

Riassunto e approfondimento sul metodo di eliminazione di GAUSS.

(AL27)

Dato un sistema lineare di  $m$  eq. in  $n$  incognite

- 1) ordino in tutte le equazioni le incognite nello stesso modo, in modo da avere un sistema nel formato a pag AL15;
- 2) associo al sistema la sua matrice completa, di tipo  $(m, n+1)$ . Se il sistema è

$$AX = B \quad (\text{pag AL17-18})$$

la matrice completa è  $A' = (A | B)$ ;

- 3) mi accerto che  $a_{11} \neq 0$ : in caso contrario scambio  $R_1$  (riga 1) con la prima riga  $R_i$  che ha  $a_{i1} \neq 0$  (... con aggiustamenti ragionevoli legati al fatto che preferirei che in (1,1) ci fosse il coefficiente 1);
- 4) a ciascuna riga  $R_i$  con  $i \geq 2$  (event. nella matrice in cui ho scambiato le righe) sostituisco

$$R_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} R_1 : \quad$$

in questo modo ottengo una matrice con le entrate di posto  $(i, 1)$  tutte  $= 0$ ,  $\forall i \geq 2$ ;

- 5) in questo modo della 2<sup>a</sup> riga in poi ho un sistema nelle ultime  $n-1$  incognite: riparto da questo operando nello stesso modo finché o vale (\*) -vedi pag AL28- o ho esplorato tutti gli elementi di posto  $(\ell, i)$  (la procedura si arresta dopo al più  $2 \min(m, n)$  volte);

- 6) Se una riga diventa  $(0 \dots 0 | 0)$   
 posso spostarla in fondo al sistema e trascurarla,  
 nel senso che l'equazione da cui proviene nel  
 sistema dato è una conseguenza delle altre e  
 quindi non dà informazioni;
- 7) se una riga diventa  $(0 \dots 0 | b)$  con  $b \neq 0$   
 significa che la corrispondente equazione  
 nel sistema originario era INCOMPATIBILE  
 con le altre  $\Rightarrow$  sistema impossibile  
 MI FERMO;
- 8) se invece il sistema è risolubile parto  
 dall'ultima riga non nulla e ricavo  
 "a risalire" il valore delle incognite,  
 eventualmente dipendenti da 1 o più  
 parametri, caso che si presenta quando  
 nell'ultima riga <sup>R<sub>i</sub></sup> non nulla l'elemento  
 di posto  $(i,i)$  non è l' $n$ -esimo.

Ciò dice tra l'altro che se  $m < n$  e il sistema  
 è risolubile certamente le soluzioni dipende-  
 ranno da almeno  $n - m$  parametri.

(verificarlo sugli esempi precedenti)

I parametri possono essere di più se nella  
 matrice trasformata ci sono delle righe di zeri:  
 ricordarsi che questo significa che quell'eq.  
 può essere trascurata e quindi per ogni riga  
 di zeri è come se il sistema iniziale avesse  
 una equazione in meno.

## Esercizi con sistemi lineari dipendenti da parametro

(AL 23)

Con questa frase intendo dire che

nel sistema lineare, oltre alle lettere che denotano le incognite ( $x_1, y, z, w$  o più in generale  $x_1, \dots, x_n$ ) compare un'altra lettera (nel seguito  $k$ , ma non è obbligatorio) che può assumere un valore qualunque nel campo in cui sono stati presi coefficienti e termini noti del sistema, in particolare un valore che annulla certi coefficienti del sistema.

Quindi se per risolvere il sistema (o anche solo per discuterne la risolubilità) uso il metodo di eliminazione di Gauss e in una posizione  $(i,i)$  trovo un coefficiente dipendente da parametro conviene che mi comporti come se quel coefficiente fosse **ZERO** ( $\rightarrow$  scambio righe).

