

5. SISTEMI di GENERATORI. BASI di uno sp.vett. DIMENSIONE

DEF. Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno sp.vett. V ; dico sottospazio generato da S in V e lo denoto con $\langle S \rangle$ l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono S cioè (come si potrebbe dimostrare facilmente (*)) l'insieme di tutte le combinazioni lineari di un numero finito (MA NON FISSATO: varia con le comb. lin.) di vettori di S .

ES. $V = \mathbb{R}[x]$, $S = \{x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$
 $\langle S \rangle = \{a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$

è lo spazio vettoriale di tutti i polinomi che hanno termine noto = 0 (tra essi c'è anche il polinomio nullo).

ATTENZIONE: n non è FISSATO, il grado può aumentare quanto si vuole, ma le somme di monomi in gioco sono sempre finite.

ESEMPI PIÙ FACILI

- $V = \mathbb{R}[x]$, $S = \{1, x, x^2\}$
 $\langle S \rangle = \{a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_2[x]$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{\underline{u}_1 = (1, 0, 0), \underline{u}_2 = (0, 1, 0)\}$
 $\langle S \rangle = \{(a_1, a_2, 0), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$
 che può anche essere descritto come:
 $\langle S \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$

DEF. Se $\langle S \rangle = V$ si dice che S è un sistema di generatori di V .

(*) Visto che tali comb. lin. stanno in ciascun ssp contenente S basterà dimostrare che il loro insieme è un ssp.

OSS. Una sp. vett. V ha un sistema di generatori "banale": $S = V$.

Infatti $\langle V \rangle = V$. In particolare $\{0\} = \langle 0 \rangle$

Ma siamo interessati a sistemi di generatori di V "più piccoli", se possibile finiti.

DEF. Uno spazio vettoriale è detto finitamente generato se ammette un sistema finito di generatori.

ESEMPI

① \mathbb{R}^3 è finitamente generato: $\mathbb{R}^3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

ove $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$.

② $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato

Infatti se $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ è un insieme finito di polinomi di grado rispettivamente d_1, d_2, \dots, d_n , ogni sua combinazione lineare

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n$$

è un polinomio di grado $\leq \max(d_1, d_2, \dots, d_n) = d$ (vedi i discorsi fatti su $\mathbb{R}_n[x]$).

Quindi $x^{d+1} \notin \langle S \rangle$ cioè $\mathbb{R}[x] \neq \langle S \rangle$.

La domanda cui vogliamo rispondere ora è: dato un insieme S di generatori di V , quali posso "buttar via" ottenendo ancora un sistema di generatori di V ?

Nell'esempio ① nessuno poiché se ad es. scarto u_1 l'insieme $S' = \{u_2, u_3\}$ produce

$$\langle S' \rangle = \{a_2 u_2 + a_3 u_3 = (0, a_2, a_3), a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

che non contiene ad es. u_1 .

(AL62)

DEF. Sia V uno sp. vett. e siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$.
 Dico che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti
 se esistono $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli
 tali che

$$k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{0} .$$

In caso contrario dico che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.

ATTENZIONE A COME SI TRADUCE "in caso contrario":

$$k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{0} \implies k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

con l'implicazione in quel verso, non \Leftarrow : questa
 ultima implicazione è sempre vera poiché
 $0 \underline{v}_1 + \dots + 0 \underline{v}_n = \underline{0} + \dots + \underline{0} = \underline{0}$

ESEMPIO. In $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ considerare i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Provare che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono l.d. mentre $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4$
 sono lin. indip.

SOL. Devo rispondere alle due richieste

- A) trovare $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ t.c. $x \underline{v}_1 + y \underline{v}_2 + z \underline{v}_3 = \underline{0}$
- B) mostrare che $x \underline{v}_1 + y \underline{v}_2 + z \underline{v}_4 = \underline{0}$ ha come
 sola soluzione $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$$A) \quad x \underline{v}_1 + y \underline{v}_2 + z \underline{v}_3 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un sistema lineare omogeneo (TERMINI NOTI altri=0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} \quad \text{basta prendere } (k, -k, k) \text{ con } k \neq 0, \text{ ades.}$$

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}.$$

B) $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sist. lin. omog. USO ancora il METODO DI GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

ATTENZIONE A RISOLVERE SISTEMATICAMENTE QUESTI SIST. LINEARI : si rischia altrimenti di leggere come indipendenti vettori che non lo sono.

N.B. invece di dire che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente (in-) dipendenti si usa anche dire che il loro insieme $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è un sistema linearmente (in-) dipendente.

OSS.

