

2. SISTEMI LINEARI

AL 12

Abbiamo già discusso - prima di introdurre le equazioni diofantee - che cosa sia un'equazione e i problemi ad essa corrispondenti (sostanzialmente: RISOLUBILITÀ, NUMEROSITÀ delle soluzioni, RICERCA delle SOLUZIONI).

Quando siamo interessati alle soluzioni comuni a due o più equazioni "mettiamo a sistema le equazioni".

Ad es. se siamo interessati alle soluzioni comuni alle due equazioni

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{e} \quad 3x - 6 = 0$$

Scriviamo

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases}$$

Ciò dice che devo risolvere

- la prima è, dato che $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, trovo:

$$S_1 = \{2, -3\}$$

- la seconda è trovo $S_2 = \{\frac{6}{3}\} = \{2\}$

e poi intersecare $S_1 \cap S_2 = \{2\}$

La Sol. del "sistema" in questo caso è unica e uguale a 2. **E' inessenziale in che ordine risolvo le due equazioni!**

Viceversa ogni volta che scriviamo il simbolo di sistema: $\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$ intendiamo che stiamo cercando l'insieme di tutte le soluzioni comuni alle equazioni messe a sistema,

cioè fare l'intersezione degli insiemi di sol.

Il simbolo $\{ \dots \}$ non dice essere (AL 13)

usato per altri scopi. In particolare non deve essere usato per rappresentare l'insieme delle soluzioni di un'equazione:

ad es. $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$ NON!

perché non vogliamo trovare l'intersezione dei due insiemi $\{2\}$ e $\{-3\}$ ma semplicemente l'unione!

Un sistema di equazioni può essere non risolvibile per due motivi:

- una (o più) equazioni sono impossibili
- una (o più) equazioni sono incompatibili con le altre, cioè l'intersezione delle soluzioni delle equazioni è l'insieme vuoto.

Ad. es. $\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x - 6 = 0 \end{cases}$ è impossibile poiché $S_1 \cap S_2 = \{2, -3\} \cap \{6\} = \emptyset$

ATTENZIONE. Risolvibile, per i sistemi come per le equazioni, non significa che ci sia una sola soluzione o che ce ne sia un numero finito. Significa che "l'insieme delle soluzioni non è vuoto" cioè che tale insieme contiene ALMENO UNA soluzione.

Ad es. A) $\begin{cases} y = \sin x \\ y = 1 \end{cases}$ ha infinite soluzioni discrete:
 $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B) $\begin{cases} x(y-1) = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ha per soluzioni tutte le coppie reali ordinate del tipo $(x, 1)$: $S = \mathbb{R} \times \{1\}$.

Siamo qui interessati a sistemi di equazioni lineari. Ciò significa due cose (AL14)

- a) ogni equazione del sistema è algebrica cioè del tipo "polinomio in 1 o più indeterminate" uguagliato a zero.

Quindi il sistema del precedente es. A non va bene.

- b) ogni polinomio in esame è di 1° grado, quindi il sistema del precedente es. B non va bene perché nono risolverlo

$$\begin{cases} xy - x = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \quad e$$

- nella 2^a eq. c'è un polinomio di 1° grado (sicuramente nell'indeterminata y ma nulla vieta di pensarlo come $0 \cdot x + y - 1$) e quindi aggiungere l'indeterminata x) uguagliato a zero; OK
- la 1^a eq. nasce dall'aver uguagliato a zero un polinomio in x, y che è di 2° grado poiché contiene il termine xy la somma dei cui gradi è $1+1=2$.

L'equazione è algebrica ma non lineare!

⇒ il sistema non è un sistema di eq. lineari.

Per brevità, invece di sistema di equazioni lineari, si dice

SISTEMA LINEARE.

Se ha m equazioni e n incognite viene rappresentato così:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

o a qualunque
altro CSMPO

- x_1, x_2, \dots, x_n : incognite
 - b_1, b_2, \dots, b_m : termini noti ($\in \mathbb{R}$)
 - $a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{mn}$ coefficients ($\in \mathbb{R}$)
- del sistema.

Vorremmo individuare un metodo che permette di rispondere in una volta sola a tutte le 3 domande:

- 1) ha soluzione?
- 2) come determino tutte le soluzioni?
- 3) "quante" sono le soluzioni?

L'idea è di trasformare il sistema in uno equivalente (cioè che abbia esattamente lo stesso insieme di soluzioni) per il quale la risposta sia praticamente immediata (almeno per le domande (1) e (3)).