Se poi TUTTI i coefficienti in posizione  $(j,i)$  con  $j > i$  dipendono da parametro (rendendo inutile lo scambio di righe) posso:

- controllare se in una delle colonne da  $i+1$  a  $n$  e in una delle righe da  $i$  a  $m$  c'è un elemento che non dipende da parametro : se sì in posizione  $(h,h)$  scambio la colonna  $i$  con la colonna  $h$  (e ricordo che devo riLeggere le incognite :

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_h, x_{i+1}, \dots, x_{h-1}, x_i, x_h, x_{h+1}, \dots, x_n)$$

e la riga  $i$  con la riga  $h$  e proseguo

- in caso negativo devo distinguere (ed esaminare a parte) il caso in cui il coefficiente in posiz.  $(i,i)$  si annulla ; per gli altri si prosegue al solito.

### Esercizio 4

(AL 30)

Al variare del parametro reale  $k$ , discutere il sistema

$$\begin{cases} x-y = 2 \\ y+2z = k \\ 2x-y+kz = 6 \end{cases}$$

e, ove possibile, risolverlo.

Sol.  $(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 2 & -1 & k & 6 \end{array} \right)$  applico il metodo di eliminaz. di Gauss

$$(A|B) \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & k & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & k-2 & 2-k \end{array} \right)$$

Pivot finale:  $k-2$ . Separo il caso  $k=2$  dal caso  $k \neq 2$

$k=2$   $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

è risolubile ma diventa un sistema  $2 \times 3$ , le soluz. dipendono da 1 param. Sono  $\infty^1$

$$\begin{cases} z=t \\ y = 2 - 2z = 2 - 2t \\ x = 2 + y = 4 - 2t \end{cases}$$

Le sol. sono delle forme  $(x, y, z) = (4-2t, 2-2t, t)$  al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$ .

$k \neq 2$   $\xrightarrow{\frac{1}{k-2} R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$

$$\begin{cases} x = 2 + y = k + 4 \\ y = k + 2z = k + 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

C'è 1 e 1 sola soluz.:  $(x, y, z) = (k+4, k+2, -1)$

R è il numero che si mette al denominatore per rendere non nulla la soluz. non nulla.

Esercizio 2

(AL31)

Siano  $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Stabilire per quali valori di  $k$  il sistema  $A_k X = B$  (con  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ) ha una e una sola soluzione.
- b) Sia  $A = A_{-1}$  la matrice ottenuta ponendo  $k = -1$   
Risolvere il sistema  $AX = B$ .

Sol. Matrice completa:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -1 \cdot R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k+2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{non posso usare } k \text{ come pilott poiché può essere } = 0$$

$\xrightarrow{\text{scambio } R_2, R_3}$   $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & k+2 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -1 \cdot R_2 \\ R_3 + kR_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k(k-2) & 0 \end{array} \right) \quad k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$

$$= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & (k-1)^2 & 0 \end{array} \right)$$

Se  $(k-1)^2 = 0$ , cioè se  $k = 1$  il sistema ha un'ultima riga di zero, quindi è risolvibile ma la soluzione è certamente non unica:

$$\begin{cases} z = t \\ y = -z = -t \\ x = 1 - 2z = 1 - 2t \end{cases}$$

c'sono  $\infty$  soluzioni  $(x, y, z) = (1 - 2t, -t, t)$  al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$ .

Se  $k \neq 1$  divido l'ultima riga per  $(k-1)^2$  e ottengo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - 2R_3 \\ R_2 - (2-k)R_3 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{cioè esiste una e una}$$

sola soluzione:  $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ .

Quindi la risposta ad (a) è:  $\boxed{\text{per } k \neq 1}$   
la risposta a (b); visto che la sol. non dipende da  $k$ ,  
è:  $\boxed{(x, y, z) = (1, 0, 0)}$

### Esercizio 3

(AL 32)

Discutere e, quando possibile, risolvere il sistema

$$\begin{cases} kx - 2y = 1 \\ 2x - ky = 1+k \end{cases}$$

Sol.  $(A | b) = \left( \begin{array}{cc|c} k & -2 & 1 \\ 2 & -k & 1+k \end{array} \right)$

$k$  non può essere usato come pivot

scambio  
 $R_1, R_2$   $\rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2-k & 1+k & 1 \\ k & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - \frac{k}{2}R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -k & 1+k \\ 0 & -2 + \frac{k^2}{2} & 1 - \frac{k}{2} - \frac{k^2}{2} \end{array} \right)$

$\xrightarrow{2R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -k & 1+k \\ 0 & k^2-4 & -(k^2+k-2) \end{array} \right)$

