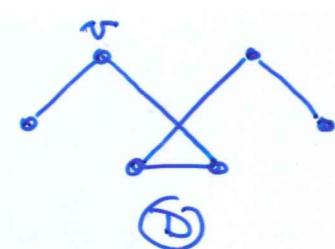
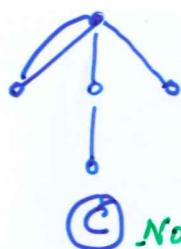
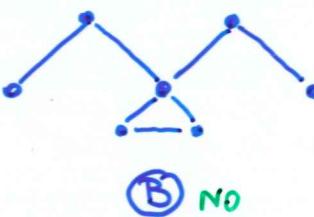
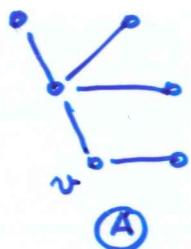


DEF. Si chiama albero un grafo connesso privo di circuiti.

OSS. Se (V, E) è un albero

- $\begin{matrix} \text{è} \\ \text{SEMPLICE} \end{matrix}$
- non ha cappi (che darebbero luogo ad circuiti vuoti)
 - non ha lati multipli (che darebbero luogo a circuiti del tipo u_1, v_1, u_1)
 - se ha uno solo vertice non ha lati, cioè è N_1 .

ESEMPI. Quali dei seguenti grafî sono alberi?



OSS. Un grafo (V, E) senza circuiti ha componenti connesse che sono alberi (infatti sono grafi connessi e privi di circuiti poiché un circuito in una componente lo è anche nel grafo (V, E)).

Viene detto foreste (unione disgiunta d'alberi).

Ad es. ! V

Vogliamo caratterizzare i grafi che sono alberi.

Allo scopo serve un

LEMMA. Un albero con almeno due vertici ha almeno un vertice di grado 1.

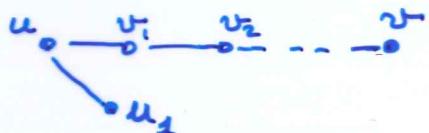
Dimo. Siano u, v due vertici distinti del grafo. (125)

Se $d(u)=1$ o $d(v)=1$ la tesi è provata.

Altrimenti, visto che il grafo è connesso, esiste un cammino che congiunge u con v

$$u \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v$$

e nessuno di questi vertici ha grado 1: in particolare da u esce almeno un altro lato uu_1 .



Se $d(u_1)=1$ la tesi è provata; in caso contrario da u_1 esce un altro lato u_1u_2 diverso da uu_1 .

No:



Notiamo che non può essere $u_2=v_i$ (per qualche i) né $u_2=v$ poiché nell'albero non ci sono circuiti; quindi u_2 è un vertice diverso dai precedenti.

Se $d(u_2)=1$ la tesi è provata. Altrimenti si itera la costruzione e il ragionamento.

Poiché $|V|=n$ è finito dopo un certo numero di passi la costruzione si deve arrestare e dato che non ci devono essere circuiti l'ultimo vertice della costruzione ha grado 1. ■

TEOREMA. Sia (V,E) un grafo connesso. Sono equivalenti:

- (V,E) è un grafo
- $\forall u,v \in V$ con $u \neq v$ esiste un unicocammino da u a v
- comunque si "cancelli" un lato del grafo si ottiene 1 grafo con due componenti connesse che sono alberi
- $|E| = |V| - 1$.

Dim. Struttura della dim.



(126)
usando gli
altri risultati
e l'induzione

a) \Rightarrow b)

essendo il grafo connesso esiste ALMENO un cammino

$$u u_1 u_2 \dots u_h v$$

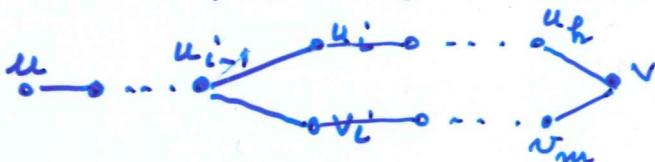
da u a v . Se ne esistesse un altro diverso

$$u v_1 v_2 \dots v_m v$$

da un certo indice i si dovrebbe avere $u_i \neq v_i$, ma
dovendo entrambi i cammini portare a v quantomeno
l'ultimo vertice l'avrebbero in comune. Ciò porta
a un ciclo

$$v v_m \dots v_i u_{i-1}^{=v_{i-1}} u_i \dots u_h v$$

che non può esistere poiché (V, E) è un albero!



b) \Rightarrow c)

siano u e v i vertici del lato da rimuovere.