1) $\{\underline{v}_1\}$ è linearmente dipendente solo se $\exists k \neq 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $k\underline{v}_1 = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{0}$

Quindi il sistema formato da un solo vettore $\neq \underline{0}$ è linearmente indipendente.

2) se $\{\underline{v}_1\}$ è lin. indip. allora $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è lin. dipendente \Leftrightarrow

$\exists k_1, k_2$ non entrambi = 0 t.c. $k_1\underline{v}_1 + k_2\underline{v}_2 = \underline{0}$.

Non può essere $k_2 = 0$ altrimenti: $k_1 \neq 0$ e $k_1\underline{v}_1 = \underline{0}$ e questo implicherebbe $\underline{v}_1 = \underline{0}$ cioè $\{\underline{v}_1\}$ non lin. ind.

Essendo $k_2 \neq 0$ $\exists k_2^{-1}$; moltiplico per k_2^{-1} :

$$k_2^{-1}(k_1\underline{v}_1) + (k_2^{-1}k_2)\underline{v}_2 = k_2^{-1}\underline{0}$$

cioè $(k_2^{-1}k_1)\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underline{0}$ cioè $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\underline{v}_2 = k\underline{v}_1,$$

cioè se $\{\underline{v}_1\}$ è lin. indip. allora

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è lin. dipendente $\Leftrightarrow \underline{v}_2 \in \langle \underline{v}_1 \rangle$

3) allo stesso modo faccio che: (vedi per $n=2$ pag ALG4 bis)

se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è lin. indip. allora

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}\}$ è lin. dipendente $\Leftrightarrow \underline{v}_{n+1} \in \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle$

Più in generale un sistema è linearmente dipendente se e solo se c'è un vettore del sistema che può essere scritto come combinazione lineare degli altri.

Ed è indipendente se nessuno dei vettori del sistema si può scrivere come combinazione lineare degli altri.

DEF. Un sistema di vettori $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V è detto base di V se valgono le 2 condizioni

- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ genera V
- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è un sistema lin. indipendente.

TEOR. Sia S un insieme finito di generatori di V .

Da S si può estrarre una base di V .

Per la dim. si usa l'algoritmo degli scambi successivi che illustriamo su un esempio ed è basato sull'om. precedente (riproduzione)

Siano $V = M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ e $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5, \underline{v}_6\}$

con

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ovviamente $\langle S \rangle \subseteq V$

(ALGEBRA'S)

Sia $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ lin. indip.

e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lin. dipendente

Allora esistono $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ con $(k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0)$
t.c.

$$k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

Se fosse $k_3 = 0$ avrei

$$k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 = \underline{0} \quad \text{con } (k_1, k_2) \neq (0, 0)$$

cioè $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ sarebbe dipendente contro

l'ipotesi di partenza. Quindi deve per forza essere

$$k_3 \neq 0 \Rightarrow \text{esiste } k_3^{-1}$$

$$\Rightarrow k_3^{-1} k_1 \underline{v}_1 + k_3^{-1} k_2 \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_3 = (-k_3^{-1} k_1) \underline{v}_1 + (-k_3^{-1} k_2) \underline{v}_2$$

$$\Rightarrow \underline{v}_3 \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle. \quad \text{e.v.d.}$$

- $\underline{v}_1 \neq 0$: $\{\underline{v}_1\}$ lin. indip. : aggiungo il vett. succ. (AL 65)
- $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$: lin. dip. poiché $\underline{v}_2 = 0 = 0\underline{v}_1$
scarto \underline{v}_2 e aggiungo il vett. successivo
- $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\}$: lin. indip. poiché $\underline{v}_3 \notin \langle \underline{v}_1 \rangle$
cioè non esiste $k \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
tengo \underline{v}_3 e aggiungo il vett. successivo
- $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$: lin. dip. poiché $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{v}_1 + \underline{v}_3$
scarto \underline{v}_4 e aggiungo il vett. successivo
- $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5\}$: lin. indipendenti poiché $\underline{v}_5 = x \underline{v}_1 + y \underline{v}_2$
cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ implica $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$
IMPOSSIBILE!
tengo \underline{v}_5 e aggiungo il vett. successivo
- $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5, \underline{v}_6\}$: lin. dip. poiché $\underline{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{v}_1 - \underline{v}_5$
scarto \underline{v}_6 .

Ora: l'insieme $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_5\} = S$ genera $V = M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$?

Considero un vettore qualsiasi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ di V e mostro che esistono $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Equivale al sistema

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c - a - 2b \end{cases}$

Dunque $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \underline{v}_1 + b \underline{v}_2 + (c-a-2b) \underline{v}_3 \Rightarrow \langle S \rangle = \mathbb{R}^3$

Domanda: c'era un modo meno artistico di portare avanti questo processo di aggiunte e scarti?

