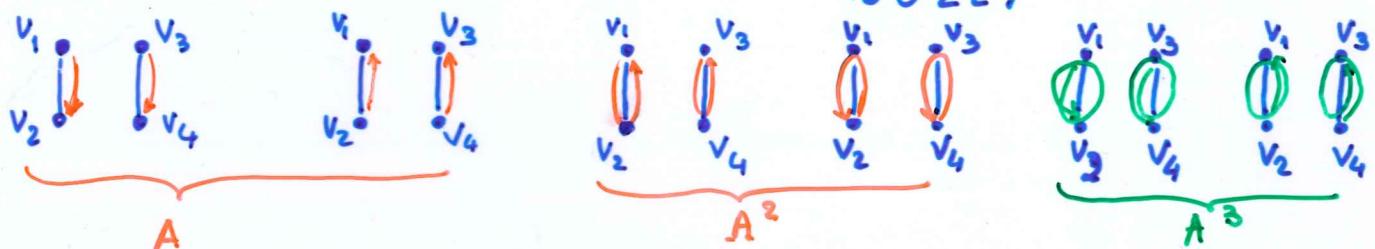
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ha tutti gli elementi $\neq 0$.

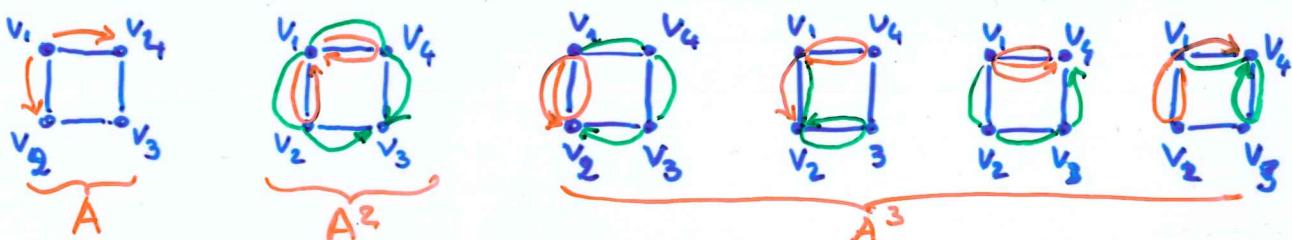
② $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice di un grafo non connesso

Infatti $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, $A^3 = A \Rightarrow$

$$C = I + A + A^2 + A^3 = 2I + 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ ha elementi nulli}$$



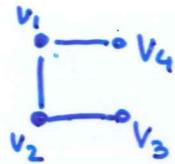
Invece nell'es. 1, fissando ci sui percorsi che partono da v_1



Per ogni vertice valgono disegni analoghi. In realtà in questo esempio basta arrivare ad A^2 per verificare la connessione: $I + A + A^2$ ha già tutti gli elementi $\neq 0$.

Ma non è sempre così. Ad es.

(3)



Matrice di adiacenza: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(121)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il cammino da v_3 a v_4 (e da v_4 a v_3) nasce solo con A^3 (e di fatto è un cammino semplice lungo 3).

(4) Esercizio: stabilire se il grafo rappresentato dalla matrice di adiacenza

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è connesso}$$

(5) Esercizio: stabilire se il grafo rappresentato dalla matrice di adiacenza

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

è connesso e - in caso contrario - trovarne le componenti connesse.

Che cosa si osserva nella matrice?

Che cosa succede facendo A^2, A^3, \dots ?

(121
bis)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = A^T$$

$$A^2 = A^T \cdot A^T = (A^2)^T$$

$\Rightarrow A^2$ è simmetrica

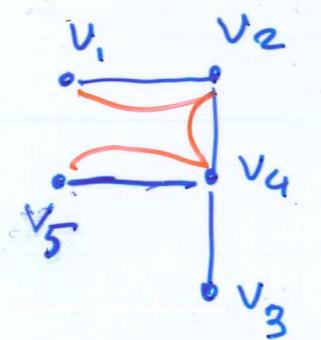
controllare: è vero che la nostra
lo è?