Poiché (b) dice che c'è un solo cammino da u a v ,
se rimuovo il lato uv non c'è più un cammino
che connette i 2 punti \Rightarrow ci sono 2 componenti
connesse: V_1 contenente u e V_2 contenente v . Entrambe,
con i rispettivi lati (provenienti da V_1) sono connesse e non
contengono cicli (che sarebbero cicli anche di (V, E)) \Rightarrow
sono alberi.

ESEMPI



c) \Rightarrow a)

(V, E) è connesso: quindi basta verificare che non ha cicli. Se
ne avesse, rimuovendo un lato non percorso dal ciclo avremmo
che almeno 1 comp. connessa non è un albero; rimuovendo
un lato percorso dal ciclo il grafo resterebbe connesso.

a) \Rightarrow d) per induzione su $|V|=n$

(127)

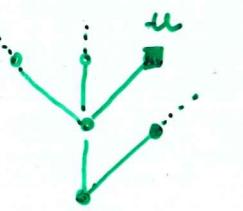
1. Se $n=2 \Rightarrow |E|=1$ (BASE INDUZIONE)

2. Suppongo che $\forall k \leq n$ sia vero che un albero con k vertici abbia $k-1$ lati (IP. INDUTTIVA). Considero un albero con $k+1$ vertici.

Per il LEMMA esiste un vertice u di grado 1: se rimuovo l'unico lato di vertice u mi resta una componente连通的 formata dal solo u e un'altra formata dei restanti k vertici e relativi lati che per ipotesi (a \Leftrightarrow c) è un albero \Rightarrow ha $k-1$ lati.

Aggiungo nuovamente il lato con u e ho k lati.
Per induzione allora ogni albero con n vertici ha $n-1$ lati.

albero con
 $k+1$ vertici



albero con
 k vertici:
x ipind. ha
 $k-1$ lati

x ipind. ha
 $k-1$ lati

d) \Rightarrow a) per induzione su $|V|=n$

1. Se $n=1$ e $|E|=0$ si ha l'albero N_1 :

2. Suppongo che $\forall k \leq n$ sia vero che un grafo连通的 con k vertici e $k-1$ lati sia un albero (IP. INDUTTIVA).

Dimostrò che un grafo連通的 con $k+1$ vertici e k lati NON ha circuiti.

Osservo: $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_{k+1}) = 2k \Rightarrow$

esiste almeno un vertice con grado < 2 . Sia v_{k+1} .

Non può essere $d(v_{k+1}) = 0$ (grafo連通的!) \Rightarrow
 $d(v_{k+1}) = 1$.

Rimuovo v_{k+1} e l'unico lato che lo contiene \Rightarrow grafo con k vertici e $k-1$ lati che (per ipotesi induktive) è un albero e quindi non ha circuiti. Riaggiungo v_{k+1} e il suo lato: non può originare circuiti poiché $d(v_{k+1}) = 1$. Dunque per induzione si ha le tesi ■



OSS. Attenzione a non dimenticare l'ipotesi

(128)

Grafo connesso

Consideriamo i grafi non connessi (e non alberi, né foreste!)



In entrambi i casi vale (a): 5 vertici e 4 lati

In B) non vale (c) poiché rimuovendo il lato isolato si hanno 3 componenti connesse, di cui una contiene un ciclo : 

Ma in A) vale anche (c)

Se nessuno dei due vale (b) : essendo presenti dei cicli c'è più di un cammino da un vertice a un altro.

