

# Quesiti sui grafi

(132)

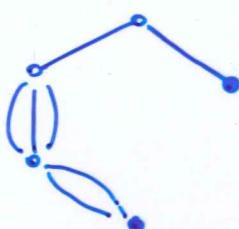
- 1) Si consideri il grafo con  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  ed  
 $E = \{\{a, b\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$

Dire, giustificando, se  $(V, E)$  è

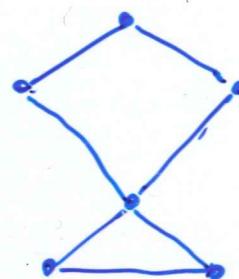
- semplice
- regolare
- connesso
- euleriano

(Aiutarsi con la rappresentazione grafica o la matrice di adiacenza)

Si risponda alle stesse domande per i grafi rappresentati dai due diagrammi



A)



B)

e per quelli rappresentati dalle matrici di adiacenze

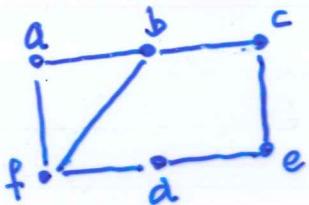
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Esiste un grafo regolare di grado 4 e ordine 8?

Se sì rappresentarlo, se no portare motivazioni teoriche.

1)



grafo semplice (No leti ripetuti, No coppi)

(132  
bis)

non regolare  $d(a)=2 \neq d(b)=3$

comnesso: sì

euleriano: no poiché comnesso ma  $d(b)=3$

A) grafo non semplice (leti multipli)

non regolare (1 vertice di ordine 1, 2 di ordine 2, 1 di ord. 4  
1 di ord. 5)

comnesso

non euleriano (comnesso ma d dispari in alcuni casi)

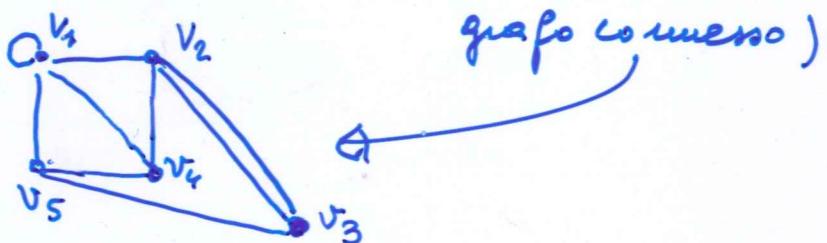
B) grafo semplice, non regolare, comnesso, euleriano

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

non semplice poiché tra  $v_2$  e  $v_3$  ci sono 2 leti

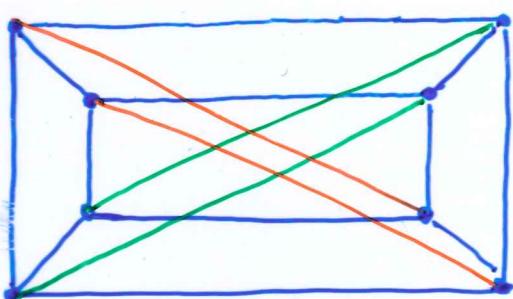
non regolare poiché  $d(v_1)=5$   
 $d(v_2)=4$

non euleriano (vertici di spari in



grafo comnesso)

2) non ci sono ostacoli all'esistenza di un grafo regolare di grado 4 e ordine 8 (avrà 16 leti)



è il cubo con le 4 diagonali

3) Esiste un grafo di ordine 98 :  $V = \{v_1, \dots, v_{98}\}$

tale che  $d(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$  ?

Se si rappresentarlo, se no dare motivazioni teoriche

4) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

(confrontandole con un controesempio oppure giustificandole applicando lo più teoremi):

a) i partecipanti a una riunione che stringono la mano a un numero dispari di partecipanti sono in numero pari

b) un grafo è连通的  $\Leftrightarrow$  esiste un vertice  $v$  raggiungibile con un cammino da ogni altro vertice

c) in un albero con  $n$  vertici  $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2n - 2.$$

5) Consideriamo un albero che ha 2 vertici di grado 2, 3 vertici di grado 3, 4 vertici di grado 4 e nessun vertice di grado maggiore. Quanti sono i suoi vertici di grado 1?

