

3. SPAZI VETTORIALI (su \mathbb{R})

(AL 45)

DEF. Sia V un insieme non vuoto. Dico che V è uno spazio vettoriale (reale), e chiamo vettori i suoi elementi, se su V sono definite:

- un'operazione binaria interna, detta somma

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$(\underline{u}, \underline{v}) \longmapsto \underline{u} + \underline{v}$$

- un'operazione binaria mista, detta prodotto per scalare

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$(k, \underline{v}) \longmapsto k \cdot \underline{v} = k\underline{v}$$

per le quali valgono le seguenti proprietà:

S1) $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V : \underline{u} + \underline{v} \in V$ (+ è INTERNA)

S2) $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V : \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (+ è COMMUTATIVA)

S3) $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V : (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (+ è ASSOCIA-TIVA)

S4) $\exists \underline{z} \in V$ t.c. $\forall \underline{v} \in V$ si abbia $\underline{v} + \underline{z} = \underline{z} + \underline{v} = \underline{v}$

(esiste un elemento NEUTRO rispetto a +:
di solito si indica tale elem. con $\underline{0}$ invece di \underline{z})

S5) $\forall \underline{v} \in V \exists \underline{v}' \in V$ t.c. $\underline{v} + \underline{v}' = \underline{v}' + \underline{v} = \underline{0}$

(per ogni vettore \underline{v} esiste l'OPPOSTO \underline{v}' : di solito si denota l'opposto \underline{v}' con $-\underline{v}$)

P1) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V : k\underline{v} \in V$ (\cdot è INTERNA)

P2) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \underline{u}, \underline{v} \in V : k(\underline{u} + \underline{v}) = k\underline{u} + k\underline{v}$
(DISTRIBUTIVITÀ del prod. rispetto a + di vettori)

P3) $\forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V : (h+k)\underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$

(DISTRIBUTIVITÀ del prod. risp. a + di SCALARI)

P4) $\forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V : (hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$

(OMOGENEITÀ del prodotto)

P5) $\forall \underline{v} \in V : 1\underline{v} = \underline{v}$.

STOP

Esempi

(A246)

1) Mat_{m×n}(R) risp. a somma di matrici e prodotto per scalare è uno sp. vett. reale (VEDI CAP. 1)

Casi significativi:

a) ($n=1$) $M_{m \times 1}(R)$: matrici colonne con m entrate, spesso chiamati vettori colonna

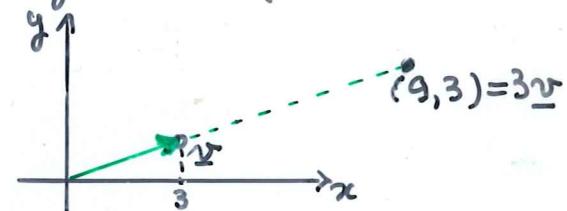
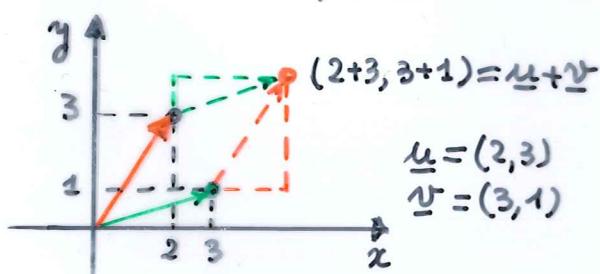
b) ($m=1$) $M_{1 \times n}(R)$: matrici riga con n entrate, spesso chiamati vettori riga

2) $R^n = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ volte}}$: insieme delle n -uple ordinate di numeri reali, con la somma
 $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$
e il prodotto $k(a_1, \dots, a_n) = (ka_1, \dots, ka_n)$
... è come lavorare con $M_{1 \times n}(R)$ o $M_{n \times 1}(R)$

Casi particolari

$n=1$: R è spazio vett. su R.

$n=2$: ... spazio vettoriale dei "vettori applicati nell'origine del piano"



3) $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ è spazio vett. su R rispetto alla somma di numeri complessi e al prodotto di un numero reale per un complesso:

$$k(a+ib) = (k+i0)(a+ib) = ka + ikb.$$

(vedi esempio precedente e piano di ARGAND-GAUSS)

4) $\mathbb{R}[x]$ rispetto alla somma di polinomi e al prodotto di un polinomio per un numero reale (visto come polinomio di grado zero)

$$k(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = ka_0 + ka_1x + \dots + ka_nx^n$$

e' uno sp. vett. reale.

