

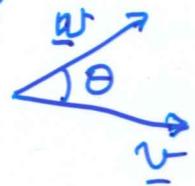
Che cosa ha a che vedere il prodotto scalare
definito dai fisici

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| |\underline{w}| \cos \widehat{v \underline{w}}$$

con il prodotto scalare

definito sulle treue $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)?$$



Ricordo che detti $\underline{e}_1 = (1, 0, 0) = \underline{i}$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0) = \underline{j}$,
 $\underline{e}_3 = (0, 0, 1) = \underline{k}$ i vettori delle base standard

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3$$

$$\underline{w} = w_1 \underline{e}_1 + w_2 \underline{e}_2 + w_3 \underline{e}_3$$

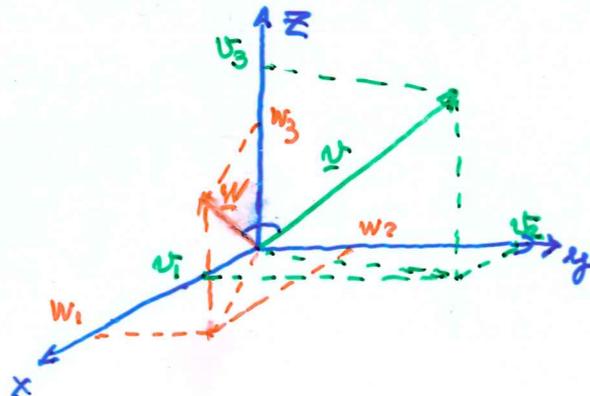
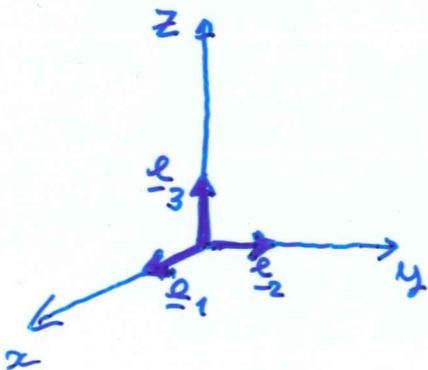
e che per il prodotto scalare valgono le
proprietà di multilinearità e omogeneità \Rightarrow

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \underline{w} &= v_1 w_1 \boxed{\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1} + v_1 w_2 \boxed{\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2} + v_1 w_3 \boxed{\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3} + \\ &+ v_2 w_1 \boxed{\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1} + v_2 w_2 \boxed{\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2} + v_2 w_3 \boxed{\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3} + \\ &+ v_3 w_1 \boxed{\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_1} + v_3 w_2 \boxed{\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_2} + v_3 w_3 \boxed{\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_3} \end{aligned}$$

$$\text{Ma } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = |\underline{e}_i| \cdot |\underline{e}_i| = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 \quad (i=1,2,3)$$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = |\underline{e}_i| \cdot |\underline{e}_j| = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (\text{se } i \neq j)$$

poiché i 3 vettori fondamentali $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ hanno
la direzione e il verso dei 3 assi coordinati x, y, z ,



Controes. 1 Verifichiamo che in $M_2(\mathbb{R})$ il prodotto righe per colonne non è commutativo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La cosa si estende alle matrici quadrate di ordine n considerando

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \end{array} \right) \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \right\} 2 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix}} \right\} n-2 \end{matrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Considero l'insieme S_3 delle permutazioni su 3 oggetti $\{1, 2, 3\}$. Determinare per ogni permutazione la sua inversa.

$$S_3 = \{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \}$$

NOTAZIONE	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
GEOMETRICAMENTE					

(i triangoli "sono" equilateri!)

Allora

$$id^{-1} = id$$

$$(123)(132) = (132)(123) = id$$

$$(12)(12) = id$$

$$(23)(23) = id$$

$$(13)(13) = id$$

Esempio di mento e zero nell'insieme delle parti di un insieme S in cui l'operazione binaria in azione sia l'unione: $(\mathcal{P}(S), \cup)$ (143 bits)

qual è il mento? Cerco un insieme B t.c.

$$\forall A \in \mathcal{P}(S) \text{ sia } A \cup B = A$$



$$\forall A \in \mathcal{P}(S) \text{ sia } B \subseteq A \Leftrightarrow \boxed{B = \emptyset}$$

qual è lo zero? Cerco un insieme C t.c.

$$\forall A \in \mathcal{P}(S) \text{ sia } A \cup C = C$$



$$\forall A \in \mathcal{P}(S) \text{ sia } A \subseteq C \Leftrightarrow \boxed{C = S}$$

Se invece considero come operazione l'intersezione i ruoli si ribaltano! Farlo per esercizio.

(147 bits)

Come calcolo l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Cerco $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 2d = 1 \\ 2c = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow a=1 \\ \leftarrow b=-1 \\ \leftarrow d=1/2 \\ \leftarrow c=0 \end{matrix}$$

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ è inversa destra di A : ma si verifica subito che è anche inversa sinistra.

Similmente si verifica che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (in questo caso, essendo la matrice diagonale è abbastanza chiaro che l'inversa debba essere diagonale e fatta così!)