C'è un solo albero che ammette questa descrizione?

6) Provare che in un albero pienamente binario succede che il numero delle foglie è uguale al numero di vertici interni PIÙ 1.

7) Sia  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $E = \{ab, ad, ac, af, bc, de, df\}$ .

- Disegnare il grafo

- Determinarne la matrice di adiacenza

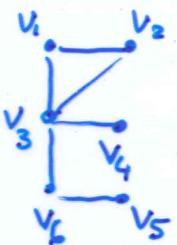
- Determinare un albero contenuto nel grafo e contenente tutti i suoi vertici

1 D)

$$\begin{pmatrix} 011000 \\ 101000 \\ 110101 \\ 001000 \\ 000001 \\ 001010 \end{pmatrix}$$

grafo semplice ( $a_{ii}=0$  triv.  $a_{ij} \leq 1$  se  $i \neq j$ ) 133 bis

non regolare  $d(v_1)=2 \neq d(v_4)=1$



connesso, non euleriano poiché  $d(v_4)=1$  dispari

3) Non esiste un grafo di ordine 98 con le caratteristiche precise poiché se 49 vertici hanno grado 1 e 49 hanno grado 2 la somma dei gradi è dispari (contro il teor. che dice che deve essere 2 volte la grandezza del grafo)

4) a) conseguenza del teor.  $\sum d(v_i) = 2|E|$  (Sì)

b) verificare transitività nell'equivalenza per connessione ( $\Leftarrow$  Sì); il verso  $\Rightarrow$  è nella def.!

c) sì perché un albero con  $n$  vertici ha  $n-1$  lati

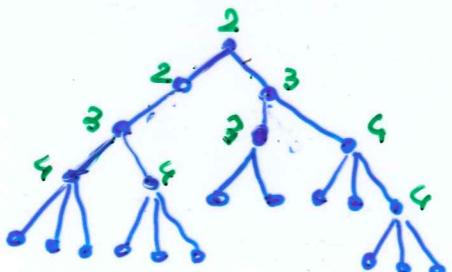
5)  $(V, E)$  albero      2 vertici       $d=2$   
                           3 "               $d=3$        $\Rightarrow$  vertici di grado 1  
                           4 "               $d=4$       punti 9  
 nessuno      con  $d > 4$

$|V|=n \Rightarrow$  hanno grado 1 :  $n-(2+3+4)=n-9$

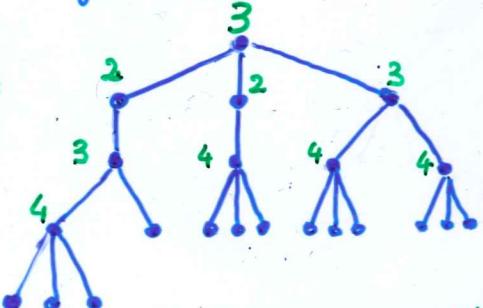
$$(n-9) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 2(n-1)$$

$$n+20 = 2n-2 \Rightarrow n=22$$

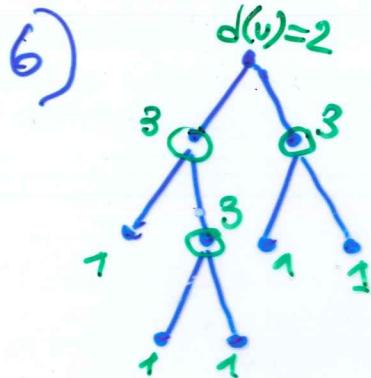
$\Rightarrow$  esistono  $22-9=13$  vertici di grado 1



MA VA BENE ANCHE



Le 2 grafi sono diversi perché nel 2° c'è un lato con un vertice di ordine 2 e uno di ordine 4, nell'altro no.



Esempio di  
albero compi-  
mente binario

Sia  $n$  l'ordine dell'albero:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2(n-1)$$

133 bis  
134

Sia  $t$  il numero di vertici interni  
inclusa la radice. Il grado della  
radice è 2 quello degli altri nodi  
interni è 3; quello delle  $k=n-t$  foglie  
è 1

Quindi:  $2 + 3(t-1) + k = 2(t+k-1)$   
cioè  $t+1=k$

che si legge: il numero delle foglie supera  
di 1 il numero dei vertici  
interni

8)



Sono uguali perché hanno:  
ugual numero di vertici  
" " " lati  
" " ordine per ogni vertice

e si può ottenere un disegno  
dall'altro etichettando  
opportunamente i vertici.