Esempi di sistemi facili da "risolvere":

1. $\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 3 \\ 2y - z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right.$: conosco z , quindi sostituisco z in tutte le equazioni \Rightarrow trovo $y \Rightarrow$ trovo x

$$\left\{ \begin{array}{l} z=1 \\ 2y-1=0 \\ x-y+1=3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ x-\frac{1}{2}=2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ x=\frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Il sistema ha 1 e 1 sola soluzione $(x, y, z) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

2. $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ y + z = 3 \end{cases}$ perco z come un parametro (AL16)

$$\begin{cases} y = 3 - z \\ 2x - (3 - z) + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - z \\ 2x + 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} y = 3 - z \\ x = 4 - z \end{cases}$: ho ∞^1 soluzioni. Se $z = k \in \mathbb{R}$,
hanno la forma $(x, y, z) = (4 - k, 3 - k, k)$

3. $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$ conosco z; lo sostituisco nelle
1^a equazione e tratto y
come un parametro

$$\begin{cases} z = 3 \\ x = 8 - 2y \end{cases} : \text{ho } \infty^1 \text{ soluzioni delle forme} \\ (x, y, z) = (8 - 2k, k, 3), k \in \mathbb{R}$$

4. $\begin{cases} x - 4 + 6z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la 2^a equazione è una
identità: tratto y e z
come parametri e trovo
 ∞^2 soluzioni delle forme $(x, y, z) = (1 + h - 6k, h, k)$
con $h, k \in \mathbb{R}$.

5. $\begin{cases} x + 3y - 5z = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$ la 2^a equazione è
impossibile \Rightarrow
 \Rightarrow il sistema è impossibile.

In tutti questi esempi si è sfruttato il fatto che l'ultima equazione contiene meno incognite delle precedenti per partire di lì e procedere via via per sostituzione nelle altre, in modo molto sistematico,

L'idea è di ricordarsi a sistemi con queste tipologie (anche se con numero diverso di eq. e incognite), anche in questo caso con operazioni sistematiche.

Metodo di eliminazione di Gauss

E' un algoritmo (e quindi dopo un numero finito di passi si arresta) per trasformare il sistema dato in uno equivalente "facile".

Operazioni lecite:

- 1) scambiare di posto due equazioni (*e l'interazione di insieme è commutativa*)
- 2) moltiplicare i 2 membri di un'eq. per una stessa costante $k \neq 0$ (*poiché $a=b \Leftrightarrow b=k \neq 0, ak=bk \dots$ almeno negli insiemi numerici fin qui noti*)
- 3) sostituire una equazione con quella ottenuta sommando a tale equazione un'altra del sistema (*poiché se $a=b$, allora $c=d \Leftrightarrow a+c=b+d$*)

Queste sono operazioni lecite per riportare qualunque tipo di sistema. Per creare l'algoritmo, in primo luogo osserviamo che il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

si può reiscrivere (*vedi prodotto di matrici*)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

in breve: $AX=B$, cioè:

(I) al sistema è associata una matrice $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : \text{matrice dei coefficienti}$$

e una matrice colonna $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} : \text{colonna dei termini noti}$

II il ruolo delle incognite (la matrice colonna) AL18
x) è solo quello di "seguaposto", di fatto irrelevanti per la determinazione delle soluzioni e quindi possono essere "cancellate" dopo aver costruito la matrice in modo che i "posti" siano rispettati di riga su riga (verranno poi recuperate a fine procedura);

III tutte le operazioni licite sul sistema sono operazioni nelle righe della cosiddetta matrice completa del sistema:

$$A' = (A | B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

- 1) scambiare 2 righe,
- 2) moltiplicare una riga per $k \neq 0$,
- 3) sommare una riga ad un'altra;

IV un sistema si dice "facile" quando la matrice ha forma "A GRADINI" cioè per ogni riga il primo elemento $\neq 0$ sta su una colonna di almeno una posizione più a destra rispetto a quelle delle righe precedenti col eventuali righe di zeri sono tutte "in fondo" alla matrice: quindi opereremo in modo da ricongdurci a tali matrici.

Notiamo per finire che ciò corrisponde a cercare di "eliminare" via via una incognita, a partire dalla seconda equazione per ricongdurci a una eq. "ultima del sistema" che contiene il minor numero possibile di incognite.