1° caso

$$k^2 - 4 \neq 0$$

$\xrightarrow{\frac{R_2}{k^2-4}} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -k & 1+k \\ 0 & 1 & \frac{-(k-1)(k+2)}{(k-2)(k+2)} \end{array} \right)$

per ogni valore fisso di  $k \neq \pm 2$  c'è 1 e 1 sola soluzione  $(x, y) = \left( \frac{-2}{k-2}, \frac{1-k}{k-2} \right)$

$$\begin{cases} y = \frac{1-k}{k-2} \\ 2x = 1+k + k \cdot \frac{1-k}{k-2} = \frac{k^2-k-2-k^2+k}{k-2} \end{cases}$$

2° caso

$$k^2 - 4 = 0 \quad \text{cioè} \quad k = 2 \quad \text{o} \quad k = -2$$

$k = -2$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Il sistema è risolubile e le sue soluz. dipendono da 1 parametro poiché il sistema può essere ricondotto alla sola eq.

$$x + y = -\frac{1}{2}$$

che (preso  $y = t$  come parametro) ha le soluzioni  $(x, y) = (-\frac{1}{2} - t, t)$  al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$ .

$k = 2$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

eq. impossibile  
il sistema non ha soluzione.

## Algebra delle matrici quadrate di ordine n.

Consideriamo  $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ : abbiamo visto che in tale insieme sono definite

- ) un'operazione binaria interna detta SOMMA, con certe proprietà ... **GRUPPO ASSIOMA**
- ) un'operazione binaria mista detta "prodotto per scalare" con certe proprietà .... **? SPAZIO VETT?**
- ) un'operazione binaria, che PER LE MATRICI quadrate di ordine n è INTERNA, detta PRODOTTO RIGHE per COLONNE che è
  - associativa
  - dotata di elemento neutro a destra e a sinistra, che è la matrice  $I_n$ :

$$I_n A = A I_n = A \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Ora ci chiediamo se ci sono matrici  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  che siano invertibili rispetto a questo prodotto, cioè ci chiediamo:

(\*)

data  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  esiste  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tale che

$$AB = I_n = BA ?$$

Sappiamo che non è sempre vero: ad es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comunque si scelga la matrice B (il prodotto in posizione (2,2) ha 0 e non 1!)

Però per alcune matrici è vero: ad es.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chiamiamo INVERTIBILI le matrici per cui (\*) è vero

Prop. Se  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  ha inversa, tale inversa è UNICA. AL34

dim. Sia  $AB = I_n = BA$  e  $AC = I_n = CA$

Allora

$$C = C \cdot I_n \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{MATTR. ID.}}}{=} C \cdot (AB) = (CA) \cdot B \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{ASSOC.}}}{=} I_n \cdot B = B \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{MATTR. ID.}}}{=} B \quad \text{c.v.d.}$$

non solo:

Prop.  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  ha inversa SE E SOLO SE ha un'unica inversa destra cioè un'unica matrice  $X$  t.c.  $AX = I_n$

dim. Abbiamo appena visto che se  $A$  è invertibile l'inversa destra è unica.

Viceversa:

$$\begin{aligned} AX = I_n &\Rightarrow AX - I_n = 0 : \text{MATRICE di zero} \\ \Rightarrow (AX - I_n)A &= 0A = 0 \\ &\quad \text{|| distributiva} \\ AXA - I_n A &= AXA - A \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{MATTR.ID.} \end{aligned}$$

Dunque

$$A(X + XA - I_n) = \underbrace{AX}_{\substack{\text{1.} \\ \text{2.}}} + \underbrace{AXA - A}_{\substack{\text{1.} \\ \text{2.}}} = I_n + 0 = I_n$$

Per l'unicità dell'inversa destra

$$\begin{aligned} X + XA - I_n &= X \quad \Rightarrow XA - I_n = 0 \Rightarrow \\ XA &= I_n \end{aligned}$$

Cioè  $X$  è anche inversa sinistra.

c.v.d.