Gli altri 2 sono  $\neq$  perché anche se hanno:

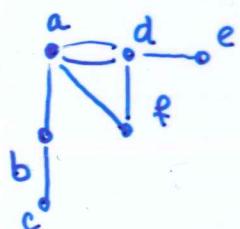
ugual numero di vertici (8)

" " " lati (11)

non hanno tutti i vertici di = ordine (ad es.

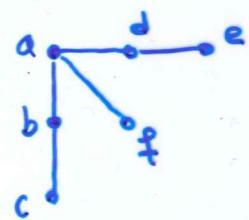
nel primo ce n'è uno di ordine 6, nel secondo nessuno)

7)

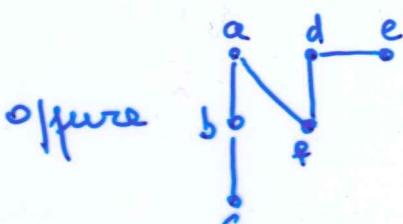


con i vertici  
nell'ordine  
 $a, b, c, d, e, f$   
matr. di adiacenza:

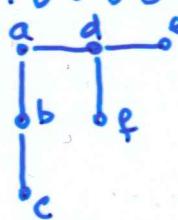
0	1	0	2	0	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0



oppure

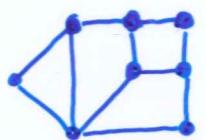
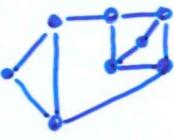


oppure



sono alberi contenuti nel grafo e contenenti  
tutti i vertici.

8) i due disegni  e  rappresentano lo stesso grafo?

E  e  ?

Quali caratteristiche possiamo controllare per mostrare che due grafi sono diversi? e che cosa è necessario per garantire l'uguaglianza?

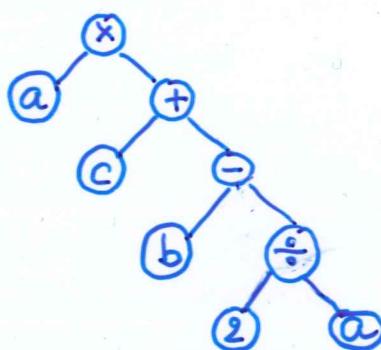
9) Rappresentare con alberi sintattici le due espressioni:

A)  $a + b \times \sqrt{b \times c}$

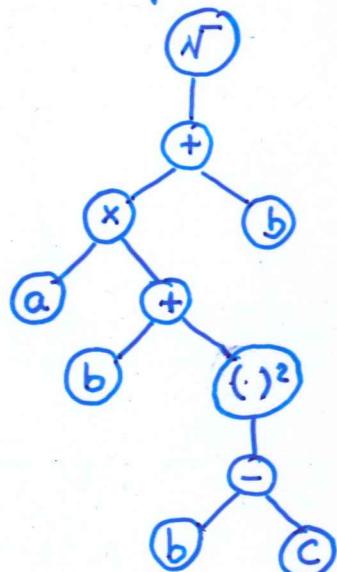
B)  $(a \times c + (b - a)) + \frac{b}{c}$

10) Ricavare dagli alberi sintattici le espressioni:

A)



B)



11) Le seguenti matrici rappresentano alberi?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dare motivazioni che non passino attraverso il "disegno" del grafo.

# Queriti sulle relazioni

(135)

1. Dire se  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  è la matrice di incidenza di una relazione d'ordine su 5 elementi  $\{a, b, c, d, e\}$

Nel caso, determinare il diagramma di Hasse di tale relaz.

$\text{lub } \{a, b, d\}$ ,  $\text{Sup } \{a, b\}$  se esistono ;  $\text{Max}$ , elementi minimi.

2. Sia  $X = \{a, b, c, d\}$  e sia  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \square & \square \\ \square & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \square & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{pmatrix}$  una matrice booleana. È possibile completare  $M$  in modo che sia la matrice di incidenza di una relazione   
 A) d'ordine?   
 B) di equival?