5) Sia P_n l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[x]$ che hanno grado esattamente n (con $n \geq 0$) (AL47)

Rispetto alle stesse operazioni viste in (4) è uno spazio vettoriale?

NO perché l'elemento neutro rispetto alla somma di polinomi è il POLINOMIO NULLO che ha GRADO $< 0 \leq n$

O, se si preferisce, se $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ e $q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$ si ha

$$p(x) - q(x) = (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 - b_0)$$

che ha grado $< n$.

6) Come si aggiusta? Prendendo l'insieme $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi di grado $\leq n$: questo è uno sp. vett. su \mathbb{R} rispetto alla somma di polinomi e al prodotto di un num. reale per un polin.

7) L'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle applicazioni definite su \mathbb{R} a valori in \mathbb{R} è uno sp. vett. su \mathbb{R} rispetto alle operazioni definite puntualmente:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : (kf)(x) = k(f(x))$$

8) L'insieme $C(\mathbb{R})$ delle funzioni continue di \mathbb{R} in \mathbb{R} è uno sp. vett. su \mathbb{R} rispetto alle stesse operazioni viste in (7).

9) Un insieme formato da un solo elemento può essere uno spazio vettoriale su \mathbb{R} ?

... dato che lo spazio vett. deve contenere il neutro rispetto alla somma, cioè succede SE E SOLO SE

$$V = \{0\}$$

OSS. Potrei parlare più in generale di spazio vettoriale su un campo K (def. identica; proprietà che elencheremo subito dopo identiche, pur di sostituire \mathbb{R} con K)
 Gli esempi 1, 2, 4, 5, 7 restano validi anche se il campo si generalizza ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ ecc. : vedili...).

Proprietà che si desamono dalla definizione di Sp. VETT.

1) unicità dello zero $\underline{0}$

La struttura del ragionamento è uguale a quello visto per l'unicità della matrice neutra risp al PROD.

DIM. Siano $\underline{0}$ e $\underline{\Xi}$ t.c. $\forall \underline{v} \in V : \underline{0} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$

Allora

$$\underline{\Xi} = \underline{\Xi} + \underline{0} = \underline{0}$$

$$\underline{v} = \underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$$

cioè $\underline{\Xi} = \underline{0}$.

2) unicità del vettore opposto di \underline{v}

Anche qui trovare le analogie con l'unicità dell' inversa.

DIM. Siano $-\underline{v}$ e \underline{v}' tali che: $\underline{v} + (-\underline{v}) = (-\underline{v}) + \underline{v} = \underline{0}$

Allora

$$\underline{v}' = \underline{v}' + \underline{0} = \underline{v}' + (\underline{v} + (-\underline{v})) = (\underline{v}' + \underline{v}) + (-\underline{v}) =$$

$$= \underline{0} + (-\underline{v}) = -\underline{v}.$$

3) $\forall k \in \mathbb{R} : k\underline{0} = \underline{0}$

DIM. $k\underline{0} = k(\underline{0} + \underline{0}) = k\underline{0} + k\underline{0}$ e sommando $-k\underline{0}$ a entrambi i membri:

$$\underline{0} = k\underline{0}.$$

$$\underline{0} = \underline{0}$$

4) $\forall \underline{v} \in V : 0\underline{v} = \underline{0}$ (attenzione $0 \in \mathbb{R}, \underline{0} \in V$)

DIM. $0\underline{v} = (0+0)\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$ e sommando $-(0\underline{v})$:

$$\underline{0} = \underline{0}$$

$$0\underline{v} + (-0\underline{v}) = (0\underline{v} + 0\underline{v}) + (-0\underline{v}) = 0\underline{v} + \underline{0} \stackrel{S4}{=} 0\underline{v}.$$

5) sia $k \in \mathbb{R}$ e $\underline{v} \in V$: $k\underline{v} = \underline{0}$ implica $k=0$ oppure $\underline{v} = \underline{0}$
 (con "oppure" non esclusivo)

(AL49)

DIM. Se $k=0$ (si ha $k\underline{v} = \underline{0}$ per (4)) siamo a posto
 Se $k \neq 0$ esiste k^{-1} in \mathbb{R} ; quindi:

$$\underline{v} = 1 \underline{v} = (k^{-1} \cdot k) \underline{v} = k^{-1} (k \underline{v}) = k^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad (3)$$

def reciproco in \mathbb{R}

cioè $\underline{v} = \underline{0}$.

6) per ogni $\underline{v} \in V$, $(-1)\underline{v}$ è l'opposto di \underline{v} .