Si ma bisogna

(AL66)

- ricordare che abbiamo detto che il metodo di Gauss per risolvere i sistemi (... o manipolare una tabella in modo da ricevere tutte le conseguenze di quelle di partenza ed "eliminare le informazioni ridondanti") consiste nel fare combinazioni lineari di righe
- essere un po' elastici nella rappresentazione e scrivere i vettori precedenti come matrici riga invece di matrici colonna e trasucerli:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_4-R_1 \\ R_6-R_1}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_4-R_3 \\ R_6+R_5}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{elimino} \\ \text{elimino} \\ \text{elimino}}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{elimino} \\ \text{elimino} \\ \text{elimino}}}$$

Seguendo quel che avviene sulle righe 4^a e 6^a si vede che $\underline{v}_4 - \underline{v}_1 = \underline{v}_3$ o anche (3^a matrice): $\underline{v}_4 - \underline{v}_1 - \underline{v}_3 = 0$
e $\underline{v}_6 - \underline{v}_1 = \underline{v}_5$ " : $\underline{v}_6 - \underline{v}_1 - \underline{v}_5 = 0$

Le righe che non siamo riusciti ad annullare

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

corrispondono ai vettori lin. indip. in S : è infatti chiaro che la 2^a riga non può essere mult. delle 1^a (dovrei moltiplicare per 0 per avere l'elem. di posto(2,1)... ma questo produce il vettore (0,0,0)) né la 3^a può essere comb. lin. delle prime 2 (lo 0 in posizione (3,1) richiede di moltiplicare la 1^a riga per 0 e, a questo punto lo 0 in posz. (3,2) richiede di moltiplicare anche la 2^a riga per 0 \Rightarrow comb. lin. $= 0 \neq 3^a$ riga)

Perché il metodo degli scarti successivi funziona?

Perché scarto un vettore solo se, aggiunto ai precedenti, non genera nuovi vettori.

Ad es. è chiaro che $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle \subseteq \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle$

ma, dato che $\underline{v}_4 = \underline{v}_1 + \underline{v}_3$, un qualunque vettore $x\underline{v}_1 + y\underline{v}_3 + z\underline{v}_4$ di $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle$ si riscrive

$$\begin{aligned} x\underline{v}_1 + y\underline{v}_3 + z\underline{v}_4 &= x\underline{v}_1 + y\underline{v}_3 + z(\underline{v}_1 + \underline{v}_3) = \\ &= (x+z)\underline{v}_1 + (y+z)\underline{v}_3 \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle \end{aligned}$$

cioè $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle \subseteq \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle$

e quindi $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_3 \rangle$.

Esercizio. Siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determinare una base per $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$.

utilizzo l'algor. degli scarti succ.

$\{\underline{v}_1\}$: è lin. indip. poiché $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$: è lin. indip. poiché $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2=0 \\ x=3/2 \\ x=1/3 \end{cases}$ IMPOSS.

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$: $\exists x_1, y \text{ t.c. } \underline{v}_3 = x_1 \underline{v}_1 + y \underline{v}_2 ? \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2y \\ -2 \cdot x_1 - 3y \\ 3 \cdot x_1 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ vedi pag AL67*

Il metodo degli scarti successivi permette di dimostrare il

TEOREMA Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato: tutte le basi di V hanno lo stesso numero di vettori. (VEDI DIM. a pag. AL67bis)

Tale numero viene detto dimensione dello spazio vettoriale V e denotato con dim V.

Ad es. visto che \mathbb{R}^3 ha una base formata da 3 vettori:

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, tutte le sue basi sono formate da 3 vettori, cioè \mathbb{R}^3 ha dimensione 3.

$$\begin{cases} 2+2y = -3 \\ -2x-3y = 4 \\ 3x+y = 1 \end{cases} : \text{ GAUSS}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2+2R_1 \\ R_3-3R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & +10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_3+5R_2 \\ 1-(-3)\cdot 3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

il sistema ha soluzione: $\begin{cases} y = -2 \\ x = -3 + 4 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{v}_3 = 1 \cdot \underline{v}_1 - 2 \underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_3 \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$

cioè \underline{v}_3 è dipendente da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$.

Quindi una base di $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \emptyset$

\leftarrow Infatti ogni vettore di U si scrive:
 $a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c\underline{v}_3 = a\underline{v}_1 + b\underline{v}_2 + c(\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2) =$
 $= (a+c)\underline{v}_1 + (b-2c)\underline{v}_2$, cioè è comb.
 lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$; che sono quindi
 generatori di U oltre
 che indipendenti.