Esempio 1

(AL 19)

$$\begin{cases} x+y = -2 \\ x+3y+z = 2 \\ 3x+7y-z = 5 \end{cases}$$

Le incognite sono coordinate
 x, y, z
 Il coeff. di z nella 1^ eq. è 0

Matrice completa del sistema

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

In posizione (1,1) c'è un numero diverso da zero (-1)
 Posso usarlo come pivot

L'idea è di annullare gli elem. di posto (1,2) (1,3) sottraendo un opportuno multiplo della 1^ riga R_1 alle altre due righe (combinazione delle operazioni 2) e 3):

$$A' \xrightarrow[\substack{R_3 - 3R_1 \\ R_2 - R_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3-1 & 1 & 2-(-2) \\ 0 & 7-3 & -1 & 5-3(-2) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \end{array} \right)$$

Nella nuova matrice l'elemento di posto (2,2) è $\neq 0$: lo uso come pivot e annullo l'elemento di posto (3,2) sottraendo alla terza riga un opportuno multiplo della seconda:

$$\xrightarrow[R_3 - 2R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \quad \text{matrice a gradini'}$$

Ora posso risolvere:

$$\begin{cases} -3z = 3 \\ 2y + z = 4 \\ x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ 2y = 5 \\ x = -2 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Soluzione: $(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, -1)$.

In questo caso ce n'è una sola.

VERSIONI ALTERNATIVE

(AL20)

- avrei potuto riportare ogni pivot a valere 1, moltiplicando al peso i le righe R_i per il reciproco dell'elemento in posizione (i,i) . Ad es.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 11 \end{array} \right)$$

ma in questa fase non c'è un vantaggio effettivo in questo passaggio (che deve comunque essere fatto quando si riceva la soluzione)

- avrei potuto completare la procedura RISALENDÒ e, in questo caso sì, moltiplicando le righe in modo che gli elem. sulla diagonale diventino tutti 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

: a questo punto il sistema si trasforma in $\begin{cases} x = -\frac{9}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 1 \end{cases}$... cioè abbiamo la soluzione

Problemi:

- Che cosa dovrei fare se in posizione $(1,1)$ (o in una delle altre che uso come pivot in seguito) ci fosse 0.
- Che cosa fare se la prima colonna è tutta di zeri,

Esempio 2

$$\begin{cases} y+z=1 \\ x+3y+z=2 \\ 3x+z=0 \end{cases}$$

Se considero la matrice associata a questo sistema ho 0 in posizione (1,1). Ma ho 1 in posizione (2,1): quindi basta scambiare le equazioni nel sistema o SCAMBIARE direttamente le RIGHE nella matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{scambio } R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + 9R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{array} \right)$$

ecc.

proseguo col metodo di Gauss-Jordan

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 - \frac{3}{7} - \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 \end{array} \right)$$

Sol: $(x, y, z) = (-\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7})$. FARE LA VERIFICA!

ATTENZIONE: dire che la prima colonna della A' è tutta di zeri significa che nel sistema manca la variabile x_1 . Se il problema prevede la presenza di una variabile x_1 , questa potrà assumere qualunque valore mentre le altre saranno vincolate dal sistema.

Ad es. se il problema riguarda le variabili x, y, z

e il sistema è $\begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$

dovrei prevedere una matrice dei coefficienti di tipo (3×3) con la prima colonna di zeri. Ma basta invece lavorare su

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \therefore \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \\ x \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

infinte soluzioni $(k, 0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

Esempio 3 (un sistema 3×3 può ammettere ∞ soluzioni o non ammetterne alcuna!) (AL 22)

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x + z = 2 \\ 3x+2y+z = k \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$ (parametro, NON INCognita)

Matrice associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & k \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-3R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & k-3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-4 \end{array} \right)$$

L'ultima equazione nel sistema equivalente trovato

è $0x + 0y + 0z = k-4$

Uguaglianza che non dipende da x, y, z !

0 = k - 4

è vera se nel sistema scrivo $k=4$

è falsa se nel sistema scrivo un qualsiasi numero diverso da 4, ad es. $k=1$

Se $k = 4$

si prosegue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1-y \\ z = 1+y \\ 0 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{parametro}$$

il sistema ha le ∞^1 soluzioni:

$$(x, y, z) = (1-t, t, 1+t) \quad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}.$$

(∞^1 poiché dipendono da **1** parametro t).