DIM.

$$\underline{v} + (-1)\underline{v} = 1 \cdot \underline{v} + (-1)\underline{v} = (1 + (-1))\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \quad (4)$$

def di
opposto in \mathbb{R}

Ovviamente anche $(-1)\underline{v} + \underline{v} = \underline{0}$ (pr. comm. di +)

7) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \underline{v} \in V$: $(-k)\underline{v} = -(k\underline{v}) = k(-\underline{v})$

Come sopra!

DIM. o) $k\underline{v} + (-k)\underline{v} = (k + (-k))\underline{v} = 0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \quad (4)$

$$\Rightarrow (-k)\underline{v} = - (k\underline{v})$$

o) $k\underline{v} + k(-\underline{v}) = k(\underline{v} + (-\underline{v})) = k \cdot \underline{0} = \underline{0}. \quad (3)$

Detto brevemente: vale l'aritmetica del calcolo letterale,
 non dobbiamo imparare regole nuove e non ci
 sono stranezze.

DEF. Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ $n (\geq 1)$ vettori dello sp. vett. reale V
 e k_1, \dots, k_n n numeri reali. Il vettore
 $\underline{v} = \sum_{i=1}^n k_i \underline{v}_i$

è detta combinazione lineare dei vettori
 $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con coefficienti k_1, \dots, k_n

Vengono combinate le 2 operazioni definite in V .

Abbiamo incontrato combinazioni lineari nel metodo di eliminazione di GAUSS. Quando passo dalla matrice completa

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & -1 \\ -2 & k & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -k & 1 \end{array} \right) \text{ a } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & k & 2k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3k & -k & 4 \end{array} \right)$$

Sostituisco alla seconda riga la combinazione lineare

$$R_2 + 2R_1 = 1(-2 \ k \ 0 \ 0 | 1) + 2(1 \ 0 \ k \ 0 | -1)$$

e alla terza la comb. lin.

$$R_3 - 3R_1 = 1(3 \ 1 \ 0 \ -k | 1) - 3(1 \ 0 \ k \ 0 | -1)$$

Qui stiamo lavorando con $V = \text{Mat}_{1 \times 5}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^5$ e i vettori sono proprio le righe R_1, R_2, R_3 .

Osservazione. Ogni vettore $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere come

$$(a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, a_n) = \\ = a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 0, 1)$$

Cioè come combinazione lineare degli n vettori

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ \underline{u}_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ \underline{u}_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{con coefficienti} \\ a_1, a_2, \dots, a_n \end{array} \right.$$

$$\text{Ad es. in } \mathbb{R}^3, \underline{v} = (2, -5, \sqrt{3}) = (2, 0, 0) + (0, -5, 0) + (0, 0, \sqrt{3}) = \\ = 2\underline{u}_1 - 5\underline{u}_2 + \sqrt{3}\underline{u}_3 =$$

Attenzione: nella combinazione lineare è cruciale rispettare le coppie "coefficiente - vettore":

$$(2, -5, \sqrt{3}) = 2\underline{u}_1 - 5\underline{u}_2 + \sqrt{3}\underline{u}_3 \neq -5\underline{u}_1 + 2\underline{u}_2 + \sqrt{3}\underline{u}_3 = (-5, 2, \sqrt{3})$$

Però posso scrivere $(2, -5, \sqrt{3}) = \sqrt{3}\underline{u}_3 + 2\underline{u}_1 - 5\underline{u}_2$

Esercizio. Considero in $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

(AL5)

la somma e il prod. per scalare così definite:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Rispetto a queste operazioni S è uno sp. vett. su \mathbb{R} ?

S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 valgono poiché la somma è quella definita in $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$.

P₁ vale poiché $\begin{pmatrix} kx \\ 0 \end{pmatrix} \in S$

$$P_2) \quad k \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = k \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x_1 + x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{distrib.} \\ \text{in } \mathbb{R}}}{{=}}$$
$$k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 + kx_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Vale P₂

$$P_3) \quad (k_1 + k_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow = \text{fatto in } \mathbb{R} \text{ sulle} \\ \text{pz.}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 x + k_2 x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{distr.}$$

\Rightarrow Vale P₃

$$P_4) \quad (k_1 k_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 k_2)x \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{in } \mathbb{R} \text{ vale pr. ass.}}}{=} \begin{pmatrix} k_1 (k_2 x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 (k_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = k_1 \begin{pmatrix} k_2 x \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{II}}}{=} \begin{pmatrix} k_1 (k_2 x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Vale P₄

$$P_5) \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{NON è} \\ \text{uno spazio vett.}$$

poiché non vale P₅