Ciò suggerisce che per stabilire se  $A$  ha inversa e calcolarla basta risolvere l'eq. MATRICIALE

$$AX = I_n.$$

Cio' significa risolvere un sistema di ... (A35)  
 $n^2$  equazioni in  $n^2$  incognite ... ma tutte con la stessa matrice dei coefficienti. Quindi è possibile utilizzare il metodo di GAUSS-JORDAN risolvendo contemporaneamente n sistemi.

ESEMPIO.

Cercare l'inversa di  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

Dero risolvere  $A \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  cioè i 2 sistemi di 2 equazioni in 2 incognite

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Metodo di GAUSS:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 - \frac{5}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_2 - \frac{5}{3}R_1]{} \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[3R_2]{\quad} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[3R_2]{\quad} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ho trovato 1 sola matrice} \\ \text{sola.} \Rightarrow \text{poiché l'inv. destra è} \\ \text{unica}$$

$$\text{Tufatti } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 0 \\ 0 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{la matrice} \\ \text{dei coefficienti} \\ \text{è e } A^{-1} = X.$$

Ma invece di fare i conti separatamente sui due sistemi avrei potuto fare:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{3}R_1]{R_2 - \frac{5}{3}R_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1/3 & -5/3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[3R_2]{\quad} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array} \right)$$

Mi fermo quando a sinistra compare la matrice identica. A destra a quel punto ho l'inversa di  $A$  (che denoterò con  $A^{-1}$ ).

Esercizio 1. Determinare se esiste l'inversa della matrice

(A36)

matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 17 \end{pmatrix}$$

Cerco l'inversa destra  $X$  :  $AX = I$ .

Se la soluz che trovo è unica  $X$  sarà la matrice inv. di  $A$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_1, R_2 \\ \text{scegl bio}}]{} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 - R_2]{\quad} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\frac{R_3}{3}]{} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{R_1 - 6R_3 \\ R_2 - 2R_3}]{} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_1 - 3R_2]{\quad} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2} R_1]{\quad} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$X$

Verificare che  $AX = I$  {per compito!}  
e che  $X A = I$

Esercizio 2. Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha inversa destra. Per compito!

Qualche altro problema cui si può rispondere con i sistemi lineari:

- 1) Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  trovare tutte le matrici  $X$  tali che

$$AX = XA$$

Svolg. Sia  $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ . Allora

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Sono uguali se e solo se

$$\begin{cases} y=0 \\ w=z \\ y=0 \end{cases}$$

2 equazioni  
in 4 incognite  
 $z=k$   $k \in \mathbb{R}$   
 $w=k$

Soluz:  $X = \begin{pmatrix} k & h \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Rifare l'esercizio con altre matrici  $A$  numeriche. Poi passare all'esercizio

- 2) Sia  $S_a = \left\{ D \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Trovare tutte le matrici  $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$  tali che  $DX = XD \quad \forall D \in S_a$ .

Svolg.  $DX = \begin{pmatrix} ax & az \\ by & bw \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ax = ax \\ az = bz \\ by = by \\ bw = bw \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)z = 0 \\ (a-b)y = 0 \end{cases} \quad \text{e } a-b \text{ è in generale } \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ pp4e} \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w \text{ pp4e} \end{cases}$$

Sol:  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ : cioè le sole matrici  $2 \times 2$  permutabili con tutte le matrici diagonali sono le matrici diagonali.

- 3) Determinare l'insieme delle matrici  $X$  che commutano con ogni matrice  
 $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$  con  $a, b, c$  variabili in  $\mathbb{R}$

Sol. tra queste matrici ci sono le matrici diagonali del precedente esercizio; quindi, perché  $TX = XT$  la matrice  $X$  deve essere diagonale. NON SOLO: tra le matrici  $T$  c'è anche  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  per cui ho visto che

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  gli elementi sulla diagonale devono essere uguali.

Quindi deve essere  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI$ .

La matrice ora trovata commuta con ogni matrice  $T$  perché

$$(•) TX = T(xI) = xT = x(I)T = (xI)T = XT$$

e quindi siamo a posto,

ATTENZIONE: l'uguaglianza (•) vale anche se  $T$  è una matrice generica. Quindi l'insieme delle matrici che commutano con ogni matrice  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  è costituito dalle matrici del tipo  $xI$ , al variare di  $x$  in  $\mathbb{R}$ .