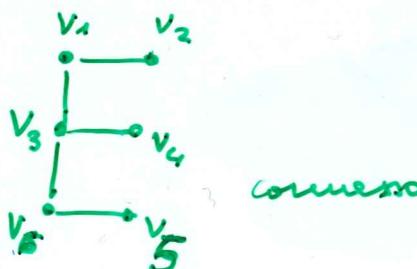
Ma (b) vale ad es. per 

ESERCIZIO. Stabilire se il grafo che ha per matrice di adiacenze

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è un albero.

- E' connesso? $I + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$ ha tutti gli el. $\neq 0$ oppure
- Quanti vertici ha? 6 = ordine della matrice A
- Quanti spigoli ha? $2 + 2 + 1 = 5$

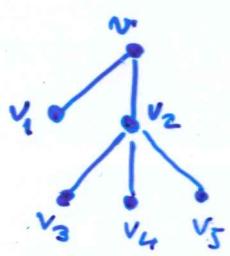
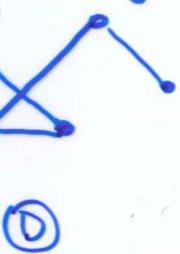
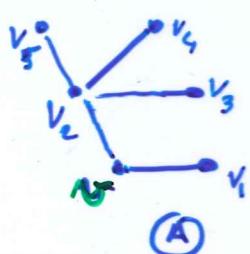


ALBERI CON RADICE

(129)

Dato un albero (V, E) si può scegliere un suo vertice come radice e quindi assegnare un verso a ogni lato, a partire dalla radice.

ESEMPI. Considero gli alberi **(A)** e **(D)** a pag 124



Fissati come radice i 2 vertici indicati con v , i 2 alberi si rappresentano così:

Si attribuiscono talore ai vertici nuovi che si richiama agli alberi genealogici:

v : antenato comune

gli altri nodi: discendenti

v_2 : padre di v_3, v_4, v_5 (figli)

Un vertice dotato di almeno un figlio (come v e v_2) è detto vertice interno; un vertice privo di figli (come v_1, v_3, v_4, v_5) è detto foglia. La radice non è mai una foglia salvo nell'albero N_1 .

Si dice albero n-ario un albero con radice in cui ogni vertice ha al più n figli.

Se ogni vertice interno ha esattamente n figli si parla di albero pienamente n-ario.

Se $n=2$: binario.

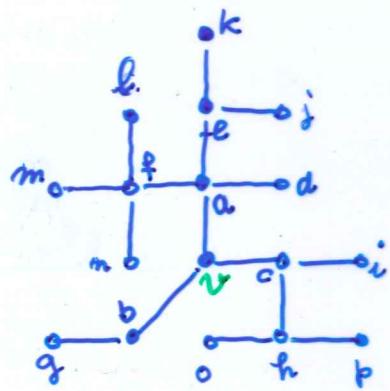
ESEMPI : **(A)** è un albero ternario (non pienamente)

(B) è un albero binario (non pienamente)

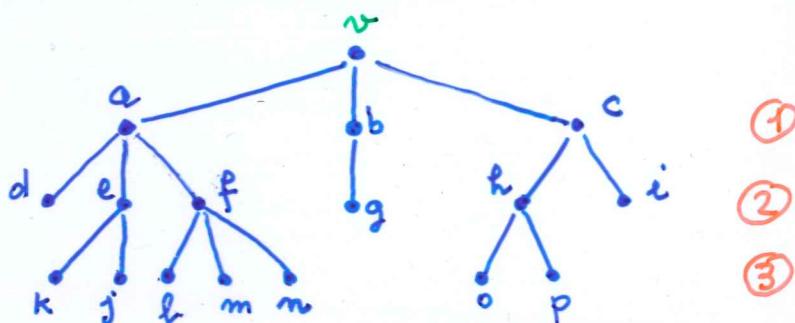
OSS. Poiché in un albero esiste un unico cammino tra 2 vertici, se sceglieremo un vertice v come radice si può definire il livello di un vertice w come la lunghezza del cammino da v a w .

