

A70bis,

1)  $\dim M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) = 6$ : è il suggerimento

2)  $\{ \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \}$  con  $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

sono una base di  $M_{3 \times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$

Sono generatori di  $\mathbb{R}^3$ ?

Sono indip.?

In  $\mathbb{R}^3$  le basi sono formate da 3 elementi: se i 3 vettori non sono indipendenti, quelli indip. sono in numero  $< 3$  e quindi non generano tutto  $\mathbb{R}^3$ .

Oppure  $\{ \}$  3 vettori in  $\mathbb{R}^3$  non generano ... non sono indip.  $\Rightarrow$  basta verificare una delle due cose e ne discende l'altra.

A) Posso impostare il sistema

$$x \underline{a}_1 + y \underline{a}_2 + z \underline{a}_3 = \underline{0}$$

e chiedermi se l'unica sol. è  $x = y = z = 0$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

B) Alternativamente procedure di equazione e scelta.

$$\underline{a}_2 \neq \underline{0} \Rightarrow \{ \underline{a}_1 \} \text{ indep}$$

$$\underline{a}_2 \text{ non è multiplo di } \underline{a}_1 \Rightarrow \{ \underline{a}_1, \underline{a}_2 \} \text{ indep.}$$

$$\underline{a}_3 = h \underline{a}_1 + k \underline{a}_2 \text{ con } h, k \neq 0 ?$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ eq vett.}$$

$$\Downarrow \begin{pmatrix} h+2k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} h+2k=3 \\ k=2 \\ \boxed{0=1} \text{ imp.} \end{cases}$$

ciò significa che  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$  sono indep.

Verito che sono in numero =  $\dim \mathbb{R}^3$ ,  $\{ \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \}$  sono una base di  $\mathbb{R}^3$

3), 4) si risolvono osservando il numero di vettori contenuti nell'insieme che si chiede di verific. se è una base

5) Ripare i conti come nel caso precedente (2) o con il metodo A o con il metodo B verificare la non indipendenza.

$$V = M_{5 \times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^5$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in V : b-d = c-e = 0 \right\}$$

$$W = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle \quad \text{con} \quad \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Verifichiamo che  $U$  è un sottospazio di  $V$   
Ho 2 possibilità di lavoro:

siano  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} \in U$  due vettori generici di  $U$   
↳ devo mostrare che

la loro somma sta in  $U$  e il prod. per qualunque  $k \in \mathbb{R}$  sta in  $U$

A) So che  $b-d = 0 = c-e$   
 $b'-d' = 0 = c'-e'$

se considero la somma:  $\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \\ d+d' \\ e+e' \end{pmatrix}$  succede che

$$(b+b') - (d+d') = (b-d) + (b'-d') = 0 + 0 = 0$$
$$(c+c') - (e+e') = (c-e) + (c'-e') = 0 + 0 = 0$$

se considero il prodotto  $\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \\ kd \\ ke \end{pmatrix}$  n'ha

(3)

$$kb - kd = k(b-d) = k \cdot 0 = 0$$

$$kc - ke = k(c-e) = k \cdot 0 = 0$$

quindi ho verificato le due condizioni  $\Rightarrow U$  è SSp.

B) Altrimenti osservo che le relazioni dicono che il vettore generico che  $\in U$  ha la forma  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ b \\ c \end{pmatrix}$  e vado a verificare

che le somme di 2 mt. di pr. tipo è ancora di pr. tipo e il prod per  $k$  è ancora di pr. tipo.

Determineremo una base.

I vettori di  $U$  si possono scrivere come

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ho quindi individuato un mt. di generatori di  $U$ :

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Tali generatori sono indipendenti per che la loro comb. lineare che è proprio  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ b \\ c \end{pmatrix}$  è nulla (solo se)  $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$

Quindi formano una base  $\Rightarrow \dim U = 3$

b)  $\dim W = 2$  :  $w_1 \neq 0 \Rightarrow \{w_1\}$  è l.i.d.

$w_2 \neq kw_1$  per alcun  $k$  perché la 1a componente di  $w_2$  è 0, quella di  $w_1$  è 1 ma non posso scrivere  $w_2 = 0w_1$  poiché  $w_2 \neq 0$

c) trovare una base per  $U \cap W$ .