Potrebbe essere $\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\}$?

Sì. Posso rifare tutta la procedura e vedrei che
 funziona: FARLO per esercizio, cosa faccio dato
 che ho appena provato che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sono dipendenti.

Ma il errore è che \underline{v}_1 e \underline{v}_3 sono indipendenti
sono anche
 e i generatori di tutto il sottospazio perché (di conseguenza)
 subito dopo che) ogni sottospazio finitamente genera-
 to ha tutte le sue basi formate dallo stesso
 numero di vettori (perciò ci puoi cascare)

DIM. del teorema.

Per ipotesi V è finitamente generato cioè esiste un insieme

$$S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \text{ tale che } V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle.$$

Sia $B = \{\underline{u}_i, i \in I\}$ un insieme di vettori indipendenti di V (in particolare una base di V): mostro che B è finito di ordine $\leq m$.

Estraggo da B un vettore \underline{u}_1 (che sarà $\neq 0$ essendo parte di un ins. di vettori lin. indip.). Dato che $V = \langle S \rangle$

$$\underline{u}_1 = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_m \underline{v}_m$$

e non tutti gli a_i sono $= 0$ (altrimenti $\underline{u}_1 = 0$): a meno di rinominare i vettori posso supporre $a_1 \neq 0$; moltiplico per a_1^{-1} :

$$a_1^{-1} \underline{u}_1 = \underline{v}_1 + a_1^{-1} a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_1^{-1} a_m \underline{v}_m$$

$$\text{cioè } \underline{v}_1 = a_1^{-1} \underline{u}_1 + a_2' \underline{v}_2 + \dots + a_m' \underline{v}_m \quad \text{ove } a_i' = -a_1^{-1} a_i.$$

Ne segue che $V = \langle \underline{u}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \rangle$.

Estraggo da B un secondo vettore \underline{u}_2 e ripeto il ragionamento

$$\underline{u}_2 = b_1 \underline{u}_1 + b_2 \underline{v}_2 + \dots + b_m \underline{v}_m$$

ove non tutti i b_i sono nulli, così deve essere non solo almeno uno dei coefficienti b_2, \dots, b_m altrimenti sarebbe $\underline{u}_2 = b_1 \underline{u}_1$ e $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ non sarebbe un insieme di vettori indip.

A meno di rinominare i vettori posso supporre $b_2 \neq 0$ e come sopra

$$\underline{v}_2 = b_2^{-1} \underline{u}_2 - b_2^{-1} b_1 \underline{u}_1 - \dots - b_2^{-1} b_m \underline{v}_m$$

e quindi $V = \langle \underline{u}_2, \underline{u}_1, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_m \rangle$.

Continuo così finché

- o esaurisco gli elementi di B (e ho provato che $|B| \leq m$)
- o esaurisco gli elementi di S : ma non potranno esistere altri elementi in B poiché se avrebbe $V = \langle \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m \rangle$ e quindi altri elementi in B sarebbero linearmente dipendenti da $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ contro l'ipotesi che i vettori di B siano lin. indip.

Quindi se V è finitamente generato ogni sua base (essendo lin. indip.) è finita.

Ora se B_1 e B_2 sono due basi di V , pensando B_1 come

sistema di generatori e B_2 come sistema di reti. lin. indip.

ho $|B_1| \geq |B_2|$; scambiando i ruoli ho $|B_1| \leq |B_2|$.

Quindi due basi hanno sempre lo stesso numero di elementi,

Cnd,

In generale, una base di \mathbb{R}^n è formata da

$\underline{u}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\underline{u}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\underline{u}_n = (0, 0, \dots, 1)$
 cioè dall'insieme degli n vettori \underline{u}_i che hanno tutte le "COMPONENTI" nulle tranne quella che è in posizione i -esima che vale 1.

Quindi la dimensione di \mathbb{R}^n è n e ogni altra base di \mathbb{R}^n è formata da n vettori:

- meno di n vettori (indipendenti o no) non bastano a generare \mathbb{R}^n
- più di n vettori sono TROPPI per essere indipendenti in \mathbb{R}^n e potrebbero anche non essere un sistema di generatori.

Il motivo di queste affermazioni è da ricercare nella dim. a pag AL67 bis in cui si è mostrato che se

- * S è un sistema di generatori di V
- * B è una base di V
- * S' è un sistema di vettori lin. indip. di V

Si ha

$$|S| \geq |B| \geq |S'|.$$

Quindi

COROLLARIO. Sia $\dim V = n$

- $\forall m < n$, $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ non è un sistema di generatori di V
- $\forall m > n$, $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ non è un sistema di vett. lin. indip. di V .
- se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ generano V essi sono lin. indip.
- se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono lin. indip. essi generano V .