(130)

ESEMPIO. Nell'albero radicato in v

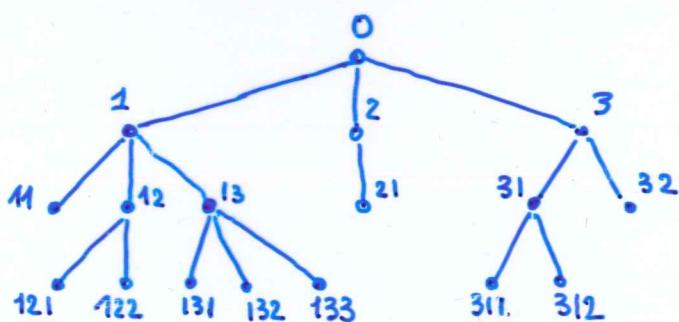


che posso rappresentare come



ci sono vertici di livello 1 : a, b, c
di livello 2 : d, e, f, g, h, i
di livello 3 : tutti gli altri

Ordinando i vertici rispetto al loro livello non si ha in generale un ordinamento totale (possono esistere due vertici distinti di uguale livello). Volendo elencarli si può convenire di leggere i vertici di uguale livello da sinistra a destra e si passano anche etichettare i vertici con dei "patronimici". Ad es. nel grafo precedente

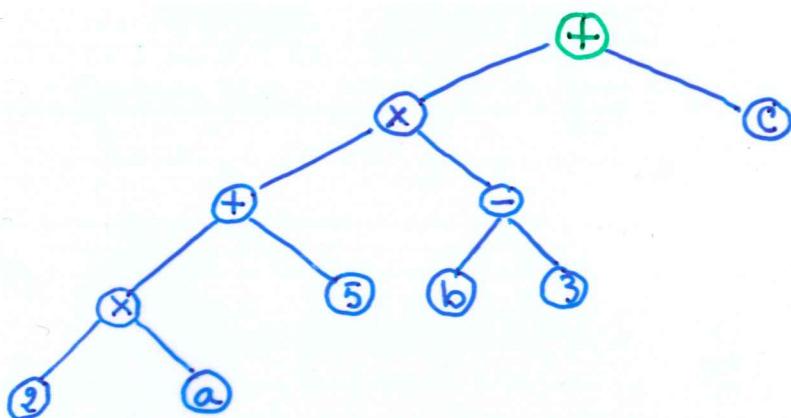


Altri ordinamenti possono essere legati all'ordine di "visita" del vertice (scendere a sinistra finché si può e risalire fino al primo vertice che ha un altro figlio : vadekjflemubgchopi).
Stringa di 1 (lati discendenti) e 0 (lati ascendenti) nel percorso.

Con un albero radicato ordinato si possono rappresentare ad esempio le espressioni algebriche tenendo presente che

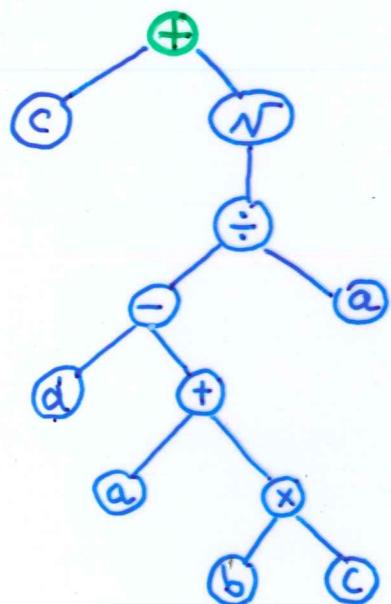
1. gli operatori UNARI (potenze, radici) sono nodi con 1 figlio a sinistra e nessuno a destra
2. gli operatori binari ($+$, \cdot , ...) sono nodi con un figlio a sinistra e uno a destra
3. lettere e numeri su cui si opera sono foglie
4. leggendo il grafo si deve ritrovare la formula