Devo chiedermi quali vettori di  $V$  sono anche vettori di  $W$  :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = x + y \cdot 0 \\ b = 2x + y \\ c = x + y \cdot 0 \\ b = 0x + (-1)y \\ c = 0x + 0y \end{cases}$$

sistema in 5 incognite  $a, b, c, x, y$   
lo scrivo in forma canonica:

$$\begin{cases} a - x = 0 \\ b - 2x - y = 0 \\ c - x = 0 \\ b + y = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} a & b & c & x & y & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{GAUSS}} \begin{matrix} R_4 - R_2 \\ R_5 - R_3 \end{matrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_5 - R_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$a=0$   
 $\uparrow$   
 $b=0$   
 $\uparrow$   
 $c=0$   
 $\uparrow$   
 $x=0$   
 $\uparrow$   
sol:  $y=0$

Gli elem. sulla diag princ. sono tutti  $\neq 0$   
Quindi l'unico elem. che appartiene all'inters.  
 $U \cap W$  è  $0 \Rightarrow$  i vetti. della base di  $U$  e quelli della base di  $W$  sono l.i.d.

$$\dim U = 3 \quad \dim W = 2$$

$$\dim U \cap W = \dim \{0\} = 0$$

$$\begin{aligned} \dim (U + W) &= \dim U + \dim W - \dim U \cap W \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

Esse i vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ sono una base di } \mathbb{R}^5$$

$$7) \quad V = \mathbb{R}_2[x]$$

$$U = \{ p \in V \mid p(1) = p(-1) = 0 \}$$

$$W = \langle 1+x, x-x^2, 2+x+x^2 \rangle$$

a) verif. che  $U$  è ssp. di  $V$  e trovare dim.  
 che sia sp. è verif. immediata sulle relazioni  
 quando come è fatto il più generale vett.  
di  $U$

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c \\ \left. \begin{aligned} p(1) &= a + b + c = 0 \\ p(-1) &= a - b + c = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a + c &= 0 & c &= -a \\ b &= 0 & b &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

il più generale pol. di  $U$  ha la forma

$$p(x) = ax^2 - a = a(x^2 - 1)$$

$\dim U = 1$  poiché un suo sist. di gen.  
 è formato da  $\{x^2 - 1\}$  che è sicuramente  
 poiché  $\neq$  polinomio nullo: 0

$$b) \dim W = \dim \langle 1+x, x-x^2, 2+x+x^2 \rangle$$

procedimento di aggiunta e scarto:

- $\{1+x\}$  sist. indip. poiché  $1+x \neq 0$
- $\{1+x, x-x^2\}$  sist. indip. perché un pol. di 2° grado non può essere un altro attraverso un K[R] di tipo di forma

• Il terzo dipende dai primi due?

$$2+x+x^2 = a(1+x) + b(x-x^2) ?$$

2 polinomi coincidono se i coeff. dei termini di ugual grado coincidono:

$$\begin{cases} 2 = a + b \cdot 0 \\ 1 = a + b \\ 1 = a \cdot 0 + b(-1) \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1}$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 + R_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

sist. risolvibile  
(ultima riga di zero tanto nei coeff. che nei termini cost.)

$\Rightarrow$  Come base <sup>di W</sup> sono scegliere  $\{1+x, x-x^2\}$

$$\Rightarrow \dim W = 2$$

c)  $\dim(U+W)$  ?

(7)

$$U+W = \langle x^2-1, 1+x, x-x^2 \rangle$$

questo è un sist. di generatori: sono indip?

So già che gli ultimi due lo sono (affine vrb).

Aggiungo il primo vettore e mi chiedo se è dipendente da essi

$$x^2-1 = a(1+x) + b(x-x^2) ?$$

Come sopra, identifico i coeff. dei termini di ugual grado

$$\begin{cases} 1 = -b \\ 0 = a+b \\ -1 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ 0 = -1-1 \\ a = -1 \end{cases} ?? \text{ IMPOSSIBILE}$$

ne deduco che  $x^2-1$  non dipende dai precedenti e quindi  $\dim U+W = 3$

d) la formula di Grassmann dice che

$$\begin{aligned} \dim U \cap W &= \dim U + \dim W - \dim U+W = \\ &= 1+2-3 = 0 \end{aligned}$$

cioè  $U \cap W = \{0\}$  ... che è quanto abbiamo concretamente trovato al punto precedente

Se avessi trovato  $\dim(U+W) = 2$  e quindi  $\dim(U \cap W) = 1$  avrei detto che

$$U+W = W \quad \text{poiché } W \text{ è ssp di } U+W \text{ e hanno la stessa dim.}$$

$$U \cap W = U \quad \text{analogamente (} U \cap W \subseteq U \text{)}$$

Ma questo significa  $U \subseteq W$ .