Se $k \neq 4$ (ad es. $k=1$)

abbiamo trovato una conseguenza delle tre equazioni iniziali che è una uguaglianza falsa e quindi le tre equazioni iniziali sono incompatibili tra loro:

nessuna soluzione (o SISTEMA IMPOSSIBILE)

Esempio 4 (scelta del pivot)

Consideriamo il seguente sistema di 4 equazioni in 3 incognite:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ 3x + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2y + z = -3 \end{array} \right.$$

Dal punto di vista di un computer la scelta del pivot è legata ad avere un coefficiente che sia "abbastanza" diverso da zero (e l'abbastanza dipende dalla sua aritmetica interna). Dal punto di vista "umano" è significativo scegliere un pivot = 1 (se possibile) che facilita i prodotti successivi.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{sceglie } R_1, R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 2R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{sceglie } R_2, R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3 - 3R_2 \\ R_4 - 2R_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

L'ultima equazione è conseguenza delle prime 3 (riga di zeri) \Rightarrow sistema risolubile e soluzione unica;

sol. :

$$\begin{cases} z = -11/5 \\ y = 4 + 2z = -2/5 \\ x = y - z = 9/5 \end{cases} \quad (x, y, z) = (9/5, -2/5, -11/5)$$

Se uno dei termini noti fosse stato diverso (ad es. +3 invece di -3) il sistema sarebbe stato impossibile.

RIFARE I CONTI CON QUESTA VARIANTE.

(AL 24)

Esempio 5 - VARIANTE 1

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ x + 2y + 4z + 4w = 5 \\ y + 2z + w = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{scambio} \\ R_2, R_3}} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ y + 2z + w = 3 \\ z = 3 - 2w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 2y - 3z - 2w = 2 + 6 - 6t - 9 + 6t - 2t = -1 - 2t \\ y = 3 - w - 2z = 3 - t - 6 + 4t = -3 + 3t \\ z = 3 - 2t \\ w = t \end{cases}$$

$$\text{Sol. } (x, y, z, w) = (-1 - 2t, -3 + 3t, 3 - 2t, t)$$

al variare di t in \mathbb{R}

Sono ∞^1

Esempio 5 - VARIANTE 2

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ x + 2y + 4z + 4w = 5 \\ 2z + w = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ z + 2w = 3 \\ -3w = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ z + 2w = 3 \\ -3w = -3 \\ w = 1 \end{cases}$$

$$\text{cioè} \quad \begin{cases} z = -3 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \\ w = 1 \end{cases}$$

Sol.

$$(x, y, z, w) = (-3 - 2t, t, 1, 1)$$

Sono ∞^1 al variare
di t in \mathbb{R}

Esempio 5 - VARIANTE 3

(AL25)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ x + 2y + 4z + 4w = 5 \\ z + 2w = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{cioè l'ultima equazione "deriva" dalle altre due, è inutile! Il sistema equivale a}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ z + 2w = 3 \\ (0=0) \text{ buttare!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y - 3z - 2w = 2 - 2y - 9 + 6w - 2w \\ z = 3 - 2w \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow servono 2 parametri: $y=s, w=t \Rightarrow$ Sol.: $(x,y,z,w) = (-7 - 2s + 4t, s, 3 - 2t, t)$
al variare di $s, t \in \mathbb{R}$: $\boxed{\text{Soluz } \infty^2}$

Esempio 5 - VARIANTE 4

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 2 \\ x + 2y + 4z + 2w = 5 \\ z + 2w = 2 \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono uguali a quelle della variante 3 quindi si arriva a:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \leftarrow \begin{matrix} \text{Eq impossibile} \\ \text{sistema impossibile} \end{matrix}$$

È possibile inventare una variante del sistema con le stesse due prime equazioni

- che abbia 1 e 1 sola soluzione?
- che abbia ∞^3 soluzioni?

Esercizi

Numerosi sul sito <http://ariel.ctu.unimi.it>

MATEMATICA ASSISTITA

1) Risolvere $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

usando il metodo di eliminazione di Gauss e verificare che le operazioni fatte a ogni passaggio corrispondono nel sistema a

- ricavare x nella I eq. e sostituire nelle altre
- ricavare y nella II eq. e sostituire nella III

Cioè il metodo di eliminazione è una buona organizzazione del metodo di sostituzione (mi permette di essere certo, alla fine, di aver tratto tutte le conclusioni presenti nel sistema iniziale).

2) Discutere la risolubilità del sistema lineare

$$\begin{cases} y + 2z = k \\ 2x + 3y + 6z = 0 \\ 4x + 7y + 14z = 5 \end{cases}$$

in dipendenza dal parametro reale k e, quando è risolubile determinarne le soluzioni.

3) Riprendere l'esempio 4 pag AL 23.

Mostrare che

$$R_4 = -R_1 + R_2 - R_3$$

ove R_i è la riga i -esima della matrice completa del sistema dato.

Si può fare una banale verifica oppure leggere passaggio per passaggio come si trasformano le righe.