Notivare.

3. Sia  $X = \{2, 4, 5, 20, 100\} \subset \mathbb{Z}$  e sia  $R$  la relazione   
 $R = \{(m, n) \in X \times X \mid m \mid n\}$

Judicare le coppie di  $R$ ; tracciare il diagramma di Hasse  
 Stabilire se esiste  $\text{Max } X$  e  $\text{min } X$ .

4. Considerare l'applicazione  $f: Q \times Q \rightarrow Q \times Q$  definita da  
 $f(x, y) = (xy, x)$

Dire se  $f$  è iniettiva  
 suriettiva

$$f^T(0, 0) = \dots$$

$$f^T(0, 1) = \dots$$

$$f(0, 8) = \dots$$

5. Sia  $X = Q$  e sia  $R = \{(a, b) \in X^2 \mid \exists m \in \mathbb{Z} \text{ con } a = b + 2m\}$   
 $R$  è una relazione di equivalenza?

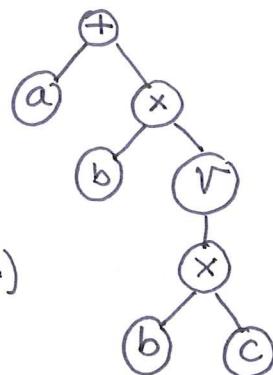
- Chi è  $R(\frac{1}{2})$ ?

- chi è  $\frac{X}{R}$ ? qual è il suo ordine? Suoi rappresentanti?

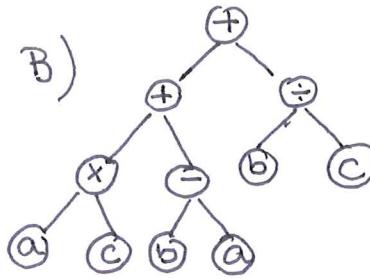
# Soluzioni dei quesiti a pag 134

(135  
bis.)

9)



A)



10)  $a \cdot (c + (b - \frac{2}{a}))$  è l'espressione A

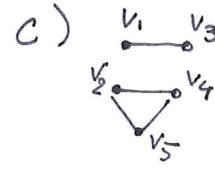
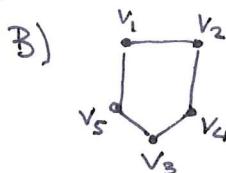
$$\sqrt{a(b + (b - c)^2)} + b \quad " \quad B$$

11) La matrice A non è la matrice di adiacenza di un albero poiché il grafo contiene un ceppo  $(v_1 v_1)$  e un lato doppio  $(v_4 v_5)$  ... ed è scorrevole poiché ha un punto isolato (tipo di zero). La matrice B non è la matrice di adiacenza di un albero poiché il grafo in oggetto ha 5 vertici (ordine della matrice) e 5 leti (somma degli elementi sull'triangolo superiore di B). La matrice C non è la matrice di un albero anche se  $|V|=|E|+1$  poiché il grafo non è connesso:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$I + C + C^2 + C^3 + C^4$  ha certamente zeri in tutte le posizioni diagonali (e anche in altre).

In effetti i 3 grafi hanno questi disegni

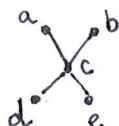


# Soluzioni dei quesiti a pag 135.

1. M rappresenta una relazione riflessiva (ha ogni elem. di posto  $(i,i)$  di valore 1)  
 " antidiagonale " sopra la diagonale principale è tutto di zero !)  
 " transitiva poiché:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leq M \quad (\text{vale } \leq) \quad \text{ATTENZIONE: ricordare che la matrice di incidentanza è booleana } \Rightarrow 1+1=1 \}$$

Quindi è una rel. d'ordine. Se viene ordinatamente regolato chi è  $\leq$  tra gli elementi delle 5-ja ordinata  $(a,b,c,d,e)$ , il diagramma di Hasse è poiché  $a \leq a$ ,  $b \leq b$ ,  $c \leq a$ ,  $c \leq b$ ,  $c \leq c$ ,  $d \leq a$ ,  $d \leq b$ ,  $d \leq c$ ,  $d \leq d$ ,  $e \leq a$ ,  $e \leq b$ ,  $e \leq c$ ,  $e \leq e$