Le affermazioni c), d) del corollario dicono che

"per verificare se n vettori di uno sp. vett. di dimensione n formano una base basta verificare una sola delle due condizioni

- (c) gli n vettori formano un sist. di generatori
- (d) gli n vettori sono lin. indipendenti.

di solito la seconda è più comoda.

OSS. Sia $\dim V = n$ e sia U un sottospazio di V .

Allora $\dim U \leq n$ e se $\dim U = n$ allora $U = V$.

Tinfatti per il COR. (b) non posso avere $\dim U > n$ e per il COR.(d) n vettori indip. contenuti in V generano tutto V .

La dimostraz. a pag AL67 bis contiene in sé anche le idee che ci sono dietro il cosiddetto teorema della base incompleta. Illustriamo su un esempio il problema di fondo:

In $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ considero il sottospazio $U = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2 \rangle$ con $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

E' facile vedere che $\dim U = 2$ e quindi $U \subsetneq V = M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$. Se voglio ottenere una base di V a partire da quella di U (si dirà "completare" la base di U) come posso fare?

Brendo una base di V , ad es. $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ con $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e vado via via ad "aggiungere" a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ un vettore \underline{e}_i : se dipende da $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ lo scarto altrimenti lo lascio finché trovo $\dim V = 3$ vett. indipendenti.

- $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{e}_1\}$ dipendenti poiché
 $x\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x=3, y=-2$
scarto e_1
- $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{e}_2\}$ dipendenti poiché
 $x\left(\frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x=-1, y=1$
scarto e_2
- $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{e}_3\}$ indipendenti poiché l'ultima "entità" di \underline{e}_3 è $\neq 0$ mentre quelle di $\underline{u}_1 + \underline{u}_2$ sono $= 0$.

Quindi il completamento a una base di V del sistema $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è fornito dal vettore \underline{e}_3 .

In generale

TEOR. (della base incompleta). Se $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ è una base di V e $S = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ (con $k < n$) è un sistema lin. indipendente di V , si possono trovare $n-k$ vettori opportuni di B : $\underline{b}_{i_1}, \dots, \underline{b}_{i_{n-k}}$ tali che

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{b}_{i_1}, \dots, \underline{b}_{i_{n-k}}\}$$

sia una base di V .

Si dimostra applicando l'algoritmo degli scarti successivi a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$.

Usando questo teorema si dimostra la cosiddetta

FORMULA di GRASSMANN. Se U e W sono sottospazi vett. di V :

$$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

DIM. Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ una base di $U \cap W$, che è ssp. di U ed W .

La completo a una base $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ di U e a una base $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_s, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ di W e dimostro che $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_s\}$ - che certamente genera $U + W$ - è un sistema lin. indipendente. (PROVARCI!)

ESERCIZI

- 1) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ delle matrici della forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

... basta individuare una base.

- 2) Stabilire se $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3\}$ con $\underline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$

- 3) Stabilire se $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2\}$ con $\underline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un sistema di generatori di $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$

- 4) Stabilire se $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3, \underline{\alpha}_4\}$ con $\underline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti di $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$

- 5) Stabilire se $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \underline{\alpha}_3\}$ con $\underline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ è una base per $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

- 6) In $V = M_{5 \times 1}(\mathbb{R})$ considerare $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in V : b-d = c-e = 0 \right\}$ ← tenere le corrette sostituzioni da qui

$$W = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle \quad \text{con } \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Verificare che U è un sottospazio di V e determinarne una base
 b) determinare la dimensione di W
 c) determinare una base di $U \cap W$ (cioè chiedersi quali vettori di W soddisfano le relazioni che definiscono U)
 d) completare tale base di $U \cap W$ a una base di U e a una di W
 e) mostrare che i vettori della base di U uniti a quelli della base di W ottenuti in (d) costituiscono una base di $U+W$ (ovviamente conteggiando una volta solo i vettori della base di $U \cap W$)
 f) verificare che vale la formula di GRASSMANN,

- 7) In $V = \mathbb{R}_2[x]$ siano

$$U = \{p \in V \mid p(1) = p(-1) = 0\}$$

$$W = \langle 1+x, x-x^2, 2+x+x^2 \rangle$$

- a) Verificare che U è un sottospazio di V e trovarne le dimensioni.
 b) determinare la dimensione di W .
 c) determinare una base di $U+W$.
 d) determinare la dimensione di $U \cap W$.