Esempio 1 $((2 \times a) + 5) \times (b - 3) + c$ si trasduce



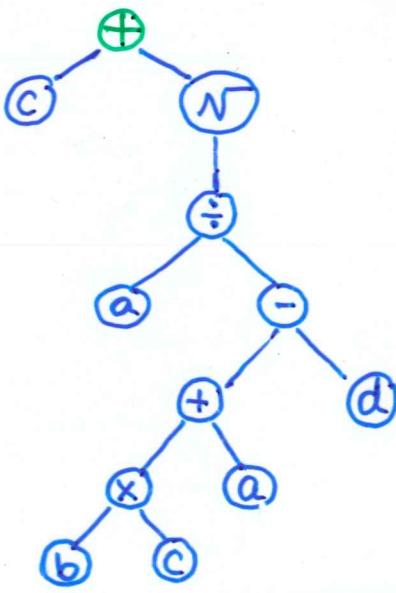
dalle foglie si
risale all'espressione
L'ordinamento è
cruciale (ad es.
non posso scambiare
le foglie b e 3)

Esempio 2



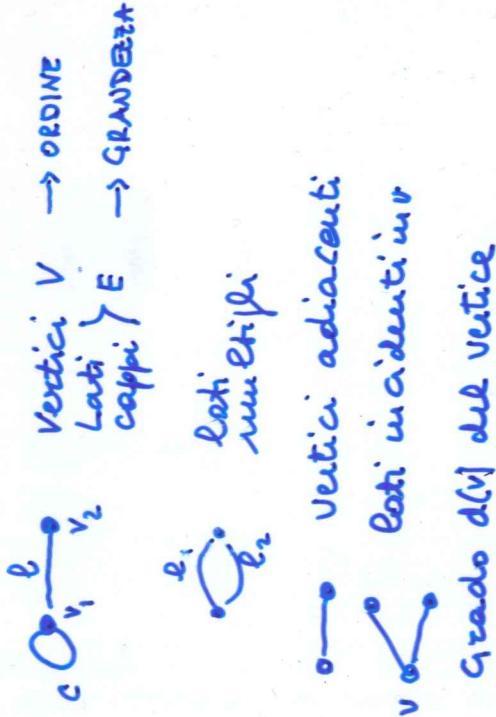
$$c + \sqrt{d - (a + (b \times c))} = c + \sqrt{\frac{d - (a + bc)}{a}}$$

Esempio 3



$$c + \sqrt{\frac{a}{(b \times c) + a - d}}$$

GRAFI



grado $d(v)$ del vertice

$d(v) = 0$: vert. isolato

$d(v) = 1$: vert. terminale
vertici pari / dispari

grado regolare : $d(v) = \text{cost.}$

grado semplice

grado completo

grandezza di un grafo completo di ordine n
grandezza " " semplice di ordine n

grandezza di un grafo, noti i gradi dei suoi
vertici
ogni grafo ha un numero pari di vertici dispari

(Grafi orientati)

Matrice di adiacenza di un grafo A
 $A = [a_{ij}]$ $a_{ij} = 1$ se v_i e v_j sono adiacenti, 0 altrimenti

Connessione (rel. di equiv.)

Componenti connesse di un grafo

Grafi connessi

$$\text{alberi} (\text{nessun circuito}) \iff |E| = |V| - 1$$

percorso su un grafo da u a v
 \hat{u} : lunghezza del percorso



percorso etichettato (in presenza di vertici
calcoli multipli)



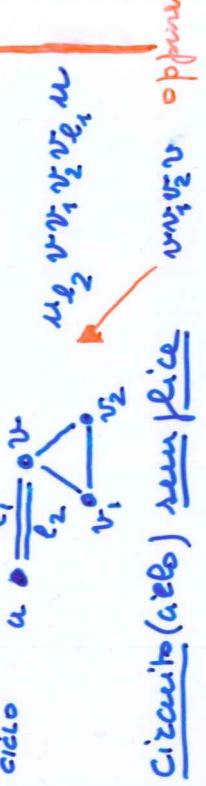
cammino = percorso senza ripet. di vert.



cammino semplice



ciclo = cammino chiuso



ciclico (cyclo) semplice univ. oppure

Esiste un cammino semplice da u a v
se e solo se esiste un percorso da u a v

Numero di percorsi di lunghezza n
da u a v
esistenza di percorsi a n ar

$$I + A + \dots + A^{n-1}$$

percorso euleriano (cicuito che percorre tutti i lati)
 \iff $d(v)$ par $\forall v \in V$