Sup{a,b,d}=d, Sup{a,b} non esiste; Max, min non esistono. Massimali: a,b; minimali: d, e

2. In entrambi i casi la matrice (dovendo rappresentare una rel. riflessiva) deve avere sulla diagonale tutti 1:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \text{ Poiché non è simmetrica } (a_{23}=1 \neq a_{32}=0) \text{ non sarà in nessun caso la matrice di equivalenza di una rel. di equivalenza.}$$

Ci sono 4 matrici che rispettano l'antisimmetria e hanno una forma come quelle indicata ( $a_{11}=0$  per forza essendo  $a_{12}=1$ )

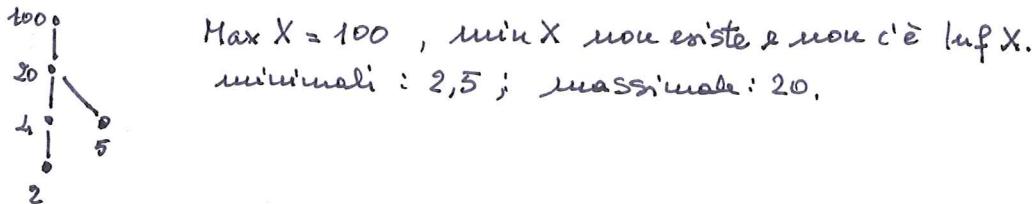
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bisogna capire se rispettano anche la transitività. Ora si mettici booleane.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a+2b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ comunque si scelgono } a, b \in \{0, 1\}$$

Dunque nessuna matrice delle forme  $M_i$  rappresenta una relazione d'ordine.

3.  $R = \{(2,4); (2,20); (2,100); (4,20); (4,100); (5,20); (5,100); (20,100)\}$



4.  $f(x,y) = (xy, x)$  con  $x, y \in \mathbb{Q}$

a) iniettiva?  $(x_1y_1, x_1) = (x_2y_2, x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1y_1 = x_2y_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1y_1 = x_1y_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \begin{cases} y_1 = y_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Non è iniettiva: se  $x=0$ ,  $\forall y$  si ha  $f(0,y) = (0,0)$

b) suriettiva?  $(xy, x) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = a \\ x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} by = a \\ x = b \end{cases} \begin{cases} \text{se } b \neq 0 : y = a/b \\ \text{se } b = 0, a \neq 0 \text{ esistono } \\ \text{se } b = 0 = a \text{ ogni } y \in \mathbb{Q} \text{ va bene.} \end{cases}$

Non è suriettiva poiché non esistono  $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  t.c.  $f(x,y) = (a,0)$  se  $a \neq 0$ .

c)  $f^{-1}(0,0) = \{(x,y) \mid (xy, x) = (0,0)\} = \{(0,y), y \in \mathbb{Q}\}$

d)  $f^{-1}(0,1) = \{(x,y) \mid (xy, x) = (0,1)\} = \{(0,1)\}$

e)  $f(0,8) = (0,0)$ .

5.  $R = \{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \mid \exists m \in \mathbb{Z} \text{ con } a = b + 2m\}$

a) RIFL.  $a = a + 2 \cdot 0$  : sì

b) SIMM.  $a = b + 2m \Rightarrow b = a - 2m, -m \in \mathbb{Z}$  : sì

c) TRANS.  $a = b + 2m, b = c + 2n, m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = c + 2(m+n), m+n \in \mathbb{Z}$  : sì

$\Rightarrow R \in$   
 REL. di  
 EQUIV.

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \{b = \frac{1}{2} + 2m \text{ con } m \in \mathbb{Z}\} = \{\dots -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \dots\}$$

$\mathbb{R}$  ha per elementi le classi di eq.  $R(a) = \{b = a + 2m, m \in \mathbb{Z}\}$  e i rappresentanti a di tali classi possono essere scelti tra tutti i numeri razionali a con  $0 \leq a < 2$  (infatti  $2 = 0 + 2 \cdot 1$ ). Quindi  $\mathbb{R}$  ha ordine infinito.

con tale scelta sono rappresentate tutte le classi  $R$  e  $\mathbb{R}$  è solo la sua