- 4) Le considerazioni precedenti possono essere estese a matrici  $n \times n$   
 Provaci e poi leggi la pagina seguente.

- Sia  $S_d = \{ D \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), a_i \in \mathbb{R} \}$  (AL39)  
 Allora  $XD = DX$  se e solo se  $X \in S_d$ .  
 Infatti moltiplicare  $X$  a destra per  $D$  significa moltiplicare la sua colonna  $j$ -esima per  $a_j$ ;  
 moltiplicare  $X$  a sinistra per  $D$  significa moltiplicare la sua riga  $i$ -esima per  $a_i$ .

Allora  $XD = DX$  per ogni scelta di  $D \Leftrightarrow \forall i, j$

$$\begin{aligned} (XD)_{ij} &= a_j x_{ij} \\ (DX)_{ij} &= a_i x_{ij} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sono uguali per ogni} \\ \text{scelta di } a_i \text{ e } a_j \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

cioè  $(a_j - a_i)x_{ij} = 0$  anche per  $a_i \neq a_j \Rightarrow x_{ij} = 0$   
 cioè  $X$  è una matrice diagonale

- Sia  $S_t = \{ T \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid t_{ij} = 0 \ \forall i > j \}$

Allora  $XT = TX \quad \forall T \in S_t \Leftrightarrow X = xI$  per un opportuno  $x \in \mathbb{R}$ .

Infatti, dato che  $S_d \subset S_t$  la matrice  $X$  deve essere diagonale:  $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  
 tale matrice deve commutare con tutte le matrici  $A_{ij}$  che hanno 1 in posizione  $(i, j)$  e 0 altrove,  $i \neq j$ .

Ora  $\oplus$

$$\begin{aligned} XA_{ij} &= x_i A_{ij} \\ A_{ij}X &= x_j A_{ij} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sono uguali} \Leftrightarrow x_i = x_j \quad \forall i, j \\ \Rightarrow X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n) = x_1 I. \end{array} \right.$$

$\oplus$  Ricordare: moltiplicare a sinistra per  $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  significa che ogni riga viene moltiplicata per  $x_i$ .

In  $A_{ij}$  c'è una sola riga con almeno 1 elemento  $\neq 0$

....

$\therefore$  In generale, le uniche matrici che commutano con tutte le matrici di  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  sono del tipo  $xI$ , perché....

## Metodo di elimin. di Gauss e prodotto per matrici

(AL 40)

Consideriamo queste matrici

$$M_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuta dello scambio delle righe 2, 3 delle matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M(1,1,a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuta sostituendo con a l'elem. di posto (1,1) delle matrice  $I_3$

$$M(2,1,a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

analog. col posto (2,1)

Cosa succede se prendo una matrice, ades.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

e le moltiplico a sinistra per una delle 3 matrici precedenti?

$$M_{(12)} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{scambio } R_1 \text{ con } R_2$$

$$M(1,1,a) A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 & a & 2a \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{moltiplico la 1^a riga per } a$$

$$M(2,1,a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a \cdot 0 + 2 & a+3 & 2a+6 \\ 4 & 7 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{sostituisco } R_2 \text{ con } R_2 + aR_1$$

Discorsi analoghi valgono per

$$M_{(13)} : \text{scambio } R_1 \text{ con } R_3, \quad M_{(23)} : \text{scambio } R_2 \text{ con } R_3$$

$$M(2,2,a) : aR_2, \quad M(3,3,a) : aR_3$$

$$M(3,1,a) : R_3 + aR_1, \quad M(3,2,a) : R_3 + aR_2$$

Cioè le operazioni che si fanno usando il metodo di Gauss possono essere interpretate come prodotto di una matrice di questi tipi per la matr. completa.