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1+0+1+0 & 0+1+0+2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1+0+2+0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{1} \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

comunque sia fatta A^4 ,

$I + A + A^2 + A^3 + A^4$ ha tutti gli el. $\neq 0 \Rightarrow$ grafo
connesso



$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & C \end{array} \right)$$

A e C quadrate

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & C \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{cc} A^2 + B^2 & AB + BC \\ BA + CB & B^2 + C^2 \end{array} \right)$$

l'ordine nel prodotto è cruciale

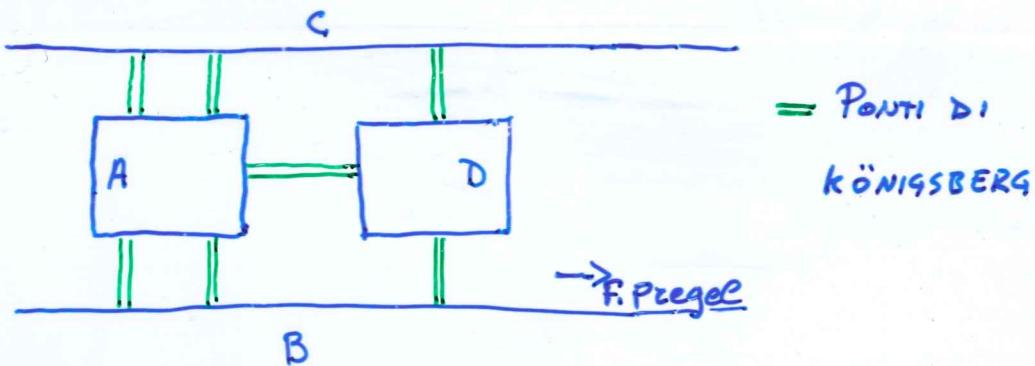
(129)

DEF. Un grafo (V, E) è detto euleriano se esiste un circuito che contiene ogni lato del grafo.

Oss. La def. dice che

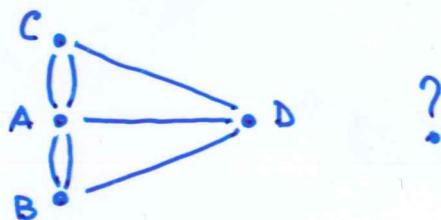
- in un grafo euleriano ci possono essere punti isolati, ma quelli non isolati formano un'unica componente connessa (il circuito che percorre tutti i lati raggiunge i vertici)
- dato che nel cammino non ci sono lati ripetuti, nel percorso che si fa sul grafo è lecito passare più volte per uno stesso modo ma mai 2 volte per lo stesso lato

ESEMPIO



Abitando in una qualunque delle 4 zone A,B,C,D, si può fare una passeggiata che passando 1 e 1 sola volta per tutti i ponti ricongiunga a casa?

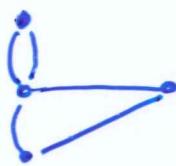
Quanto dice: è euleriano il grafo



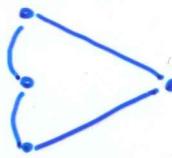
Risponde il

TEOREMA di EULERO. Un grafo privo di vertici isolati è euleriano se e solo se è connesso e ogni suo vertice ha grado pari.

Quindi il grafo dei ponti di Königsberg non è euleriano.
Si può renderlo euleriano rimuovendo 3 ponti



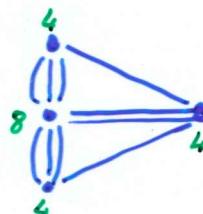
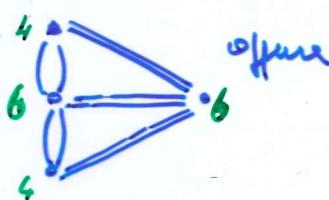
oppure



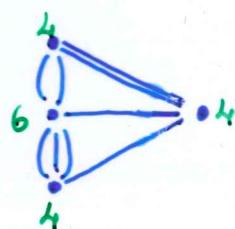
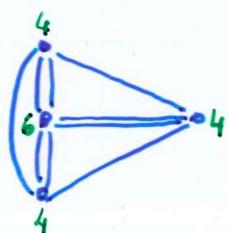
o spostandone 2



o aggiungendone 3



o solo 2:



COROLARIO. Il grafo completo K_n è euleriano se e solo se n è dispari. (ogni vertice ha grado $n-1$)
Un grafo regolare di grado d è euleriano \Leftrightarrow è connesso e d è pari.



K_4 : NON EULERIANO
 $d=3$



PETERSEN:
NON EULERIANO
 $d=3$



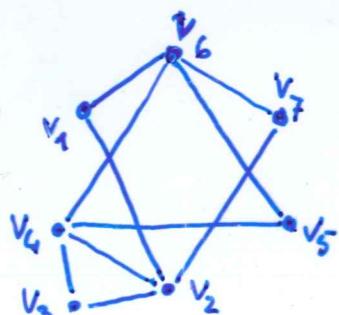
K_3 : EULERIANO
 $d=2$



NON EULERIANO
non connesso

ESERCIZI. 1) il grafo che ha per vertici gli 8 vertici di un cubo e per lati i suoi 12 spigoli e le sue 4 diagonali è euleriano? SI
2) il grafo avente matrice di adiacenza $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ è euleriano? NO: $d(v_2)=3$

3) il grafo



è euleriano?

SI



SI