Il bello di queste matrici che operano sulle righe di A è che "hanno inversa sinistra" (\*) cioè se M è una di queste matrici esiste una matrice  $M'$  (quadrata dello stesso ordine  $m$  di M: nell'esempio  $m=3$ ) tale che

$$M'M = I_m$$

Verifichiamo per le prime tre:

$$M_{(12)} \cdot M_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow M' = M_{(12)}$$

$$M(1,1, \frac{1}{a}) \cdot M(1,1,a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow M' = M(1,1,\frac{1}{a})$$

attenzione è vero solo se  $a \neq 0$ : ma nel processo di eliminazione di Gauss questo è certamente vero!

$$M(2,1,-a) \cdot M(2,1,a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M' = M(2,1,-a)$$

Questo spiega perché il sistema lineare di pertinenza è equivalente a quello ottenuto con il metodo di eliminazione di Gauss (cioè le soluzioni di uno sono tutte e sole le soluzioni dell'altro).

INFATTI

- in ogni passaggio moltiplico  $(A|B)$  per una matrice M di tipo  $M_{(i,j)}$  o  $M(i,i,a)$  o  $M(i,j,a)$ ;

conato con  $i > j$

(\*) L'affermazione non è vera per le matrici  $A(i,i,0)$  - vedi sotto - ma nel processo di eliminazione non si usano queste matrici. Tuttavia in realtà l'inversa  $M'$  è anche l'intera destra, ma qui non serve.

- $M \cdot (A | B) = (MA | MB)$

(AL42)

quindi posso ragionare così:

① se  $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix}$  è una soluzione del sistema, cioè

$$A\bar{X} = B$$

moltiplicando per  $M$  ho:  $M(A\bar{X}) = MB$  e per le prop. assoc.

$$(MA)\bar{X} = MB$$

cioè  $\bar{X}$  è una sol. del sistema con mat. completa  $(MA | MB)$  ottenuto facendo un sol passaggio del metodo di eliminaz. di Gauss.

② viceversa se  $\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_m \end{pmatrix}$

è una sol. del sistema trasformato, cioè

$$(MA)\bar{Y} = MB$$

moltiplicando per  $M'$  ho:  $M'(HA\bar{Y}) = M'(MB)$

applicando le pr. assoc.:  $(M'M)(A\bar{Y}) = (M'M)B$

e poiché  $M'M = I_m$ :  $I_m(A\bar{Y}) = I_m \cdot B$

$$(I_m A)\bar{Y} = I_m B$$

e per def di  $I_m$ :

$$A\bar{Y} = B$$

Cioè  $\bar{Y}$  è sol. del sistema originario.

- Questo schema si ripete a ogni passaggio e quindi ogni sol. del sistema iniziale è sol. dei sistemi intermedi e quindi di quello finale nel metodo di eliminazione e viceversa ogni sol. di quest'ultimo essendo sol. dei sist. intermedi lo è anche di quello iniziale.

Esercizi

(a destra)

1. Verificare che moltiplicando una matrice  $A$  di tipo  $(m,n)$  per una matrice quadrata di ord.  $n$

- del genere  $M_{(i;j)}$  : opera lo scambio delle colonne  $i$  con le  $j$
- del genere  $M(i,i',a)$  : opera il prodotto per  $a$  delle colonne  $i$ -esima
- del genere  $M(i,j,a)$  : somma alle colonna  $i$ -esima la  $j$ -esima per  $a$ , se  $i > j$  e a rovescio se  $i < j$

Ad es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

2. Verificare che moltiplicare a sinistra per una matrice del genere  $M(i',j,a)$  con  $i < j$  significa sommare alle riga  $R_i$  la riga  $aR_j$

Ad es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

Quindi anche la prosecuzione del metodo di eliminazione di Gauss cui si è accennato a pag DL 20 può essere fatta avanti moltiplicando a sinistra per matrici di tipo  $M(i,i',a)$  ( $a \neq 0$ ) e  $M(i',j,a)$ ,  $i < j$

## Spunti di riflessione e consolidamento.

(AL44)

Siamo:  $V = \text{Mat}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  una matrice fissata

R la relazione su V così definita:

$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$  sia ha  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  se e solo se

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

1) dimostrare che R è una applicazione da V a V

2) quando ha inversa destra? (vedi RELAZ. pag 61)

Ad es., se  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  la R ha inversa destra?  
come è definita?

E se  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ?

3) R può avere inversa destra ma non avere inversa sinistra? (vedi AL38 ... che cosa c'entra?)

Stabilire un collegamento tra invertibilità della relazione R e invertibilità della matrice A )